研究速報

UDC 624.044：624.078.8

ひずみ仮定による補強板有限要素とその応用
—その１：定式化と簡単な数値例—

Assumed-Strain Stiffened-Plate Element and Its Applications
(Part 1: Formulation and Simple Numerical Examples)

都井　　裕*・小橋啓司*
Yutaka TOI and Keiji KOBASHI

1. はじめに

多くの薄板構造物には構造的な強度を補強するためにスティフナ（stiffener）が取り付けられている．スティフナははりとして挙動し，通常の有限要素法では板要素とはり要素を組み合わせて補強板構造を解析する．この場合の有限要素モデリングは図１(a)のようになり，特に矩形断面，箱形断面などの幅広スティフナの場合は力学的に無理な近似となることがある．

スティフナはそれが取り付けられている板部分と第一近似的には一体として変形するので，スティフナのひずみ成分は板のひずみから外挿的に仮定できる．このことに着目して本研究では，ひずみ仮定法（Assumed Strain 法）によりスティフナと板が一体化した補強板有限要素を誘導し，実際の問題に応用する．まず本報では，微小変形弾性問題に対する要素の定式化を行い，簡単な数値例により定式化の妥当性を確認する．

2. ひずみ仮定による補強板有限要素の定式化

図２に本要素の概念図を示す．板要素としてはHughesらによる双一次の四辺形要素[1)]を定全な１点積分要素として用いる．断面力法の使用を前提とし，板の一般化ひずみをベクトル表記すると，

$$\{\kappa_p\}^t = [\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}] \qquad (1)$$

となる．ここに，κ は曲率変化，γ はせん断ひずみ，ε は面内ひずみ成分を表わす．

他方，スティフナの一般化ひずみは

$$\{\kappa_b\}^t = [\kappa^b_b, \kappa^t_b, \gamma_b, \varepsilon_b] \qquad (2)$$

*東京大学生産技術研究所　第２部

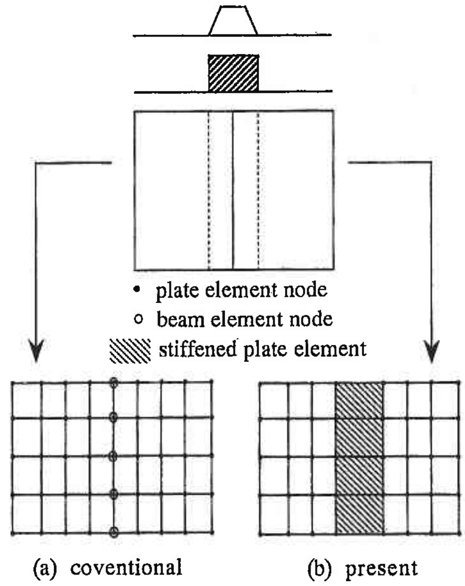


図１　補強板構造の有限要素モデリング

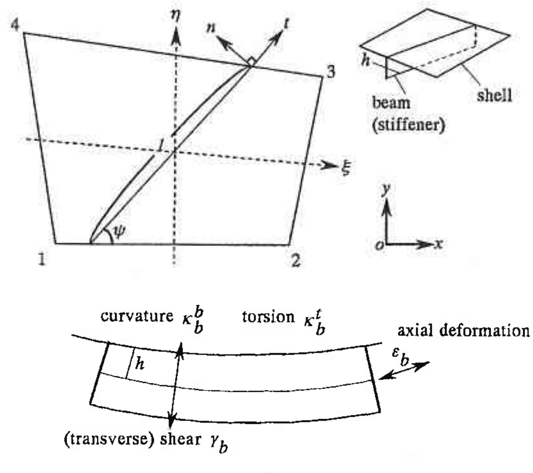


図２　補強板有限要素

の4成分である．それぞれ，曲率変化，ねじれ率，せん断ひずみ，一様軸ひずみを表す．板面方向の曲げ変形，せん断変形は無視する．

次に，これら二つの一般化ひずみベクトル間の関係を求める．まず，(1)式の板の一般化ひずみに座標変換を施し，スティフナの主軸とそれに直交する方向（図2の *tn*）の成分として表記する．すなわち

$$\{\kappa'_p\} = [H]\{\kappa_p\} \tag{3}$$

ここに，

$$\{\kappa'_p\}^t = [\kappa_t, \kappa_n, \kappa_{tn}, \gamma_{tz}, \gamma_{nz}, \varepsilon_t, \varepsilon_n, \varepsilon_{tn}] \tag{4}$$

(3)式におけるマトリックス $[H]$ は oxy 座標系と otn 座標系のなす角度 ψ をパラメーターとして含む座標変換マトリックスである．スティフナの中立軸と板の中央面の距離を h としたとき，スティフナの一般化ひずみ成分は(4)式のひずみ成分を用いて，次式のように近似される．

$$\begin{aligned} \kappa^b{}_b &= \kappa_t \\ \kappa^t{}_b &= \frac{1}{2}\kappa_{tn} \\ \gamma_b &= \gamma_{tz} \\ \varepsilon_b &= h\kappa_t + \varepsilon_t \end{aligned} \tag{5}$$

ねじり成分については，板が十分に薄い場合は厳密に成り立つ．(3)式と(5)式より，板の一般化ひずみとスティフナの一般化ひずみの間には次式のような線形関係が成立することがわかる．

$$\{\kappa_b\} = [B_b]\{\kappa_p\} \tag{6}$$

$[B_b]$ の具体形を表1に示す．

(1)式で示される板の一般化ひずみは，要素節点変位ベク

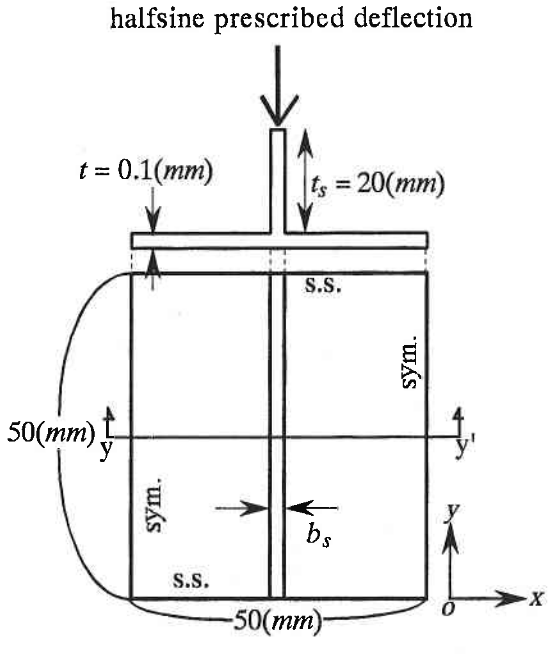


図3　Shear lag 問題

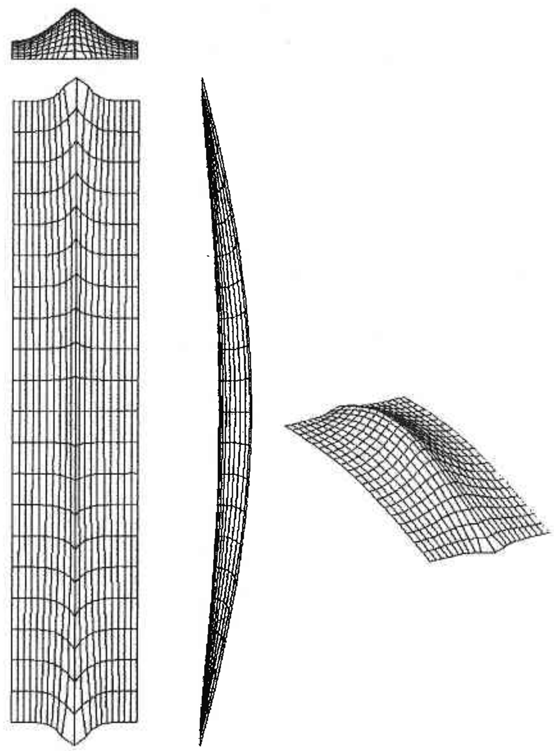
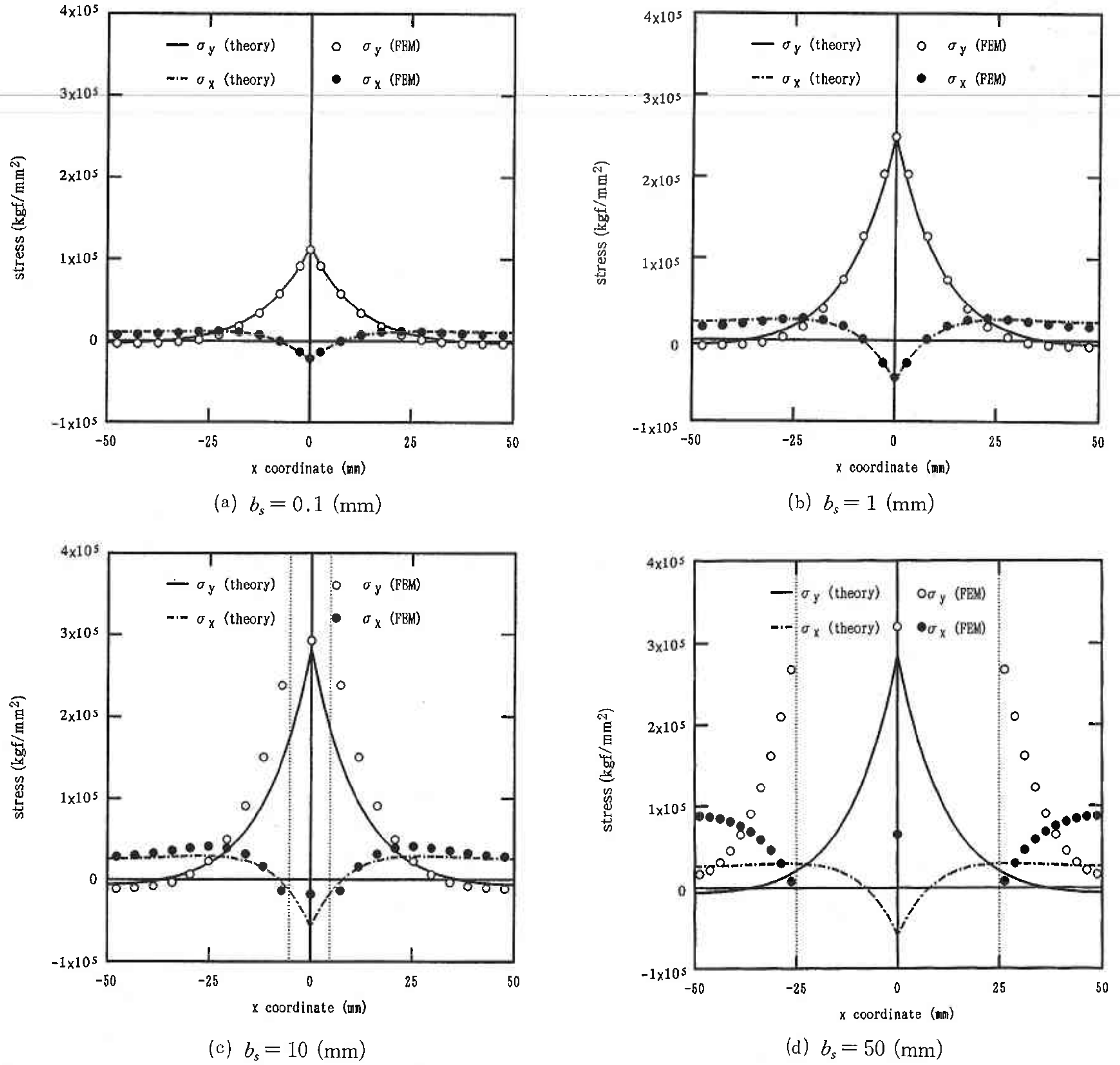


図4　全体変形図（b_s=0.1）

表1　$[B_b]$ matrix

$$\begin{bmatrix} \cos^2\psi & \sin^2\psi & \sin 2\psi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin 2\psi/4 & \sin 2\psi/4 & \cos 2\psi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\psi & \sin\psi & 0 & 0 & 0 \\ h\cos^2\psi & h\sin^2\psi & h\sin 2\psi & 0 & 0 & \cos^2\psi & \sin^2\psi & \sin 2\psi/2 \end{bmatrix}$$



(a) $b_s = 0.1$ (mm)　(b) $b_s = 1$ (mm)　(c) $b_s = 10$ (mm)　(d) $b_s = 50$ (mm)

図5　面内応力分布

トル $\{u_e\}$ と以下の関係にある．

$$\{\kappa_p\} = [B]\{u_e\} \tag{7}$$

また，板およびスティフナの断面力とそれぞれの一般化ひずみ成分との関係はマトリックス形で

$$\{M_p\} = [D_p]\{\kappa_p\} \tag{8}$$
$$\{M_b\} = [D_b]\{\kappa_b\} \tag{9}$$

と表現される．ここに，$[D_p]$ と $[D_b]$ は曲げ剛性などを含む板とスティフナの応力・ひずみマトリックスである．

以上の諸マトリックスを用いて，要素中心点でひずみエネルギーを評価することにより，以下の要素剛性マトリックスを得る．

$$\begin{aligned}[K_e] &= [K_p] + [K_b] \\ &= [B]^t[D_p][B]\cdot A + [B]^t[B_b]^t[D_b][B_b][B]\cdot l\end{aligned}$$

ここに A は板要素の面積，l はスティフナの板要素内での長さである．(10)式は

$$\begin{aligned}[K_e] &= [B]^t[D'][B]\cdot A \\ &= [B]^t([D_p] + [D'_b])[B]\cdot A\end{aligned} \tag{11}$$

$$[D'_b] = [B_b]^t[D_b][B_b]\cdot\frac{l}{A} \tag{12}$$

のように変形できる．すなわち，板の応力・ひずみマト

リックス $[D_p]$ に，⑿式で与えられるスティフナの等価弾性マトリックスを付加することにより，補強板有限要素の剛性マトリックスが得られる．

3. 数　値　例

図3のような，一般的にはshear lag問題として知られている問題の解析に本補強板有限要素を応用した．この問題の解析では，補強板要素における板幅はスティフナ幅と等しくとり，4種類のスティフナ幅を仮定した．図4は，最もスティフナ幅の狭い場合の変形図である．図5はスティフナに直交する断面における面内応力分布である．最もスティフナ幅の狭い場合の解は，応力関数を用いて解かれた厳密解[2)]と良好に対応しており，本要素の妥当性が確認できる．また，スティフナ幅が広くなるに連れて，この厳密解から離れていく様子が観察される．このようなスティフナ幅の影響を考慮した解析は，板要素の節点にはり要素を配置する通常の方法では困難であり，本手法の有効性が理解される．

4. 結　　論

従来の補強板構造の有限要素解析では，はり要素と板要素の混在した計算アルゴリズムにより解析が行われてきたが，本研究では，パラメータの設定により単純な板から任意のスティフナを有する補強板までを含む，一般的な補強板有限要素を提案し，shear lag問題の解析例により，その妥当性と有効性を確認した．

この要素を用いれば，スティフナ部に対しはり要素を用いる必要がなく，スティフナ幅の影響も正確に考慮することができる．また本要素ではスティフナの影響を，板の応力・ひずみマトリックスに修正を加える形で考慮しているため，幾何学的非線形問題への拡張に際しては，板要素についてのみ幾何学的非線形解析の定式化を行えばよい．

(1994年5月2日受理)

参 考 文 献

1) T. J. R. Hughes, R. L. Taylor and W. Kanoknukulchai, ‘A simple and efficient element for plate bending’, Int. J. Numer. Meths. Engng., Vol.11, (1977), 1529-1543.

2) 山本善之：弾性・塑性，(1961)，朝倉書店．