

## LES 乱流モデリングの動向

On Development of Subgrid Scale Turbulence Modeling for Large Eddy Simulation

小林 敏雄\*・戴 毅\*

Toshio KOBAYASHI and Yi DAI

Smagorinsky 渦粘性近似モデル (S-モデル) は乱流統計理論に基づいて構成されたもので、従来、Large Eddy Simulation (LES) の Subgrid scale 乱流モデルの基礎支柱となってきた。しかし、高精度な数値解析の検証によって、S-モデルはスカラー量である Subgrid scale 乱流エネルギーの散逸率をよい精度で評価できるが、Subgrid scale 乱流応力テンソルに対してはモデリングの精度が低いことが知られている。本論では S-モデルの誘導過程を示すことによって、問題点を述べ、これらの問題点を克服するためのモデリングに関する研究の最近の展開を述べる。

## 1. はじめに

LES (Large Eddy Simulation) 乱流数値シミュレーションは基礎的な研究が行われていると同時に、工学的な応用も盛んに進め始められている。LES は、直接シミュレーション (Direct Numerical Simulation, DNS) と比べて、高レイノルズ乱流に適用でき、レイノルズ平均モデル (Reynolds Averaged Numerical Simulation, RANS) と比べて、モデル化に際しての近似が少なく、乱流に関する不可欠な非定常情報を得ることができるという特徴を持つ。したがって、LES は RANS に比べてコンピュータ負荷は大きいものの将来の実用的乱流解析法として有望視され、複雑形状を持ち、層流、遷移と乱流を共存する流れ場などへの適用を可能とするように目ざましく進歩している。

## 2. LES 乱流モデルの基礎

## 2.1 基礎方程式とサブグリッド応力

非圧縮流体の Navier-Stokes 運動方程式と連続の式にフィルタリング操作を施す。微分オペレータは通常、フィルタオペレータとの互換が成立するので、LES 基礎方程式となる Filtered Navier-Stokes 方程式は、

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( p + \frac{2}{3} q \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

となる。ここで、 $u_i$  は  $i$  方向の速度成分、 $p$  は圧力を示す。LES では、乱流量の空間分布  $u_i$  を空間フィルタリング操作 (空間粗視化) によって、格子スケール以上の成分  $\bar{u}_i$  (Grid Scale, GS 変数, Resolved scale) と、格子以下の成分  $u'_i$  (Subgrid Scale, SGS 変数, Unresolved scale) に分離する。(1)式中においてモデリングされる必要のある SGS 応力成分  $\tau_{ij}$  は

$$\tau_{i,j} = (\bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j) - \frac{2}{3} \delta_{ij} q \quad (3)$$

$$q = \frac{1}{2} (\overline{u_k u_k} - \bar{u}_k \bar{u}_k) \quad (4)$$

と表される。 $\tau_{ij}$  に関する輸送方程式は運動方程式(1)と連続の式(2)から誘導できるが、これらの方程式中にある SGS 3 成分速度相関項や圧力・速度相関項をモデル化することによって、SGS 応力成分  $\tau_{ij}$  を算出し、2次近似モデルに基づく LES を構成することができるが、公式の煩雑さと SGS 3 成分速度相関項や圧力・速度相関項のモデル化が容易ではないため、2次近似モデルは LES の研究としてまだ注目されていない。実際に乱流解析に適用されてきた LES ではほとんど  $\tau_{ij}$  に関する輸送方程式を解かず、第一近似モデルに基づくものである。本稿では主に第一近似モデルによる LES の最近の動向を紹介する。

まず、いままで、LES の基礎モデルとなってきた Smagorinsky 渦粘性モデルの誘導過程から入り、そのモデルに存在するいくつかの問題点を明示し、それから、これらの問題点を克服するように LES サブグリッド応力のモデリングに関する研究の最近の展開を述べる。

\*東京大学生産技術研究所 第2部

2.2 サブグリッド応力のモデリング

SGS 応力成分  $\tau_{ij}$  が Resolved scale に及ぼす影響を示すために、Resolved scale の運動エネルギー  $Q = \frac{1}{2} \bar{u}_k \bar{u}_k$  に関する輸送方程式を考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (Q \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\bar{p} \bar{u}_j - \bar{u}_i \tau_{ij} + \frac{1}{Re} \frac{\partial Q}{\partial x_j} \right) \\ - \frac{1}{Re} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \tau_{ij} \bar{S}_{ij}, \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\bar{S}_{ij}$  は Resolved scale の Strain-rate テンソルである。(5)式右辺最後の項  $\epsilon_{SGS} = \tau_{ij} \bar{S}_{ij}$  は Resolved scale と Subgrid scale の間で  $\tau_{ij}$  による運動エネルギーの輸送率であり、(5)式の右辺の第二項は Resolved scale 成分による粘性散逸率である。乱流運動エネルギー spectrum での慣性小領域ではその粘性散逸率が無視でき、運動エネルギーは energy cascade 効果によって統計的に Resolved scale から Unresolved scale へ輸送されるので、 $\epsilon_{SGS} < 0$ 、通常、Resolved scale における Subgrid-scale 散逸率と呼ばれる。 $\epsilon_{SGS}$  式中の  $\tau_{ij}$  のモデリングを考えるため、SGS 運動エネルギー  $q$  に関する輸送方程式を示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial q}{\partial x_j} = \\ \underbrace{-\tau_{ij} \bar{S}_{ij}}_{\text{production term}} + \underbrace{\frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 q}{\partial x_j^2} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right]}_{\text{viscous dissipation term } \epsilon_v} \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{u}_j \bar{u}_i^2}{2} - \frac{\bar{u}_j \bar{u}_i^2}{2} - \bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_i + \bar{u}_i^2 \bar{u}_j \right) \\ + \frac{\bar{u}_j \bar{p}}{\rho} - \frac{\bar{u}_j \bar{p}}{\rho} \end{aligned} \quad (6)$$

この式から、 $\tau_{ij}$  によって、Resolved scale から Unresolved scale へ輸送されている  $\epsilon_{SGS}$  は SGS 運動エネルギー  $q$  の輸送方程式の Production 項となっていることが示されている。SGS 応力成分  $\tau_{ij}$  は通常この輸送方程式を用いて次のようにモデル化されている。

Resolved scale に対して、計算格子の Box 内 (局所的) の SGS 応力成分は統計的に定常、一様な性質 (⇒局所平衡) を持つと仮定する場合 (条件 1)、エネルギー式(6)は次式

$$\epsilon_v = \tau_{ij} \bar{S}_{ij} \quad (7)$$

になる。 $\epsilon_v$  は Unresolved scale による粘性散逸量である。次に、SGS 応力  $\tau_{ij}$  は分子粘性との類似から Strain-rate

$\bar{S}_{ij}$  と比例すると表現される (条件 2)

$$-\tau_{ij} = 2\nu_e \bar{S}_{ij}. \quad (8)$$

慣性小領域で、スケール間のエネルギーの輸送は統計的に Resolve scale から Subgrid scale まで進行されること (energy cascade) (条件 3) を基づき、次の次元解析が導入される。

$$\nu_e = C_\nu q^{1/2} \Delta, \quad \epsilon_v = -C_\epsilon \frac{q^{3/2}}{\Delta} \quad (9)$$

ここで、 $\Delta$  はグリッド scale であり、 $C_\nu$  と  $C_\epsilon$  は比例係数である。式(9)は(8)と一緒に式(7)に代入し、SGS 運動エネルギー  $q$  は次のように得られる。

$$q = \frac{C_\nu}{C_\epsilon} \Delta^2 (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}) \quad (10)$$

式(10)を式(9)の  $\nu_e$  に代入することによって、渦粘性係数  $\nu_e$  が次のように表すことができる。

$$\nu_e = (C_s \Delta)^2 (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2} \quad (11)$$

これは Smagorinsky 渦粘性係数モデルと呼ばれる。(8)と(11)式を(7)式に代入し、次式となる。

$$\begin{aligned} \epsilon_v = -2\nu_e \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \\ = -2\sqrt{2} (C_s \Delta)^2 (\bar{S}^2)^{3/2} (< 0) \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $C_s$  は Smagorinsky モデル常数である。 $\bar{S} = (\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2}$ 。 $\bar{S}^2$  は乱流統計理論に基づき (Lilly, 1966)、次の渦度 spectrum function の波数積分から求められるとする (条件 4)。

$$S^2 = \int_0^{\frac{\pi}{\Delta}} k^2 \mathcal{E}(k) dk = \frac{3}{4} \alpha |\epsilon|^{2/3} \left( \frac{\pi}{\Delta} \right)^{4/3} \quad (13)$$

ここで、 $\mathcal{E}(k)$  は Kolmogoroff spectrum 関数であり ( $\mathcal{E}(k) = \alpha \epsilon^{2/5} k^{-5/3}$ )、 $\alpha (=1.5)$  は普遍係数である。 $\epsilon$  は粘性散逸総量であるが、慣性小領域では Resolved scale の粘性散逸量が無視できるため、粘性散逸総量  $\epsilon$  は Subgrid scale 粘性散逸量  $\epsilon_v$  と対等とすることができる。すなわち、

$$\epsilon = \epsilon_v \quad (14)$$

(13)と(14)式を(12)式に代入することによって、Smagorinsky モデル常数  $C_s$  の理論値 ( $C_s = 0.2$ ) を算出することが出来る。

以上の誘導過程に示されたように、SGS 応力は subgrid scale に対して、慣性小領域での運動エネルギー輸送に関

する統計的な性質を考慮することによって、モデリングされたものである。

この Smagorinsky 渦粘性係数近似モデルを用いて、LES は等方性乱流、一様せん断乱流、乱流混合層、チャンネル乱流等多種の基本乱流に適用された。Smagorinsky モデルは、乱流エネルギー散逸としては、かなりよいモデルとなっているが、SGS 応力レベルでは、このモデルの精度が低いことは検証されている。

また、モデル定数  $C_s$  は Kolmogoroff 則に基づいた理論値としては約 0.2 である。一様等方性乱流の LES では、この値で実験とよく一致する結果が得られたが、乱流混合層、チャンネル乱流では大きすぎ、それぞれ、約 0.15, 0.1 が最適値のようである。実際の乱流場は常にこれらの基本乱流の共存体であり、 $C_s$  の最適値の決定は困難である。

また、壁で粘着条件を課す場合、壁面上で  $\tau_{ij} = 0$ 、すなわち  $v_e = 0$  を満足しなければならない。このため、通常は、 $\Delta$  に Van Driest 型減衰関数  $(1 - \exp(-y_+/26))$  を乗じている。この関数は経験的なもので、壁から一定の距離  $y_+$  だけ離れた面上では一様な減衰を与え、LES で重要な局所性を反映できない。

さらに、Smagorinsky モデルは上述の 4 条件に基づき誘導され、特に、条件 1 と条件 2 という統計的な仮定によって、SGS 応力のモデリングによる Resolved scale と Subgrid scale 間のエネルギー輸送に完全散逸的な性格をもたせることとなった。実際流れの波数成分間に局所かつ瞬時的な顕著な双方向的なエネルギー輸送機構 forward scatter ( $\epsilon_{SGS} < 0$ ) and backward scatter ( $\epsilon_{SGS} > 0$ ) はモデル化されておらず、遷移流の乱れの発達過程を予測することに適用し得ない。

以上述べた問題点が解決されないと、より広範な LES の応用は難しい。

**Smagorinsky モデルの誘導条件についての問題点をまとめると次のようになる。**

- ・条件 1 : Resolved scale の変動と比べて Subgrid scale の変動が Resolved scale と充分離れた高波数成分しか持たなく、フィルタ幅 (cut-off wave length) の box 内で見た小スケールの変動は定常等方性を持つ場合に限りて成立する。現実の流れ場はこのような単純なスケール分離ができるものではない。
- ・条件 2 : 条件一を満たす流れ場に対して、Subgrid scale 応力の変動は、Resolved scale に対し、ほとんど、分子運動に類似する無秩序な振舞いであり、局所的に Resolved scale の strain rate と直接比例する仮定はよい近似であると考えられる。しかし、一般に、スケール分離できないような乱流 SGS 応力  $\tau_{ij}$  はその輸送方程式に支配され、局所 Resolved scale の strain rate  $\bar{S}_{ij}$  との間の単純な等方表現の比例関係とはならず、 $\tau_{ij}$  と  $\bar{S}_{ij}$  の主軸

方向も常にずれていると考えられる。

- ・条件 3 : LES の瞬時、局所的なシミュレーション精度を追求する場合、すなわち、瞬時組織構造と瞬時最大値を高精度で求める必要があるとき、統計散逸量だけではなく、波数間のエネルギー輸送の Forward と Backward scatter 機構をモデル化する必要がある。
- ・条件 4 : この条件によって、計算格子の cut-off wave number は慣性小領域に入ることが望まれる。たとえば、壁近傍できわめて細かい格子を切る場合、 $\Delta$  は分子粘性スケールに近くなり、SGS 変動は慣性小領域から離れ、分子散逸領域に入り、(13)式が成り立たなくなる ( $\epsilon(k)$  は Kolmogoroff の  $-\frac{5}{3}$  乗則に従わなく、指数減衰則に従う)。通常、これは局所低レイノルズ数領域で  $C_s$  値を修正しなければならない主な理由となる。壁面近傍領域では低レイノルズ数効果のほかに、壁面に垂直方向の速度成分の変動値は他方向の速度成分の変動値より卓越的に速く減衰させる圧力 blocking 効果が存在する (Durbin 1991)。通常、低レイノルズ数効果が壁面境界層の  $y^+ < 10$  の領域に限られるが、圧力 blocking 効果が全壁面境界層に渡って現れる。この圧力 blocking 効果は条件 1 の等方性仮定に考慮され得ないものである。

### 3. LES 乱流モデルの発展

LES 乱流モデルに関する最近の研究は主に Smagorinsky モデルの欠点を克服し、 $C_s$  や減衰関数などによるモデルの修正効果をより普遍的、統一的に取り入れるよう行われている (Horiuti, 1991)。研究の展開は主に第一次近似モデルのレベルだけに限られるが、改善する余地は十分多い。精力的な研究により、多くの SGS 応力に関するモデルが開発されているが、ここでは、その中の代表的な幾つかのモデルを紹介する。

#### 3.1 Yoshizawa TSDIA SGS モデル

より多くの種類の基本乱流を含む複雑な流れ場を統一的に取り上げることが目的として、Smagorinsky モデル係数  $C_s$  の変数表示が乱流統計理論 (TSDIA) を用いて、以下のように導出された (Yoshizawa 1989, 1991)。

$$\frac{C_s}{C_{s0}} = 1 + \frac{C_A}{S^2} \cdot \frac{DS}{Dt} \quad (15)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (16)$$

(15)式中のモデル定数としては  $C_{s0} = 0.16$ ,  $C_A = 0.64$  が Yoshizawa によって示されたが、Morinishi (1989) は実際に数値計算を行うことにより、通常の Smagorinsky モデルでモデル定数  $C_s$  値のほぼ上限を与える一様等方性減衰乱流、および  $C_s$  値のほぼ下限を与えるチャンネル内乱

流を取り上げ、モデル式(15)に対して、双方の流れ場を同時に表現できるように最適化を行った。

### 3.2 RNG SGS モデル

Yakhot and Orszag (1986) が Renormalization Group 分析法により低レイノルズ効果を統一的に取り扱うことのできる SGS モデルを次のように提案した。

$$\nu = \nu_0 \left[ 1 + H \left( \frac{\nu_e^2 \nu}{\nu_0^3} - C \right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (17)$$

$$H(x) = \begin{cases} x, & \text{for } x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

ここで、 $\nu_0$  は分子粘性であり、 $\nu_e$  は Smagorinsky モデルの計算による渦粘性係数である。(17)式を用いて非定常 LES 計算を行う場合、各時間ステップで  $\nu$  に関する三次非線形方程式を解かなければならない。計算過程を簡略化するため、Piomelli (1989) は次のような陽的な解法に基づき、RNG モデルで遷移・乱流平板境界層の LES を行った。

$$\nu^{n+1} = \begin{cases} \nu_0 \left[ 1 + \left( \frac{\nu_e^2 \nu^n}{\nu_0^3} - C \right)^{\frac{1}{3}} \right], & \text{for } \frac{\nu_e^2 \nu^n}{\nu_0^3} > C \\ \nu_0, & \text{for } \frac{\nu_e^2 \nu^n}{\nu_0^3} \leq C \end{cases} \quad (19)$$

$$C = 100, C_s = 0.125, \Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{\frac{1}{3}} \quad (20)$$

RNG モデルは壁近傍の低レイノルズ効果を考慮するため、複雑形状を持つ流れ場への適用性が高いと考えられる。また、遷移平板境界層へ適用された結果によると、遷移過程の乱れの発達は定性的に予測されると思われる。しかし、RNG モデルは渦粘性係数の正值性を必要とするため、SGS 成分による backward scatter 効果がモデル化されていない。それでも、低レイノルズ効果が顕著に現れる流れ場(層流と遷移)に対して、Smagorinsky モデルより一層の改善が見られたのは RNG モデルを用いて、Smagorinsky モデルによる over dissipation が抑制されたことにある。

### 3.3 Stochastic Backscatter SGS モデル

Unresolved scale から Resolved scale へのエネルギーの逆輸送現象 (backward scatter) が乱流、特に遷移流に顕著に存在することは一様等方乱流、遷移・乱流チャンネル (Piomelli et al, 1991) の DNS によりすでに検証されている。

(5)式中の最後の項  $\epsilon_{SGS} = \tau_{ij} \bar{S}_{ij}$  は Resolved scale と Unresolved scale の間に運動エネルギーの輸送率を表している。 $\epsilon_{SGS} < 0$  の時、SGS 成分は Resolved scale からエネルギーを消去する (forward scatter) が、 $\epsilon_{SGS} > 0$  の時、SGS 成分は Resolved scale にエネルギーを放出する

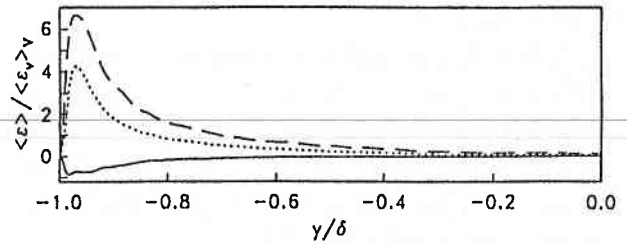


Fig. 1 Subgrid scale dissipation normalized by volume averaged viscous dissipation  $\langle \epsilon_v \rangle$ ;  $Re=7900$  turbulent channel flow. —: Plane averaged dissipation  $\langle \epsilon_{SGS} \rangle$ ; ---: plane averaged root-mean-square fluctuation of subgrid scale dissipation  $\langle \epsilon_{SGS} \rangle$ ; .....: plane averaged backscatter  $\langle \epsilon_+ \rangle$  (Piomelli, 1991).

(backward scatter).  $\epsilon_{SGS}$  の backward と forward scatter 成分はそれぞれ  $\epsilon_+$  と  $\epsilon_-$  と表され、次のように定義される。

$$\epsilon_+ = \frac{1}{2} (\epsilon_{SGS} + |\epsilon_{SGS}|), \quad \epsilon_- = \frac{1}{2} (\epsilon_{SGS} - |\epsilon_{SGS}|) \quad (21)$$

Fig. 1 に示されるように backward scatter と forward scatter は net の  $\epsilon_{SGS}$  量よりずっと大きい値を取っており、壁近傍で最大となっていることがわかる。このような現象をモデリングで反映できなければ、壁面乱流の瞬時構造を LES で再現することができるとは言いにくい。

#### 3.3.1 Leith モデル

等方性乱流の Stochastic backscatter は  $k^4$  の spectrum ( $k$ —波数) を持っている (Leslie and Quarini 1979). Leith (1990) が Smagorinsky モデルを用いる Filtered Navier-Stokes 方程式に等方かつ divergence free の Stochastic backscatter force を加えて、等方性乱流の Stochastic backscatter の  $k^4$  spectrum を再現した。このモデルは次のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_k)}{\partial x_k} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\rho (\nu_0 + \nu_e S_{ik})] + \rho a_i, \quad (23)$$

$$a_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} \quad (24)$$

$$\phi_k = C_b |S \delta t|^{\frac{3}{2}} (\lambda / \delta t)^2 g \quad (25)$$

ここで、 $\lambda$  は長さスケール、 $\delta t$  は時間ステップ、 $g$  は単位 Gaussian random number (zero mean and unit variance).  $C_s=0.2, C_b=0.4$ . このモデルは 2 次元時間発達乱流混合層に適用され、運動量厚さの時間発達を正確に予測した。しかし、さらに詳細な検証が行われなかった。

### 3.3.2 Chasnov モデル

Chasnov (1991) が eddy damped quasinormal Markovian (EDQNM)SGS モデルを提案した。このモデルは有効渦粘性  $\nu_e$  を EDQNM eddy-damping term  $\eta(k, t)$  と stochastic force  $F(k, t)$  によって表している。すなわち、

$$\nu_e(k, t) = \eta(k, t) - \mathcal{F}(k, t)/2k^2\mathcal{E}(k, t). \quad (26)$$

理論計算によって、波数  $k$  が慣性小領域にあり、また  $k \gg k_m$  の場合 ( $k_m$ —LES 計算の最大波数: Cut-off 波数) には、(26)式の第二項と第一項の比は  $\frac{14}{15}(k/k_m)^{11/3}$  となり、backscatter の効果が省略できる。  $k \sim k_m$  の場合、  $\eta(k, t)$  と  $\mathcal{F}(k, t)/2k^2\mathcal{E}(k, t)$  は同じ Order となり、backscatter 効果を考慮しなければならないという重要な情報が提示された。これは backscatter 効果が Cut-off 波数に近い波数成分間の干渉作用によって支配される事を意味している。

このモデルが減衰等方性乱流に適用され、慣性小領域の spectral decay の予測が実験とよく一致する結果が得られたが、渦粘性モデルを用いる計算は実験と一致する結果が得られなかった。このモデルはスペクトル形となっており、空間非周期条件の壁面のある問題への適用は触れなかった。

### 3.4 Dynamic SGS モデル

以上述べたモデル係数の普遍性、壁近傍の低レイノルズ効果と Unresolved scale による backward scatter 効果を同時に上げるため、Germano et al (1991) は dynamic SGS モデルを提案した。N-S 方程式に一回フィルタ操作 (格子フィルタ, 格子幅  $\Delta$  はフィルタ幅とする) をすると、SGS 応力  $\tau_{ij}$  次のように表される。

$$\tau_{i,j} = (\overline{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} \quad (27)$$

$$\tau_{kk} = \overline{u_k u_k} - \tilde{u}_k \tilde{u}_k \quad (28)$$

N-S 方程式に二回フィルタ操作 (格子フィルタとテストフィルタ,  $\Delta$  より広い幅をテストフィルタのフィルタ幅とする) をすると、SGS 応力  $T_{ij}$  次のように表される。

$$T_{i,j} = (\overline{\overline{u_i u_j}} - \tilde{\tilde{u}}_i \tilde{\tilde{u}}_j) - \frac{2}{3} \delta_{ij} T_{kk} \quad (29)$$

$$T_{kk} = \overline{\overline{u_k u_k}} - \tilde{\tilde{u}}_k \tilde{\tilde{u}}_k \quad (30)$$

$\tau_{ij}$  と  $T_{ij}$  の関係は  $\tau_{ij}$  に test filter をかけることによって、次のように書ける。

$$\tilde{\tau}_{ij} = \overline{\overline{u_i u_j}} - \tilde{\tilde{u}}_i \tilde{\tilde{u}}_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \tilde{\tau}_{kk}$$

$$= \underbrace{\overline{\overline{u_i u_j}} - \tilde{\tilde{u}}_i \tilde{\tilde{u}}_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} T_{kk}}_{T_{ij}} - \underbrace{[\overline{\overline{u_i u_j}} - \tilde{\tilde{u}}_i \tilde{\tilde{u}}_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} (T_{kk} - \tilde{\tau}_{kk})]}_{L_{ij}} \quad (31)$$

$$L_{ij} = T_{ij} - \tilde{\tau}_{ij} \quad (32)$$

$\tau_{ij}$  と  $T_{ij}$  はそれぞれ一回と二回フィルタ操作による SGS 応力テンソルであり、 $L_{ij}$  は LES 速度場  $\tilde{u}_i$  に対するフィルタ操作で計算できる。Smagorinsky モデルが適用される場合 (条件),

$$\begin{aligned} L_{ij} \tilde{S}_{ij} &= T_{ij} \tilde{S}_{ij} - \tilde{\tau}_{ij} \tilde{S}_{ij} \\ &= -(2C(\bar{\Delta})^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij}) \tilde{S}_{ij} + (2C(\bar{\Delta})^2 |S| \tilde{S}_{ij}) \tilde{S}_{ij} \end{aligned} \quad (33)$$

となる。この式によって、モデル係数  $C$  を算出する。層流と壁近傍の場合、 $L_{ij}$  がゼロに近づき、SGS 応力はゼロになる。また、このモデルによって計算された壁面近傍 SGS 応力の漸近挙動は  $y^3$  となり、実験結果と一致する。さらに、 $C$  の計算値は負になることがあるので、 $\epsilon_{SGS} > 0$  の局所的な backscatter を表現することが可能である。

しかし、現時点の dynamic モデルにまだ問題が残されている。まず、モデル係数  $C$  は空間関数であるので、簡単に(33)式によって算出することができない。次に、 $C < 0$  が現れるとき負の状態が続けられ、計算が不安定となる。それを防ぐために、Lilly (1992) が式(32)に最小 2 乗法を適用し、計算を安定化する  $C$  の計算法を提案した。最後に、計算がかなり複雑であり、特に、複雑形状を持つ流れ場への適用 (Knut and Moin 1993) は今後の課題となる。

### 3.5 Bardina and Normal Stress SGS モデル

Bardina SGS モデルと併用する Normal stress SGS モデル (Horiuti 1992) はモデル係数の普遍性、低レイノルズ数効果、壁面近傍での圧力 blocking 効果と backscatter を統一的に取り扱えるもう一つのモデルである。SGS 応力は次のように再分割することができる。

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} &= (\overline{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) - \frac{2}{3} \delta_{ij} q \\ &= \underbrace{(\overline{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}_{L_{ij}} + \underbrace{u'_i \tilde{u}_j + u_i \tilde{u}'_j}_{C_{ij}} + \underbrace{u'_i u'_j}_{R_{ij}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} q \end{aligned} \quad (34)$$

$L_{ij}$  は Leonard 項であり、フィルタ操作によって計算できる。  $C_{ij}$  はクロス項、  $R_{ij}$  は SGS レイノルズ応力項であり、

モデル化の必要な項である。

3.5.1 Bardina SGS モデル

Bardina (1980) が scale similarity 仮説に基づいて、次のように  $C_{ij}$  項と  $R_{ij}$  項をモデル化した。

$$\overline{u'_i u'_j} \sim (\bar{u}_i - \bar{u}_i) (\bar{u}_j - \bar{u}_j) \quad (35)$$

$$\overline{\bar{u}_i u'_j} \sim \bar{u}_i (\bar{u}_j - \bar{u}_j) \quad (36)$$

$$\overline{u'_i u'_j} \sim (\bar{u}_i - \bar{u}_i) (\bar{u}_j - \bar{u}_j) \quad (37)$$

$$\overline{u'_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j + u'_i u'_j} \sim \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (38)$$

これらの式は Bardina モデルと呼ばれる。Bardina モデルは、SGS エネルギーの GS への backward scatter に主要な役割を果たしている cross 項に関するよいモデルであることが確認されている (Horiuti, 1989)。

Bardina モデルのみを用いて計算を行う際に散逸効果が足りないので、(34)式のレイノルズ項に対しては Smagorinsky モデルが用いられ、さらに、ガリレイ不変性の制約から、(38)式が cross 項に対するモデルとして使われる。

3.5.2 Normal Stress SGS モデル

Horiuti (1993a) が上述の Bardina-Smagorinsky モデルに対して、壁近傍で Van Driest 型減衰関数を使わず、より普遍性の高い SGS モデルを構築するため、Normal Stress の壁面への漸近挙動に基づき、新たな渦粘性係数近似モデルを次のように構成した。渦粘性係数  $\nu_e$  は特徴時間スケール  $\tau$  と速度スケール  $E^{1/2}$  の自乗の積によって表される。

$$\nu_e = (C_{M3} \Delta)^2 \left( \frac{1}{2} \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \right)^{1/2} \frac{3E}{2E_G^B} \quad (39)$$

$E$  と  $E_G^B$  はそれぞれ SGS レイノルズ応力の Bardina モデルの壁面に垂直な成分の式と Bardina モデルの全成分の式として表現される。

$$E \sim C_N (\bar{u}_2 - \bar{u}_2) (\bar{u}_2 - \bar{u}_2) \quad (40)$$

$$E_G^B = \frac{1}{2} C_K (\bar{u}_l - \bar{u}_l) (\bar{u}_l - \bar{u}_l) \quad (41)$$

(39)式中の  $\frac{3E}{2E_G^B}$  項は一種の damping factor として機能している。これはある程度の精度で解かれた GS 成分を有効に利用し、LES の瞬時性局所性を失わなく、壁近傍にある圧力 blocking 効果と低レイノルズ効果を反映する damping factor である。この SGS モデルを用いるチャンネル乱流の LES 計算によって、 $\langle \overline{u'_1 u'_3} \rangle$  については DNS とよく一致する結果が得られた。チャンネルより複雑な形状

の流れへの適用性を高め、より普遍性の高い SGS モデルになるため、(39)式を一般化したモデル (generalized SGS normal stress model, GNS) も提案されている。

$$\begin{aligned} \overline{u'_i u'_j} &= \delta^{ij} \left( \frac{2}{3} E_G^B + \frac{2}{3} P \right) - \nu_{eij} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} - \nu_{eil} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \\ \nu_{eij} &= (C_{M3} \Delta)^2 \frac{3(\bar{u}_i - \bar{u}_i)(\bar{u}_j - \bar{u}_j)}{2E_G^B} (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2} \\ P &= \nu_{eml} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \end{aligned} \quad (42)$$

このモデルによる時間発達乱流混合層の LES 計算も DNS の結果とよく一致している (Horiuti, 1993b)。

3.5.3 Bardina SGS モデルについての再検証

上述したように、Bardina SGS モデルを用いる LES 計算を行う際に、通常、SGS レイノルズ応力  $R_{ij}$  の計算には Smagorinsky 渦粘性近似が用いられるが、最近、モデル係数  $C_B = 4.0 \sim 5.0$  の Bardina モデル

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} = C_B (\bar{u}_i - \bar{u}_i) (\bar{u}_j - \bar{u}_j) \quad (43)$$

を用いて  $R_{ij}$  を計算し、その計算値と DNS の計算結果との比較検証が Horiuti (1993c) によって行われ、両者の間の高い相関が示された。その SGS レイノルズ応力による Resolved scale と Unresolved scale の間の運動エネルギーの輸送率は主に散逸性 ( $R_{ij} \bar{S}_{ij} < 0$ ) を持っているが、backscattering ( $R_{ij} \bar{S}_{ij} > 0$ ) も起こることが明らかにされた。また、GNS モデルによる  $R_{ij}$  も類似な性質を持っていることが検証されている。さらに、Bardina モデルのみによるチャンネル乱流 LES 計算が行われ、DNS 計算とよく一致する結果が得られた。これによって、従来の格子スケール  $\Delta$  と strain rate  $\bar{S}_{ij}$  に依存する形のモデリングを使用せず、計算される小スケール変動成分に基づく乱流 SGS 応力成分を推定する Bardina 型モデルのみによる LES 計算手法を構成できる可能性が示された。

4. ま と め

本文では LES の SGS 応力モデルに関する研究近況について解説をした。近年、LES の SGS 応力のモデリングの研究では乱流場の小スケール成分の瞬時性、局所性を重視し、DNS を有効に利用し、小スケール成分と大スケール成分との双方向のエネルギー輸送現象に注目してのモデル化が求められている。これらの研究は壁近傍、層流から遷移、乱流への発達、多種の基本乱流の共存する流れ場を取り扱うことを目指している。これらの研究成果は工業上で重要視される複雑乱流の非定常現象の解明に役に立つことであろう。 (1993年11月24日受理)

## 参 考 文 献

- 1) Bardida, J., *Ph.D dissertation. Stanford Univerivty, Stanford, California*, 1980.
- 2) Chasnov, J. R., *Phys. Fluids, A3(1)*, pp 188-200, 1991.
- 3) 小林, 森西., *東大生研報告, Vol. 38 No. 3 (Serial No. 240)*, 1993
- 4) Durbin, P. A., *Thero. Comp. Fluid Dynamics*, 3, p1, 1991.
- 5) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W. H., *Phys. Fluids A3*, 1760, 1991.
- 6) Horiuti, K., *Phys. Fluids, A1*, pp 462-464, 1989.
- 7) Horiuti, K., *Phys. Fluids, A2*, pp 1708-1710, 1990.
- 8) Horiuti, K., *天気, Vol. 38, No. 11*, pp 3-17, 1991.
- 9) Horiuti, K., *Phys. Fluids, A5*, pp 146-157, 1993a.
- 10) Horiuti, K., *Procedings of 9th Symp. on "Turbulent Shear Flows"*, 17-1, Kyoto, Japan, August 16-18, 1993b.
- 11) Horiuti, K. Kawamura, S., *Procedings of 7th Symp. on Numerical Fluid Dynamics*, 17-1, Tokyo, Japan, Dec 20-22, 1993c.
- 12) Knut, A., Moin, P., *Procedings of 2th Symp. on "Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2"*, Florence, Italy, 31 May-2 June, 1993.
- 13) Lee, S.S., Moin, P., and Lele, S., *Rept. TF-55, Thermosciences Div., Dept. Mech. Engr., Stanford Uniu.*, 1992.
- 14) Leith, C.E., *Phys. Fluids, A2(3)*, pp 297-299, 1990.
- 15) Leslie, D. C., Quaini, G.L., *J. Fluid Mech, vol. 91*, part 1, pp 65-91, 1979.
- 16) Lilly, D. K., NCAR manuscript, 123, 1966.
- 17) Lilly, D. K., *Phys. Fluids A4*, 663, 1992.
- 18) 森西, *東京大学博士論文*, 1989.
- 19) Piomelli, U., *Instability and Transition, Vol. 2*, pp 480-496, 1989.
- 20) Piomelli, U., *Phys. Fluids, A3(7)*, pp 1766-1771, 1991.
- 21) Yoshizawa, A., *Phys. Fluids, A3(8)*, pp 2007-2009, 1991.