

# 浮力ダンピング下の低 Re 数流れに対応可能な改良型 $k-\varepsilon$ モデルの提案とその検証

New  $k-\varepsilon$  Model including Damping Effect due to Buoyancy in Stratified Flowfield

村上周三\*・加藤信介\*\*・近本智行\*\*

Shuzo MURAKAMI, Shinsuke KATO and Tomoyuki CHIKAMOTO

暖房時、冷房時の室内空間等においては、流れ場が成層化し浮力に基づくダンピング効果により鉛直方向の乱流輸送が抑制され、流れ場の一部が層流化する現象が、しばしば観察される。この浮力ダンピングの効果を  $k-\varepsilon$  EVM に組み込んだ新しい改良型モデルを提案し、このモデルの性能を検証した。また温度成層により流れが層流化する現象に対し、従来壁近傍でのみ適用されてきている低 Re 数型  $k-\varepsilon$  モデルを、壁面の影響を直接受けない領域での層流化効果に対しても適用可能となるように改良して用いた。

## 1. はじめに

暖房時、冷房時の室内空間等においては、流れ場が成層化し浮力に基づくダンピング効果により鉛直方向の乱流輸送が抑制され、流れ場の一部が層流化する現象が、しばしば観察される。この浮力ダンピングの効果を  $k-\varepsilon$  EVM に組み込んだ新しい改良型モデルを提案し、このモデルの性能を検証する。また温度成層により流れが層流化する現象に対し、従来壁近傍でのみ適用されてきている低 Re 数型  $k-\varepsilon$  モデルを、壁面の影響を直接受けない領域での層流化効果に対しても適用可能となるように改良して用いる<sup>1)</sup>。

## 2. 浮力による乱れのダンピングを考慮した改良型 $k-\varepsilon$ モデルの提案

安定成層における  $k-\varepsilon$  モデルの改良に関してはすでにいくつかの優れたモデル<sup>2)~5)</sup>が提案されている。筆者らのモデルは特に浮力ダンピングによる層流化の再現という点に着目した点の特徴である。

このモデルでは温度成層により鉛直方向の乱れが減衰する効果を組み込む。その手法として鉛直方向に係わるレイノルズストレス、乱流熱フラックスの渦粘性近似に際し、減衰関数  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  を乗じる。

$$-\overline{u_i u_j} = C_\mu f_\mu f_{BV} \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (1)$$

$$-\overline{u_i \theta} = \frac{1}{\sigma_\theta} C_\mu f_\mu f_{B\theta} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_i} \quad (2)$$

$f_\mu$  は低 Re 数効果を表現するモデル関数。高 Re 数流れ場では  $f_\mu = 1$ 。  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  はレイノルズストレス輸送方程式、乱流熱フラックス輸送方程式に基づき、これを近似化して求める。suffix の  $B$  は buoyancy,  $V$ ,  $\theta$  はそれぞれ速度、温度に対応づけている。

### 2.1. $f_{BV}$ の導出

$f_{BV}$  は鉛直方向の速度変動  $u_3$  を含むレイノルズストレス  $(-\overline{u_3^2}, -\overline{u_1 u_3}, -\overline{u_2 u_3})$  のみを減衰させる関数とする。すなわち

$$-\overline{u_1^2} = 2\nu_t \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_1} - \frac{2}{3} k \quad (3)$$

$$-\overline{u_2^2} = 2\nu_t \frac{\partial \overline{U}_2}{\partial x_2} - \frac{2}{3} k \quad (4)$$

$$-\overline{u_3^2} = 2\nu_t f_{BV} \frac{\partial \overline{U}_3}{\partial x_3} - \frac{2}{3} k \quad (5)$$

$$-\overline{u_1 u_2} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \overline{U}_2}{\partial x_1} \right) \quad (6)$$

$$-\overline{u_1 u_3} = \nu_t f_{BV} \left( \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{U}_3}{\partial x_1} \right) \quad (7)$$

$$-\overline{u_2 u_3} = \nu_t f_{BV} \left( \frac{\partial \overline{U}_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{U}_3}{\partial x_2} \right) \quad (8)$$

ここで  $\nu_t = C_\mu k^2/\varepsilon$ 。低 Re 数流れに対応させる場合、 $(\nu_t f_{BV})$  にさらに  $f_\mu$  を乗じる。

$f_{BV}$  は  $\overline{u_i u_j}$  輸送方程式を近似化して求める。

$$(\overline{u_i u_j} \text{ 輸送方程式}) \frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} = P_{ij} + G_{ij} + \Phi_{ij} + D_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (9)$$

\*東京大学生産技術研究所 付属計測技術開発センター

\*\*東京大学生産技術研究所 第5部

定常状態で局所的に移流拡散項が無視できるとして、

$$0 = P_{ij} + G_{ij} + \Phi_{ij} - \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \quad (\varepsilon_{ij} \doteq \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \text{とした}) \quad (10)$$

ここで  $\Phi_{ij}$  の rapid term のモデル化は等方生産モデル (IPM) を用い、(11)式のように近似する。Wall-reflection 項  $\Phi_{ij}^W$  は無視した。

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = & -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) \\ & - C_2 \left( G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \quad (C_1 = 1.8, C_2 = 0.6^6) \quad (11) \end{aligned}$$

(11)式を(10)式に代入し、局所平衡 ( $P_k + G_k = \varepsilon$ ) を仮定すれば、いわゆる WET モデル<sup>7)</sup>を得る。

$$\begin{aligned} -\overline{u_i u_j} = & -C' \frac{k}{\varepsilon} \left\{ \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) + \left( G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \right\} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (12) \\ -\overline{u_i u_j} = & C' \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{U_l}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \\ & + C' \frac{k}{\varepsilon} \left( g_i \beta \overline{u_j \theta} + g_j \beta \overline{u_i \theta} - \frac{2}{3} g_k \beta \overline{u_k \theta} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (13) \end{aligned}$$

ここで  $C' = (1 - C_2) / C_1 = 0.22^6$ 。

筆者らが対象とする室内空間やこれに類似する流れ場において、主流に  $\overline{U_1}$  を選んだ安定成層状態 ( $|\overline{U_3}| \ll |\overline{U_1}|$ ,  $\partial \overline{\theta} / \partial x_3$  は大きな正) では、 $-\overline{u_1 u_3}$  が流れ場において主要な役割を果すストレス成分であるとし、 $-\overline{u_1 u_3}$  を優先的に正しく評価できるように  $f_{BV}$  を決定する。(13)式より、

$$\begin{aligned} -\overline{u_1 u_3} = & C' \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{u_1 u_3} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_1} + \overline{u_2 u_3} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} + \overline{u_3} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_3} \right. \\ & \left. + \overline{u_1} \frac{\partial \overline{U_3}}{\partial x_1} + \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U_3}}{\partial x_2} + \overline{u_1 u_3} \frac{\partial \overline{U_3}}{\partial x_3} \right) + C' \frac{k}{\varepsilon} g_3 \beta \overline{u_1 \theta} \quad (14) \end{aligned}$$

ここで対象としている流れ場の特徴を考慮して

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} \gg \frac{\partial}{\partial x_1} \sim \frac{\partial}{\partial x_2} \text{を仮定し、(14)式を(15)式のように近似。} \\ -\overline{u_1 u_3} \approx C' \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_3} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_3} \quad (15) \end{aligned}$$

(15)式中の  $\overline{u_3}^2$  は(13)式より(16)式のように得られるが、(15)式と同様に流れ場の特徴を考慮して、(16)式を(17)式のように近似する。

$$\begin{aligned} -\overline{u_3}^2 = & C' \frac{k}{\varepsilon} \left( 2 \overline{u_1 u_3} \frac{\partial \overline{U_3}}{\partial x_1} + 2 \overline{u_2 u_3} \frac{\partial \overline{U_3}}{\partial x_2} + 2 \overline{u_3} \frac{\partial \overline{U_3}}{\partial x_3} + \frac{2}{3} P_k \right) \\ & + \frac{4}{3} C' \frac{k}{\varepsilon} g_3 \beta \overline{u_3 \theta} - \frac{2}{3} k \quad (16) \end{aligned}$$

$$-\overline{u_3}^2 \approx C' \frac{k}{\varepsilon} \frac{2}{3} P_k + \frac{4}{3} C' \frac{k}{\varepsilon} g_3 \beta \overline{u_3 \theta} - \frac{2}{3} k \quad (17)$$

$$(7)式より \quad -\overline{u_1 u_3} = \nu_t f_{BV} \left( \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{U_3}}{\partial x_1} \right) \approx \nu_t f_{BV} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_3} \quad (18)$$

$$(15), (17), (18)式より \quad C' \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_3}^2 \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_3} = \nu_t f_{BV} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_3} \quad (19)$$

$$f_{BV} = \left( C' \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_3}^2 \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_3} \right) / \left( \nu_t \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_3} \right) \quad (20)$$

$$= C_{BV1} - C_{BV2} \frac{P_k}{\varepsilon} + C_{BV3} \frac{G_k}{\varepsilon} \quad (21)$$

ここで、 $C_{BV1} = 2C'/3C_\mu = 1.63$ ,  $C_{BV2} = 2C'^2/3C_\mu = 0.36$ ,  $C_{BV3} = 4C'^2/3C_\mu = 0.72$  と導出されるが、2.3.節に述べる操作を施し以下のように定数を与える。 $C_{BV1} : 1.36$ ,  $C_{BV2} : 0.36$ ,  $C_{BV3} : 0.72$ 。この  $f_{BV}$  により温度成層時、 $-\overline{u_3}^2$ ,  $-\overline{u_1 u_3}$ ,  $-\overline{u_2 u_3}$  を減衰させる。

### 2.2. $f_{B\theta}$ の導出

$f_{B\theta}$  は鉛直方向の乱流熱フラックス ( $-\overline{u_3 \theta}$ ) を減衰させる関数とする。

$$-\overline{u_1 \theta} = \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_1} \quad (22) \quad -\overline{u_2 \theta} = \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_2} \quad (23)$$

$$-\overline{u_3 \theta} = \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} f_{B\theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} \quad (24)$$

$f_{B\theta}$  の導出は  $\overline{u_i \theta}$  の輸送方程式に基づく。

( $\overline{u_i \theta}$  輸送方程式)

$$\frac{D \overline{u_i \theta}}{Dt} = P_{i\theta(1)} + P_{i\theta(2)} + G_{i\theta} + \Phi_{i\theta} + D_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} \quad (25)$$

ここで  $\Phi_{i\theta}$  の rapid term 対応項のモデル化は等方生産モデルにより(26)式のように近似。Wall-reflection 項  $\Phi_{i\theta}^W$  は無視した。

$$\Phi_{i\theta} = -C_{i\theta 1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i \theta} - C_{i\theta 2} P_{i\theta(2)} - C_{i\theta 3} G_{i\theta} \quad (26)$$

ここで、 $C_{i\theta 1} = 3.0$ ,  $C_{i\theta 2} = 0.5$ ,  $C_{i\theta 3} = 0.3^6$ 。

(25)式において移流拡散項を無視して、以下に示す WET モデル<sup>7)</sup>を得る。

$$-\overline{u_i \theta} \approx \frac{k}{\varepsilon} \left\{ C_{\theta 1} \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} + C_{\theta 2} \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + C_{\theta 3} g_i \beta \overline{\theta^2} \right\} \quad (27)$$

ここで文6)によれば、 $C_{\theta 1} = 1/C_{i\theta 1} = 0.33$ ,  $C_{\theta 2} = (1 - C_{i\theta 2}) / C_{i\theta 1} = 0.17$ ,  $C_{\theta 3} = (1 - C_{i\theta 3}) / C_{i\theta 1} = 0.23$ となるがLaunderは  $C_{\theta 1} = C_{\theta 2} = C_{\theta 3} = 0.25$ としている<sup>7)</sup>。(27)式の  $\overline{\theta^2}$  は以下の過程によりモデル化できる。

$$(\overline{\theta^2} \text{ 方程式}) \quad \frac{D \overline{\theta^2}}{Dt} = P_\theta + D_\theta - 2\varepsilon_\theta \quad (28)$$

定常状態で局所的に移流拡散項が無視できるとして、

$$0 = P_\theta - 2\varepsilon_\theta \quad (29)$$

スカラー変動の時間スケールと速度変動の時間スケールの比を  $R$  とすると ( $R = (\overline{\theta^2}/2\varepsilon_\theta)/(k/\varepsilon)$ ),

$$\varepsilon_\theta = (\overline{\theta^2}/2R)/(k/\varepsilon) \quad (30)$$

$$P_\theta = 2\varepsilon_\theta = (\overline{\theta^2}/R)/(k/\varepsilon) \quad (31)$$

$$\overline{\theta^2} = R \frac{k}{\varepsilon} P_\theta = -2K \frac{k}{\varepsilon} u_k \theta \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} = -\frac{k}{\varepsilon} u_k \theta \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \quad (32)$$

ここで  $R=0.5$  とした。(27), (32)式より(33)式が得られる。

$$-u_i \theta = \frac{k}{\varepsilon} \left\{ C_{\theta 1} u_i u_k \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} + C_{\theta 2} u_k \theta \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} - C_{\theta 3} g_i \beta \frac{k}{\varepsilon} u_k \theta \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \right\} \quad (33)$$

(33)式より

$$\begin{aligned} -\overline{u_3 \theta} = \frac{k}{\varepsilon} \left\{ C_{\theta 1} \left( \overline{u_1 u_3} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_1} + \overline{u_2 u_3} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_2} + \overline{u_3^2} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} \right) \right. \\ \left. + C_{\theta 2} \left( \overline{u_1 \theta} \frac{\partial \overline{U}_3}{\partial x_1} + \overline{u_2 \theta} \frac{\partial \overline{U}_3}{\partial x_2} + \overline{u_3 \theta} \frac{\partial \overline{U}_3}{\partial x_3} \right) \right. \\ \left. - C_{\theta 3} g_3 \beta \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{u_1 \theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_1} + \overline{u_2 \theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_2} + \overline{u_3 \theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} \right) \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

筆者らが対象とする流れ場の特徴を考慮して

$\frac{\partial}{\partial x_3} \gg \frac{\partial}{\partial x_1} \sim \frac{\partial}{\partial x_2}$  を仮定し, (34)式を(35)式のように近似する。

$$-\overline{u_3 \theta} = \frac{k}{\varepsilon} \left\{ C_{\theta 1} \overline{u_3^2} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} - C_{\theta 3} g_3 \beta \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_3 \theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} \right\} \quad (35)$$

(17), (24), (35)式より

$$f_{B\theta} = \left[ \frac{k}{\varepsilon} \left\{ C_{\theta 1} \overline{u_3^2} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} - C_{\theta 3} g_3 \beta \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_3 \theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} \right\} \right] / \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_\theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} \right] \quad (36)$$

$$= \frac{\sigma_\theta}{C_\mu} \left\{ C_{\theta 1} \left( -\frac{2}{3} C' \frac{P_k}{\varepsilon} - \frac{4}{3} \frac{C'}{\varepsilon} g_3 \beta \overline{u_3 \theta} + \frac{2}{3} \right) - \frac{C_{\theta 3}}{\varepsilon} g_3 \beta \overline{u_3 \theta} \right\} \quad (37)$$

$$= C_{B\theta 1} - C_{B\theta 2} \frac{P_k}{\varepsilon} + C_{B\theta 3} \frac{G_k}{\varepsilon} \quad (38)$$

ここで,  $C_{B\theta 1} = 2C_{\theta 1}\sigma_\theta/3C_\mu = 1.67$ ,  $C_{B\theta 2} = 2C_{\theta 1}C'\sigma_\theta/3C_\mu = 0.37$ ,  $C_{B\theta 3} = \sigma_\theta(4C_{\theta 1}C'/3 + C_{\theta 3})/C_\mu = 3.2$  と導出されるが, 2.3.節に述べる操作を施し以下のように定数を与える。  $C_{B\theta 1} : 1.37$ ,  $C_{B\theta 2} : 0.37$ ,  $C_{B\theta 3} : 1.6$ .

### 2.3. $f_{BV}$ , $f_{B\theta}$ の定数の与え方

浮力の影響がない時 ( $G_k=0$ ),  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  は以下のように表せる。

$$f_{BV} = C_{BV1} - C_{BV2} \frac{P_k}{\varepsilon} \quad (39) \quad f_{B\theta} = C_{B\theta 1} - C_{B\theta 2} \frac{P_k}{\varepsilon} \quad (40)$$

ここで局所平衡  $P_k = \varepsilon$  が成り立つ時  $f_{BV} = f_{B\theta} = 1$  を満

たすように,  $C_{BV1}$ ,  $C_{BV2}$ ,  $C_{B\theta 1}$ ,  $C_{B\theta 2}$  を決定する。すなわち

$$C_{BV1} = 1 + C_{BV2} \quad (41) \quad C_{B\theta 1} = 1 + C_{B\theta 2} \quad (42)$$

$u_i \theta$  を導く式(27)の中での項は安定時, 成層の向きとは逆方向に熱輸送を行おうと働き, 計算不安定を引き起こしやすい。WET モデルによる式(27)を用いた室内非等温場の解析では,  $\overline{\theta^2}$  を(32)式で与えた場合解を得ることができず,  $\overline{\theta^2}$  の項 (27式右辺第3項) を無視して計算が行われている<sup>8)</sup>。

そこで,  $\overline{u_3 \theta}$  を算出する際  $\overline{\theta^2}$  を起源とする項 (式(38)では  $C_{B\theta 3} G_k/\varepsilon$  の項がこれに相当する) が安定時過剰評価される恐れがあり, その場合には  $f_{B\theta}$  が  $\overline{u_3 \theta}$  に対して過減衰効果を持つ。よってこれを避けるため  $C_{B\theta 3}$  を小さめに与える。

以上により  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  の定数を得た。

### 2.4. $f_{BV}$ , $f_{B\theta}$ の挙動

(1)  $P_k/\varepsilon$  に対する挙動 (温度成層がきわめて小さい場合)

Rodi らは実験により  $P_k/\varepsilon$  と  $C_\mu$  の関係を調べ<sup>9)</sup>, また Viollet は ASM より  $P_k/\varepsilon$  と  $C_\mu$  の関係式を導出した<sup>10)</sup>。Viollet により導出された式は以下のとおり。

$$C_\mu = \frac{2}{3} (1 - C_2) \frac{C_1 - 1 + C_2 \frac{P_k}{\varepsilon}}{(C_1 - 1 + \frac{P_k}{\varepsilon})^2} \quad (43)$$

図1で  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  の挙動をこれら2つのモデルと比較表示する。  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  は,  $G_k = 0$  の状態を表示する (式(39), (40))。

(2)  $G_k/\varepsilon$  に対する挙動

牛島らは安定成層水平剪断流を対象として, 乱流統計量と局所リチャードソン数  $Ri$  の関係を調べた実験結果に基づき, これに合うようなモデルを提案した。そこで,  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  モデルの安定成層度に対する挙動を調べるために, 牛

図1  $P_k/\varepsilon$  による  $C_\mu$  に対する補正值

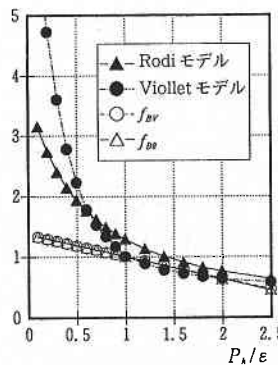


図1  $P_k/\varepsilon$  による  $C_\mu$  に対する補正

図2  $G_k/\varepsilon$  による  $C_\mu$  に対する補正值

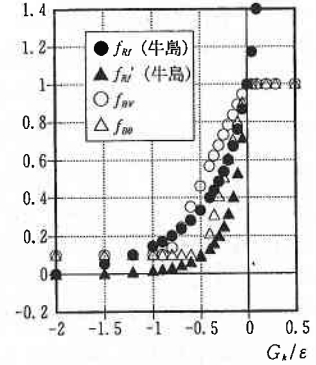


図2  $G_k/\varepsilon$  による  $C_\mu$  に対する補正

島モデルとの比較を行う(図2)。ここでは比較のため、牛島モデルでパラメータとして利用している局所リチャードソン数  $Ri$  をフラックスリチャードソン数  $Rf$  に置き換えた。牛島モデルは以下のとおり。

$$-\overline{u_1 u_3} = C_\mu f_{Rf} \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{U_3}}{\partial x_1} \right) \quad (44)$$

$$-\overline{u_3 \theta} = \frac{C_\mu}{\sigma_\theta} f_{Rf} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} \quad (45)$$

$$f_{Rf} = \frac{1-1.5Rf}{1+1.5Rf} \quad (46) \quad f_{Rf}' = \frac{1-1.5Rf}{1+1.5Rf} \frac{1-1.5Rf}{1+2.6Rf} \quad (47)$$

局所平衡  $P_k + G_k \doteq \varepsilon$  を仮定すると、 $f_{Rf}$ 、 $f_{Rf}'$  は以下のように変形できる。

$$f_{Rf} = \frac{1+1.5G_k/P_k}{1-1.5G_k/P_k} = \frac{\varepsilon - G_k + 1.5G_k}{\varepsilon - G_k - 1.5G_k} = \frac{1+0.5G_k/\varepsilon}{1-2.5G_k/\varepsilon} \quad (48)$$

$$f_{Rf}' = \frac{(1+0.5G_k/\varepsilon)^2}{(1-2.5G_k/\varepsilon) \cdot (1-3.6G_k/\varepsilon)} \quad (49)$$

$f_{BV}$ 、 $f_{B\theta}$  でも同様に局所平衡  $P_k + G_k \doteq \varepsilon$  を仮定する。

$$f_{BV} \doteq C_{BV1} - C_{BV2} \frac{\varepsilon - G_k}{\varepsilon} + C_{BV3} \frac{G_k}{\varepsilon} = 1.0 - (C_{BV2} + C_{BV3}) \frac{G_k}{\varepsilon} \quad (50)$$

$$f_{B\theta} \doteq 1.0 - (C_{B\theta 2} + C_{B\theta 3}) \frac{G_k}{\varepsilon} \quad (51)$$

図1、2より、実験等に基づいて得られた他のモデルと比較して  $f_{BV}$ 、 $f_{B\theta}$  の妥当性が示されている。

### 3. 壁から離れた領域に対する低 Re 数型 $k$ - $\varepsilon$ モデルの提案

温度成層により乱れが減衰し流れが層流化する場合に対し新たな低 Re 数型モデルを導出する。

Jones-Launder 以来、主として壁面近傍領域 (near-wall region) でのエコー効果や層流化現象を対象とした低 Re 数モデルに関しては多くの報告があるが、壁面の影響を直接受けない領域 (non-near-wall region) で乱れが減衰し層流化した流れを、明確に対象とする低 Re 数モデルに関する研究は少ない。これに対し筆者らは Abe-Nagano モデル<sup>13)</sup> を基に、(54)式に示すような near-wall region はもちろん、non-near-wall region に対する低 Re 数効果も明示的に組み込んだ  $f_\mu$  のモデルを提案し、各種 Re 数の2次元等温短形キャピティ流れに適用しよい結果を得た<sup>1)</sup>。

#### 3.1. $\nu_t$ に付加する層流化のモデル関数

モデル関数  $f_\mu$  を以下のように与える。

$$f_\mu = \frac{\left\{ 1 - \exp\left(-\frac{y^*}{14}\right) \right\}}{(A)} \frac{\left\{ 1 - \exp\left(-\frac{Rt^{3/4}}{2.4}\right) \right\}}{(B)} \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{1.5}{Rt^{5/4}}\right) \right\}}{(C)} \quad (52)$$

(A); 遷移域から対数域にかけての  $\nu_t$  に対する  $y^*$  による Van Driest 型減衰関数 (壁近傍領域の減衰関数)。

ただし、 $y^* = u_e y / \nu = y / \eta$ 。ここで  $u_e = (\nu / \varepsilon)^{1/4}$ ; Kolmogorov の速度スケール、 $\eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$ ; Kolmogorov の長さスケール。

(B); non-near-wall region (壁から離れた領域) の  $\nu_t$  に対する乱流レイノルズ数による減衰関数 (ただし壁近傍においても機能し、壁近傍で(A)項と同じ働き)。ここで、 $Rt = k^2 / (\nu \varepsilon) = l / \eta$ 、 $l = k^{3/2} / \varepsilon$ 。

(C); 壁近傍の乱流特性 (漸近挙動) を満たすための項。

壁近傍 ( $y \rightarrow 0$ ) では、 $u \propto y$ 、 $v \propto y^2$  となることから、乱れの漸近挙動として  $k \propto y^2$ 、 $\varepsilon \propto y^0$ 、 $-\overline{u v} \propto y^3$ 、 $\nu_t \propto y^3$  が成立する。そこで  $f_\mu \propto y^{-1}$  を満たすことが必要となる。本モデル (52式) はこの壁近傍の漸近挙動を満たす。

#### 3.2. $\varepsilon$ 方程式中のモデル関数

$f_2$  は乱れの漸近挙動および格子背後乱流の減衰挙動を考慮した Abe-Nagano モデルとし、以下のように与えた。

$$f_2 = \frac{\left\{ 1 - \exp\left(-\frac{y^*}{3.1}\right) \right\}^2}{(D)} \frac{\left[ 1 - 0.3 \exp\left\{ -\left(\frac{Rt}{6.5}\right) \right\} \right]^2}{(E)} \quad (53)$$

(D); 壁近傍の乱流特性 (漸近挙動) を満たすための項 ( $y \rightarrow 0$  のとき  $f_2 \propto y^2$ )。

(E); 格子背後乱流の減衰挙動を満たす項。

本報では  $f_{BV}$ 、 $f_{B\theta}$  および(54)式の  $f_\mu$  等の提案をとりまとめて、改良型  $k$ - $\varepsilon$  モデルと呼ぶ。

### 4. 開水路の高 Re 数安定成層剪断流解析

#### 4.1. 解析対象

図3に示す2次元開水路の安定成層剪断流を対象とする。牛島ら<sup>4)</sup>の実験により計算に必要な境界条件が与えられている。実験の詳細は文4参照。

#### 4.2. 境界条件

- ①流入境界; 流速、温度、乱流エネルギー  $k$ 、および散逸  $\varepsilon$  は実験値を用いた。温水側の平均流速  $\overline{U}_h = 0.072\text{m/s}$ 、平均温度  $\overline{\theta}_h = 29.2^\circ\text{C}$ 。冷水側では平均流速  $\overline{U}_c = 0.118\text{m/s}$ 、平均温度  $\overline{\theta}_c = 14.5^\circ\text{C}$ 。この場合、勾配リチャードソン数  $Ri$  は、 $Ri = -g\beta(\overline{\theta}_h - \overline{\theta}_c)h / (\overline{U}_h - \overline{U}_c) = 0.22$ 。
- ②流出境界; 自由流出条件。
- ③水面境界; 水面のゆらぎはきわめて小さく静止している<sup>4)</sup>として free slip。
- ④底面壁境界; 一般化対数則<sup>14)</sup>を用いた。

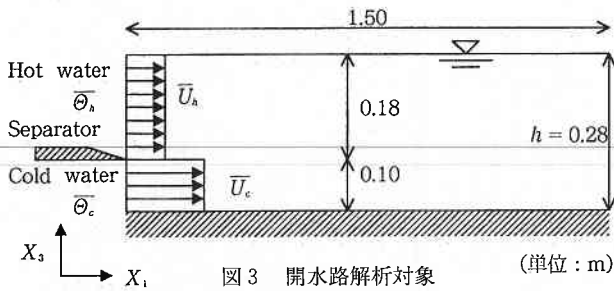


図3 開水路解析対象 (単位: m)

4.3. 基礎式・計算条件

$$(k\text{-eq}) \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} + P_k + G_k - \epsilon \quad (54)$$

$$(\epsilon\text{-eq}) \frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right\} + \frac{\epsilon}{k} (C_{\epsilon 1} f_1 P_k + C_{\epsilon 3} f_1 G_k - C_{\epsilon 2} f_2 \epsilon) \quad (55)$$

$$\nu_t = C_\mu f_u \frac{k^2}{\epsilon} \quad (56)$$

$\overline{u_i u_j}$ ,  $\overline{u_i \theta}$  のモデリングおよび  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  は式(3)~(8), (21)~(24), (38)による。負拡散を防ぐため  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta} \geq 0.1$  を課した。ここで、 $f_u = f_1 = f_2 = 1.0$ ,  $C_{\epsilon 1} = C_{\epsilon 3} = 1.5$ ,  $C_{\epsilon 2} = 1.9$ ,  $C_\mu = 0.09$ ,  $\sigma_k = 1.4$ ,  $\sigma_\epsilon = 1.4$ 。  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  と同様に  $k$  および  $\epsilon$  の乱流拡散項に対する浮力ダンピング  $f_{Bk}$ ,  $f_{B\epsilon}$  も考えられるが、今回はこれを考慮していない。

ここで提案した改良型  $k\text{-}\epsilon$  モデル (高 Re タイプ) によ

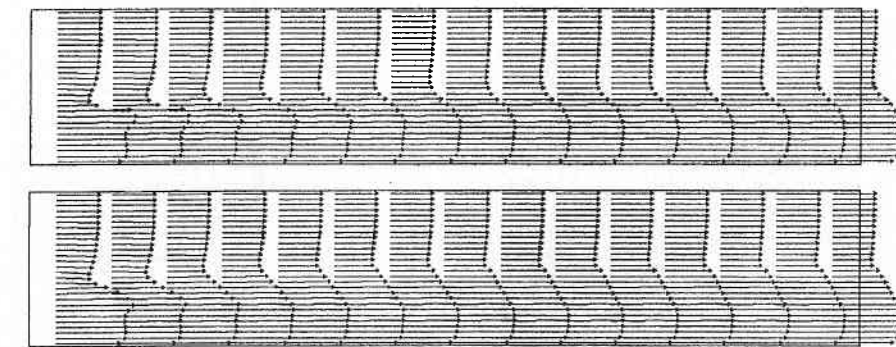


図4 流速ベクトル(上:  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  を加えた改良型  $k\text{-}\epsilon$  モデル, 下: 標準  $k\text{-}\epsilon$  モデル)

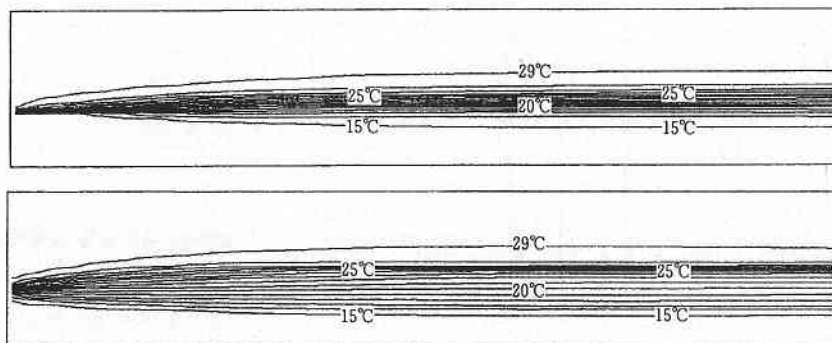


図5 温度分布(上:  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  を加えた改良型  $k\text{-}\epsilon$  モデル, 下: 標準  $k\text{-}\epsilon$  モデル)

る解析結果を標準的な高 Re 数型  $k\text{-}\epsilon$  モデル (以下標準モデルと呼ぶ<sup>14)</sup>によるものと比較する。  $X_1$ ,  $X_3$  座標系は図3参照。  $(75+2)(X_1) \times (28+2)(X_3) = 2,310$ メッシュ。いずれの方向も均等分割した。直交メッシュを使用。移流項は QUICK スキームを利用。SIMPLE 法を使用。計算において諸量は実スケールで与えている。

4.4. 解析結果

流速ベクトルの結果を図4に、温度分布の結果を図5に、  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  を加えた改良型  $k\text{-}\epsilon$  モデルと標準モデルを比較して示す。下流に行くに従って上層の温水と下層の冷水が徐々に混合してゆき、滑らかな分布となってゆく。改良型モデルの方が標準モデルより混合層が薄い。

流入面より  $X_1$  方向に1.0mの位置での平均流速分布を図6に、平均温度分布を図7に示す。標準モデルでは安定成層による鉛直方向の乱流輸送の減衰効果を充分には表現しえないが、鉛直方向に係わる  $\overline{u_i u_j}$ ,  $\overline{u_i \theta}$  に対し、  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  を乗じた改良型モデルは、運動量および熱の混合層の厚さが小さくなり、実験により近い分布となる<sup>註)</sup>。

5. 閉鎖空間内の低 Re 数安定成層流解析

5.1. 解析対象

図8に示す2次元閉鎖空間内の温度成層気流。実験は Blay ら<sup>15), 16)</sup>による。実験の詳細は文15参照。このタイプの流れ場では最も精度が高い実験であると考えられる。

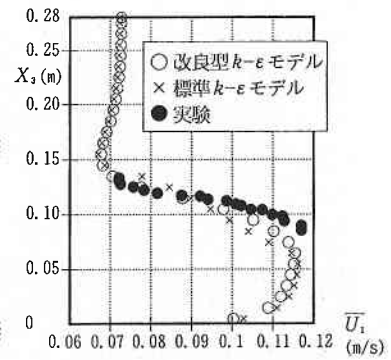


図6  $\overline{U_1}$  の分布の比較

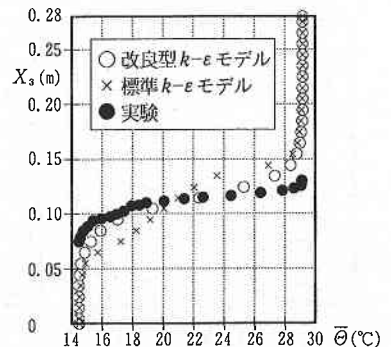


図7  $\overline{\theta}$  の分布の比較

5.2. 境界条件 (図8参照)

①流入境界; 速度, 温度,  $k_{in}$  は実験値を与え,  $\epsilon_{in}$  は  $\epsilon_{in} = C_{\mu} k_{in}^{3/2} / (0.5 l_{in})$  として与えた. ②流出境界条件; 速度は実験値, その他 free slip. ③壁面境界条件; 速度,  $k_{wall}$  は non-slip. 温度は実験値を与え,  $\epsilon_{wall}$  は  $\epsilon_{wall} = 2\nu(\partial k^{1/2}/\partial y)^2$  を与えた.

5.3. 計算条件

基礎式は(54)~(56)式. ただし,  $\nu_i$  にかかるモデル関数  $f_{\mu}$  は(52)式で,  $\epsilon$  方程式中の  $f_2$  は(53)式で与える ( $f_1=1$ ). レイノルズストレス, 乱流熱フラックス算出に際しては, 式(3)~(8), (21)~(24), (38)のように  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  を乗じる. 開水路解析と同様に,  $k$ ,  $\epsilon$  輸送方程式では浮力ダンピングを課していない. 負拡散を防ぐため  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta} \geq 0.1$  を課した.  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  を加えた改良型低 Re モデルによる解析結果を,  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  を加えない標準型低 Re モデル (52)~(56)式) による結果と比較する.  $X_1, X_3$  座標系は図8参照.  $(100+2)(X_1) \times (100+2)(X_3) = 10,404$  メッシュ. 直交メッシュを使用. 移流項は運動方程式で QUICK, スカラー方程式で一次風上スキームを利用. SIMPLE 法を使用. 計算において諸量は実スケールで与えている.

5.4. 解析結果

$f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  を加えた改良型低 Re モデル (a), 加えない標準型低 Re モデル (b) のそれぞれの風速ベクトルの結果を図9に, 改良型モデルによる温度分布の結果を図10に, 減衰関数  $f_{BV}$  の分布を図11に示す.

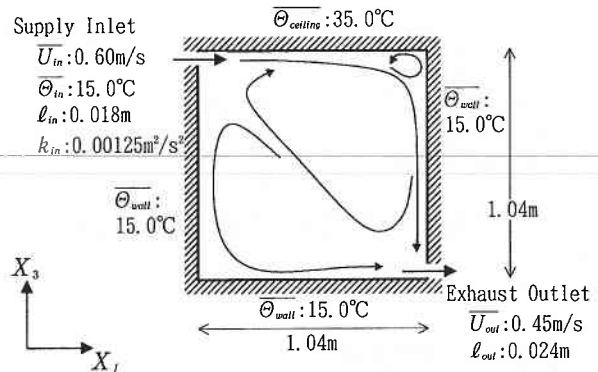


図8 2次元閉鎖空間解析対象

①標準型モデルの場合, 右下部から左上部に至る対角線上を上昇する気流が蛇行し, 不自然な流れ場を形成するが, 改良型の場合まっすぐに上昇する. ②右上部の主渦の中心位置が  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  の導入により大きく変化している. ③  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  の導入によって左下部の領域は層流化する (図11も参照). ④いずれの流れ場でも右上隅に二次渦が生じ, ⑤また床面近くに逆流域が生じ, 左下隅から吸込口に向う流れは上部に湾曲する. ⑥温度分布 (図10, 14, 15) は両モデル間で大きな差異は見られない.

この流れ場に対して T. Craft, D. Laurence は DSM による解析を試みているが (図省略)<sup>17)</sup>, これらの結果と比較してみても, 改良型モデルは標準型に比べ, より妥当な解を与えている.

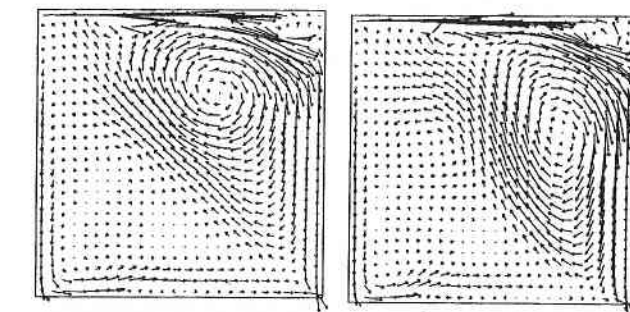


図9 風速ベクトル図

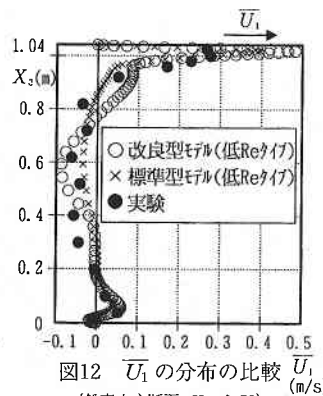


図12  $\bar{U}_1$  の分布の比較 (鉛直中心断面;  $X_1=0.52$ )

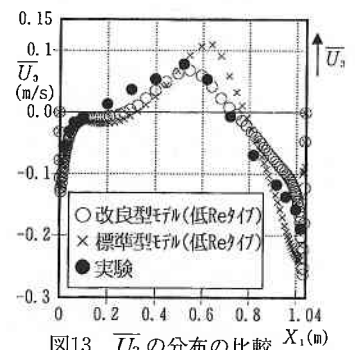


図13  $\bar{U}_3$  の分布の比較 (水平中心断面;  $X_3=0.52$ )

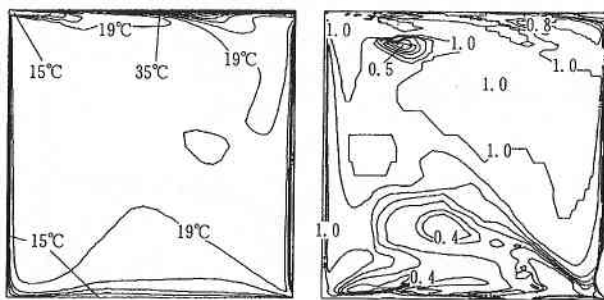


図10 温度分布図 (改良型モデル (低 Re タイプ))

図11  $f_{BV}$  の分布 (改良型モデル (低 Re タイプ))

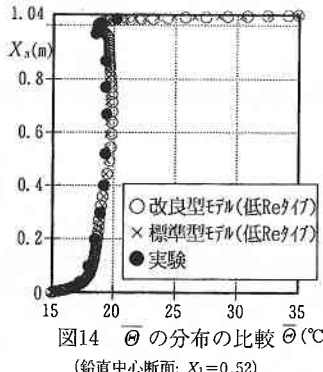


図14  $\bar{\theta}$  の分布の比較 (鉛直中心断面;  $X_1=0.52$ )

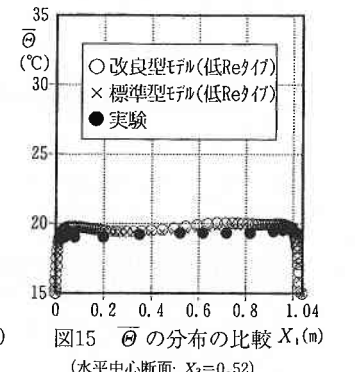


図15  $\bar{\theta}$  の分布の比較 (水平中心断面;  $X_3=0.52$ )

鉛直中心断面 ( $X_1=0.52\text{m}$ ) での  $\overline{U_1}$  の分布を図12に、水平中心断面 ( $X_3=0.52\text{m}$ ) での  $\overline{U_3}$  の分布を図13に示す。 $\overline{U_1}$  の分布での優劣は判断し兼ねるが、 $\overline{U_3}$  の分布は  $f_{BV}$ ,  $f_{B\theta}$  を加えた改良型モデルの方が明らかに実験をよく再現している。鉛直中心断面 ( $X_1=0.52\text{m}$ ) での  $\overline{\theta}$  の分布を図14に、水平中心断面 ( $X_3=0.52\text{m}$ ) での  $\overline{\theta}$  の分布を図15に示す。実験とよく一致した  $\overline{\theta}$  の分布が得られている。

6. ま と め

①温度成層により鉛直方向の乱流輸送が減衰する効果を組み込んだ新しい改良型  $k-\varepsilon$  モデルを提案し、その性能を検証した。②改良型モデルは温度成層により流れが層流化する現象を含め、壁面の影響を直接受けない領域での層流化効果に対しても適用可能である。③今回得られたモデルは、安定成層による鉛直方向の運動量及び熱輸送の減衰効果を再現することができた。④また non-near-wall and near-wall type の低 Re 数型  $k-\varepsilon$  モデルと組み合わせることにより、安定成層により流れが層流化する場合にも十分対応することを確認した。

謝 辞

本モデルの開発において長野靖尚教授 (名工大), Dr. D. Laurence (EDF, フランス電力庁) に有益な助言を頂きました。本報で使用した剪断流の実験データは田中伸和博士, 牛島省博士 (電中研), 閉鎖空間内流の実験データは Dr. D. Blay (Poitiers 大学, フランス) に頂きました。ここに記して謝意を表します。(1993年12月7日受理)

註

牛島ら<sup>4)</sup>, 山川<sup>5)</sup>は、標準  $k-\varepsilon$  モデルを改良し、安定成層場に対応させた非等方モデルを用い、今回解析した開水路と同じ対象を解き、よい結果を得ている。

<記号>  $\overline{U_i}$ :  $i$  方向平均速度 ( $i=1, 2$ : 水平方向,  $i=3$ : 鉛直上向き方向)  $u_i$ :  $i$  方向速度変動  $-\overline{u_i u_j}$ : レイノルズストレス  $\overline{\theta}$ : 平均温度  $\theta$ : 温度変動  $-\overline{u_i \theta}$ : 乱流熱フラックス  $\overline{\theta^2}$ : 温度変動強度  $\nu_t$ : 渦粘性係数  $\nu$ : 分子粘性  $k$ : 乱流エネルギー  $\varepsilon$ :  $k$  の散逸率  $P_k$ :  $k$  の生産項 ( $-\overline{u_i u_j} \partial \overline{U_i} / \partial x_j$ )  $G_k$ :  $k$  の浮力生産項 ( $-g_i \beta \overline{u_i \theta}$ )  $P_{ij}$ :  $\overline{u_i u_j}$  の生産項  $G_{ij}$ :  $\overline{u_i u_j}$  の浮力生産項  $\Phi_{ij}$ : 圧力-歪相関項  $D_{ij}$ :  $\overline{u_i u_j}$  の拡散項  $\varepsilon_{ij}$ :  $\overline{u_i u_j}$  の消散項  $P_{i\theta(1)}$ ,  $P_{i\theta(2)}$ :  $\overline{u_i \theta}$  の生産項  $G_{i\theta}$ :  $\overline{u_i \theta}$  の浮力生産項  $\Phi_{i\theta}$ : 圧力-温度勾配相関項  $D_{i\theta}$ :  $\overline{u_i \theta}$  の拡散項  $P_\theta$ :  $\overline{\theta^2}$  の生産項

$D_\theta$ :  $\overline{\theta^2}$  の拡散項  $2\varepsilon_\theta$ :  $\overline{\theta^2}$  の消散項  $Rt$ : 乱流レイノルズ数 ( $k^2/\nu \cdot \varepsilon$ )  $f_{BV}$ :  $\overline{u_i u_j}$  に対する温度成層による減衰関数  $f_{B\theta}$ :  $\overline{u_i \theta}$  に対する温度成層による減衰関数  $f_\mu$ : 過粘性係数に対する低 Re 数効果を表現するモデル関数  $f_1, f_2$ :  $\varepsilon$  方程式中のモデル関数  $u_\tau$ : コルモゴロフの速度スケール ( $(\nu\varepsilon)^{1/4}$ )  $\eta$ : コルモゴロフの長さスケール ( $\nu^3/\varepsilon^{1/4}$ )  $l$ : 乱流長さスケール ( $k^{3/2}/\varepsilon$ )  $y$ : 壁面までの距離  $y^+$ : 壁座標 ( $u^* \cdot y/\nu$ )  $u^*$ : 壁面摩擦速度  $g_i$ :  $i$  方向重力加速度 ( $g_3=-9.8$ )  $\beta$ : 体膨張率  $\delta_{ij}$ : クロネッカのデルタ

<数値定数> (ASM, WET の定数は文6, 7による)  $C_\mu=0.09$   $C_1=1.8$   $C_2=0.6$   $C'=0.22$   $C_{BV1}=1.36$   $C_{BV2}=0.36$   $C_{BV3}=0.72$   $C_{i\theta1}=3.0$   $C_{i\theta2}=0.5$   $C_{i\theta3}=0.3$   $C_{\theta1}=0.25$   $C_{\theta2}=0.25$   $C_{\theta3}=0.25$   $C_{B\theta1}=1.37$   $C_{B\theta2}=0.37$   $C_{B\theta3}=1.6$   $C_{\varepsilon1}=1.5$   $C_{\varepsilon2}=1.9$   $C_{\varepsilon3}=1.5$   $\sigma_\theta=0.9$   $\sigma_k=1.4$   $\sigma_\varepsilon=1.4$

参 考 文 献

- 1) 村上・加藤・近本, 1993, 建築学会大会講演梗概集, pp. 737-738
- 2) Launder, B.E., 1975, J. Fluid Mech., vol. 67, part 3, pp. 569-581
- 3) 相良, 1981, 建築学会論報305号, pp. 88-96
- 4) 牛島・田中・守屋, 1988, 第32回水理講演会論文集, pp. 655-660
- 5) 山川, 1991, 博士論文, 東京大学
- 6) Launder, B.E., 1983, UMIST Rep. No. TFD/82/4
- 7) Launder, B.E., 1988, J. of Heat Transfer, Vol. 110, pp. 1112-1128
- 8) 村上・加藤・永野, 1990, 生産研究43-1, pp. 57-60
- 9) Hossain, M.S. and Rodi, W., 1982, Turbulent Buoyant Jets and Plumes, HMT-Series, Vol. 6 Pergamon Press
- 10) Viollet, P.L., 1987, Nuclear Engg. and Design 99, pp. 365-377
- 11) Jones, W.P. and Launder, B.E., 1972, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp. 301-314
- 12) Patel, V.C., Rodi, W. and Scheuerer, G., 1984, AIAA J., Vol. 23, No. 9, pp. 1308-1319
- 13) Abe, K., Nagano, Y. and Kondo, T., 1992, J. of Wind Engg. No. 52 (1st Int. Symp. of Comp. Wind Engg., Tokyo), pp. 213-218
- 14) Launder, B.E. and Spalding, D.B., 1974, Comp. Methods in Appl. Mech. and Engg. 3, pp. 269-289
- 15) Blay, D., Mergui, S. and Niculae, C., 1992, HTD-Vol. 213, Fundamentals of Mixed Convection, ASME
- 16) Blay, D. (Poitiers 大学, フランス), 1993, 私信
- 17) Laurence, D. (EDF, フランス電力庁) and Craft, T. (UMIST, 英国), 1993, 私信