

乱流中の構造と擬スカラー不変量

Relationship between Structures in Turbulence and Pseudoscalar Invariants

横 井 喜 充*・吉 澤 徹*

Nobumitsu YOKOI and Akira YOSHIKAWA

空間的対称性の破れを伴う乱流中の構造およびその維持機構と擬スカラー不変量との関係を考察する。構造の存在は空間的対称性の破れを意味する。極性ベクトルと軸性ベクトルとの内積で定義される擬スカラー量ヘリシティは対称性の破れを表すことができるとともに乱流のカスケード過程の抑制具合を表す尺度ともなりうることから、構造をもつ乱流の研究においてはヘリシティという概念が重要であることが示される。乱流中の秩序構造の維持に関連して擬スカラー量が重要な役割を担ういくつかの典型的現象が電気伝導性のない中性乱流とプラズマ乱流の場合のそれぞれについて議論される。

1. は じ め に

乱流のひとつの特徴は、そのエネルギー・スペクトルが低波数（大きな空間スケール）領域から高波数（小さな空間スケール）領域まできわめて広い範囲にわたって連続的に広がっていることにある。このとき乱流の運動を支配する方程式が非線型であることからくる非線型の混合過程が本質的役割を果たす。平均流に代表される大きなスケールにおいて流体に注入された運動エネルギーは、分子運動に代表される最も小さなスケールの運動によって熱エネルギーとして散逸する。言い換えれば、最も小さなスケールにエネルギーを散逸させる機構すなわちエネルギーを引く「ポンプ」が存在するために、大きなスケールの運動がもつエネルギーはより小さなスケールへと総体的に流れていかざるをえないのである。この性質はエネルギー・カスケード過程とよばれる。そして小さなスケールの揺らぎによって惹き起こされる運動量やスカラー（たとえば温度）輸送の増大は小さなスケールへとエネルギーを運ぶ過程で大きなスケールに存在する構造を壊す。この性質は異常輸送あるいは乱流輸送という概念で理解されている。

しかし現実の乱流では大きなスケールの運動にしばしば秩序だった構造がみられる。秩序構造が存在するということは、それを維持する何らかの機構が乱流中に存在するということを示唆している。つまりエネルギーのカスケード過程が何らかの機構によって抑制されたり弱められたりしているわけだが、その機構についてはよく理解されていない

いのが現状である。

ここではまず、乱流中の秩序構造と空間対称性の破れとの関係について論じる。次に、擬スカラーの概念がそのような対称性の破れを記述するのに役立つ道具であり、しかも乱流抑制機構と結びついていることを示す。それを踏まえて、電気伝導性をもたない中性乱流と電磁流体力学的（MHD）乱流のそれぞれについて擬スカラー量が乱流中の構造の維持にどのように関わっているのかをみていく。

2. 構造と空間対称性の破れ

考えている物理系に何らかの対称性が存在するとそれに対応して保存則がひとつ成立する。よく知られているように並進、回転、時間についての対称性、つまり空間の一様性、等方性、および時間の一様性は、それぞれ運動量、角運動量、エネルギーの保存を導く。この意味で、対称性を考慮することで方程式の扱いはきわめて容易になる。一方、対称性の破れは強磁性体のスピンの例にみられるように長距離相関が存在することつまり何らかの秩序構造が存在することを意味する。

乱流の場合高い対称性は乱流統計量の（空間的）一様等方性として特徴づけられる。これは乱流場が任意の平行移動に対して不変（一様）でなおかつ任意の方向の軸のまわりの回転に対して不変（等方）であることである。乱流のようにゆらぎの効果が本質的な現象にあって一様等方であるということは流れ場が一様に乱れていることすなわち小さなスケールに構造が存在しないことを意味する。このとき乱流による異常輸送は、外力や境界など空間的特殊性を維持する要素がなければ、大きなスケールでも異方性など

*東京大学生産技術研究所 第1部

の空間的特殊性を壊して流れ場を一様化・等方化させるであろう。たとえばチャネル流を層流と乱流の場合で比較すると、大部分の領域で乱流のときに速度プロファイルがより平坦になるのが観測される。これは乱流粘性の効果で大きなスケールの流れが一様化したものである。

乱流を記述する方程式は非線型でありその数学的取り扱いにはきわめて困難である。したがって、非線型の混合過程の数学的取り扱いを簡略化するためにも乱流統計量に一様等方性を仮定することは正当化される。しかし実際の乱流は一様等方からはほど遠い。特に乱流の非一様性および非等方性はエネルギーを含む大きなスケールにおいてより顕著となる。このことは大きなスケールでの構造の存在自体がエネルギーのカスケード過程に何らかの影響を与え構造の維持に寄与していることを示唆する。秩序構造の存在は対称性の破れを意味するから、何らかの形でこの対称性の破れを取り込むことが重要になる。

しかし乱流中の秩序構造というときにそれで何をさすのかは議論の分かれるところである¹⁾。たとえば電導性のない中性流体の乱流でいえば、平均流のスケールに存在する旋回流やクロス流などの比較的大きな構造から空間的・時間的にきわめて小さなスケールでみられる「ストリーク」構造や「ヘアピン」構造まで乱流中の構造にはさまざまなレベルがある。また電磁流体力学的な (MHD) 乱流中の大規模磁場はそれ自体が構造と言える。ここでは比較的大きな渦構造と磁場構造 (特に流れに沿う渦度と磁場) に焦点を当てる。流れに沿って渦度と磁場が存在するということは、局所流体要素から見れば流れに順方向に動くのと逆方向に動くので差異が存在するということである。以下、その効果をどのように取り込むかを議論していく。

3. 擬スカラー量

反転対称性の破れ

座標系の反転に対して符号が変わるスカラーを擬スカラーとよぶ。いまある物理系が反転対称性をもつと仮定すると対称性の定義から元の座標系と反転した座標系ですべての統計量は等しい値をとる。一方擬スカラー量はその定義から座標の反転に際してその符号を変える。したがって反転対称な系では擬スカラー統計量は恒等的にゼロでなければならない。このことから擬スカラー統計量は系の反転対称性からの破れを示す量であることが期待される。しかし、ある擬スカラー量がゼロであるからといってその物理系が反転対称であるとは限らない点に注意が必要である。なぜならその物理系で定義される擬スカラー量はひとつではなく他の擬スカラー量はゼロとは限らないからである。

さて任意のベクトル \mathbf{M} とその回転 $\nabla \times \mathbf{M}$ の内積 $\mathbf{M} \cdot (\nabla \times \mathbf{M})$ で定義される量を (一般) ヘリシティ密度という。通常、ヘリシティとはヘリシティ密度を体積にわ

たって積分した量のことであるが、以下では簡単のためヘリシティ密度のこともヘリシティと呼ぶ。さらに後出のクロス・ヘリシティのように、自身の回転微分との内積ではない量も広くヘリシティとよぶ。ヘリシティは極性ベクトルと軸性ベクトルの内積であることからわかるように擬スカラー量である。

カスケード抑制の尺度

非圧縮性中性流体の渦度方程式と磁場の誘導方程式はその形式的類似性で知られている。速度場を \mathbf{u} とすると

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \phi) + \eta \Delta \phi, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \phi = 0 \quad (2)$$

の (ϕ, η) に (ω, ν) を代入したものが渦度方程式、 (\mathbf{b}, λ) を代入したものが磁場の誘導方程式である。ここで ω は

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad (3)$$

で定義される渦度、 ν は粘性、 \mathbf{b} は (アルペーン速度を単位として測った) 磁場、 λ は磁気拡散率である。

すでに述べたように乱流を特徴づけるのは小さなスケールでのエネルギー散逸と非線型の混合過程によるエネルギーのカスケードであった。方程式 (1) をみると、混合過程は右辺第 1 項で代表されることがわかる。このことは、もし仮に第 1 項がゼロであったとすると (1) 式が

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \eta \Delta \phi \quad (4)$$

のようになって、量 ϕ は分子的な拡散または粘性によって拡散・散逸していきただけとなり ϕ の構造が長く残ることになってしまうが、これは乱流の特徴である異常拡散現象とは似ても似つかない現象であることからわかる。

さて任意のベクトル \mathbf{u} と ϕ の間に

$$(\mathbf{u} \cdot \phi)^2 + (\mathbf{u} \times \phi)^2 = |\mathbf{u}|^2 |\phi|^2 \quad (5)$$

という関係式が成り立つから、量 $\mathbf{u} \cdot \phi$ の大きさと量 $\mathbf{u} \times \phi$ の大きさの間には相反する関係がある。このことから量 $\mathbf{u} \cdot \phi$ は量 $\mathbf{u} \times \phi$ に代表される混合過程を抑制するひとつの尺度となりうるのではないかと期待できる。もちろん実際の混合過程はさまざまな大きさあるいはスケールの運動のカップリングによって生じるのであって上に挙げた $\mathbf{u} \times \phi$ など一点物理量の大小だけで論ずることはできない。しかし乱流のように物理量がカスケードすることにその本質があるような場合は大きなスケールの運動と小さなスケール

の運動に連関があるから、その意味で上記の一点物理量による粗いイメージもそれなりの意義があると考えてよいであろう。

したがって、中性流体の渦度方程式中では ϕ に ω を代入した $\mathbf{u} \cdot \omega$ に、MHD 流体の磁場方程式中では ϕ に \mathbf{b} を代入した $\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}$ に、それぞれ乱流のカスケードを抑制する程度を示す尺度としての役割を期待することができる。

方程式の不変量

さて (1) の形で表せる方程式は $\eta=0$ のとき保存量を持っている。このことをみるために二つの方程式からなる系

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \psi), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \phi) \quad (7)$$

を考える。ここで ψ と ϕ は

$$\psi = \nabla \times \xi, \quad \phi = \nabla \times \xi \quad (8)$$

で表される変数である。(8) の関係に注意するとたとえば ξ の従う方程式は φ を適当なスカラー函数として

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \mathbf{u} \times (\nabla \times \xi) - \nabla \varphi \quad (9)$$

となる。さて任意の \mathbf{u} に対して

$$I_{\psi\phi} = \int_V \xi \cdot \phi dV \quad (10)$$

で定義される量 $I_{\psi\phi}$ を考える。(6) - (9) に注意すると

$$\begin{aligned} \frac{DI_{\psi\phi}}{Dt} &= \int_V \frac{D}{Dt} (\xi \cdot \phi) dV = \int_V \nabla \cdot \{ \phi (\mathbf{u} \cdot \xi - \varphi) \} dV \\ &= \int_S \phi \cdot \mathbf{n} (\mathbf{u} \cdot \xi - \varphi) dS = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

であるから、量 $I_{\psi\phi}$ は方程式系 (6) - (7) の擬スカラー不変量であることがわかる。ただしここで表面 S 上の単位法線ベクトルを \mathbf{n} とし、表面 S 上で

$$\phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (12)$$

であることを用いている。また $D/Dt (\equiv \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla)$ はラグランジェ微分である。 ψ と ϕ に選ぶ量の組み合わせによって次のような擬スカラー不変量が考えられる；

磁気ヘリシティ

$$\psi = \phi = \mathbf{b}; \quad I_{bb} = \int_V \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} dV, \quad (13)$$

運動ヘリシティ

$$\psi = \phi = \omega; \quad I_{\omega\omega} = \int_V \mathbf{u} \cdot \omega dV, \quad (14)$$

クロス・ヘリシティ

$$\psi = \omega, \quad \phi = \mathbf{b}; \quad I_{\omega b} = \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV. \quad (15)$$

上の三つのヘリシティのうちクロス・ヘリシティについては注意が必要である。MHD 流体の速度場方程式は回転型で書くと

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \omega - \nabla \left(p + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \mathbf{j} \times \mathbf{b} + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (16)$$

であり、右辺第 3 項のローレンツ力 $\mathbf{j} \times \mathbf{b}$ が存在するため (9) 式の形で表すことができない。しかしローレンツ力 $\mathbf{j} \times \mathbf{b}$ は磁場 \mathbf{b} に対して常に垂直方向にしかはたらないため、 ϕ として磁場 \mathbf{b} を選ぶかぎりには (11) 式にローレンツ力からの寄与はないのである。

磁気ヘリシティはベクトル・ポテンシャルのゲージ変換

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}_1 = \mathbf{a} + \nabla \chi \quad (17)$$

に対して

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} dV &= \int_V (\mathbf{a} + \nabla \chi) \cdot \mathbf{b} dV \\ &= \int_V \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} dV + \int_V \nabla \cdot (\chi \mathbf{b}) dV = \int_V \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} dV + \int_S \chi \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_V \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} dV \end{aligned} \quad (18)$$

となるので、ゲージ不変性をもつ。ただしここで境界表面で $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0$ という条件を用いている。

幾何学的意味

上に与えたヘリシティはそれぞれ \mathbf{a} と \mathbf{b} の相関、 \mathbf{u} と ω の相関、 \mathbf{u} と \mathbf{b} の相関という意味をもっている。前の二つは自分自身(の微分)との相関であるのに対して最後のものは別の物理量との相関である点異なる。このような意味とは別に、これらのヘリシティを幾何学的に解釈することができる。そしてヘリシティが不変量であることに対応して、幾何学的あるいはトポロジカルな不変性が存在する^{2), 3)}。この点につき以下で簡単に触れておく。

上にも述べたように、磁気ヘリシティと運動ヘリシティはベクトルとそのベクトルの回転微分との内積を取ったものであるという意味においてまったく等しい関係にある。そこでここでは運動ヘリシティ (14) を例にとって説明する。図 1(a) のように結びついたそれぞれ閉曲線 C_1 と C_2 に沿った体積 V_1 と V_2 で断面積が小さい二つの管を考え、他の

領域に渦度は存在しないとする。この幾何学的状況で(14)は

$$I_{\omega\omega} = \int_V \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV = \int_{V_1} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV_1 + \int_{V_2} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV_2 \quad (19)$$

となる。それぞれの管中の渦度 $\boldsymbol{\omega}$ の流束を Φ_1 と Φ_2 、閉曲線上の線素を ds_1 と ds_2 、表面での単位法線ベクトルを \mathbf{n}_1 と \mathbf{n}_2 などとすると

$$\begin{aligned} \int_{V_1} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV_1 &= \Phi_1 \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}_1 = \Phi_1 \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 \\ &= \Phi_1 \int_S \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 = \Phi_1 \Phi_2, \end{aligned} \quad (20)$$

同様に

$$\int_{V_2} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV_2 = \Phi_1 \Phi_2 \quad (21)$$

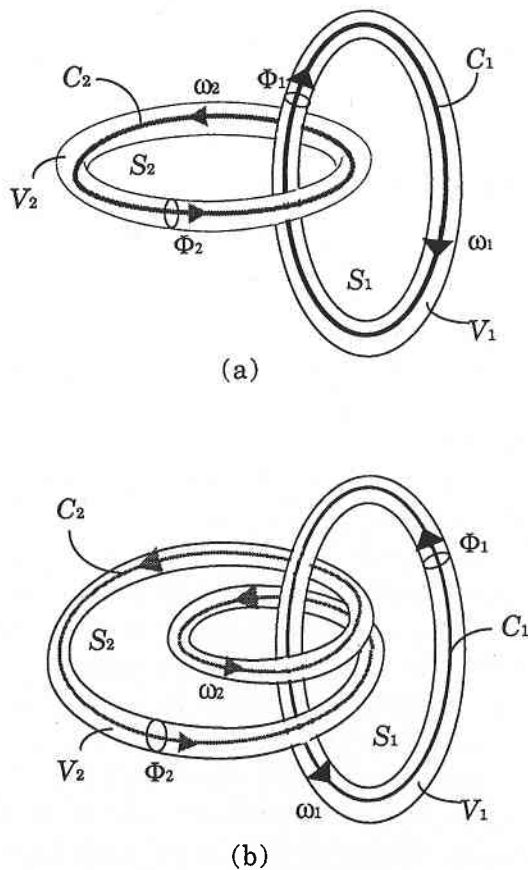


図1 運動ヘリシティの幾何イメージ
(a)最も単純幾何配位 結び目の数 $N=1$
(b)負のヘリシティ $N=2$

のように書き表せる。よって(19)式は

$$I_{\omega\omega} = \int_V \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV = 2\Phi_1 \Phi_2 \quad (22)$$

となる。一般に二本の管が互いに N 回交わる幾何学的状況では

$$I_{\omega\omega} = \int_V \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dV = 2N\Phi_1 \Phi_2 \quad (23)$$

と書き表せる。このことはヘリシティを渦管の交わる（クロスする）度合いあるいは渦流束の結び目の数という幾何学的な量として解釈できること、そしてこのとき流束 Φ_1 と Φ_2 を与えられたものとするヘリシティの不変性は交わる結び目の数というトポロジカルな不変性に対応しているということを示している。また負のヘリシティは交わる向きが逆向きの場合に対応する [図1(b)参照]。

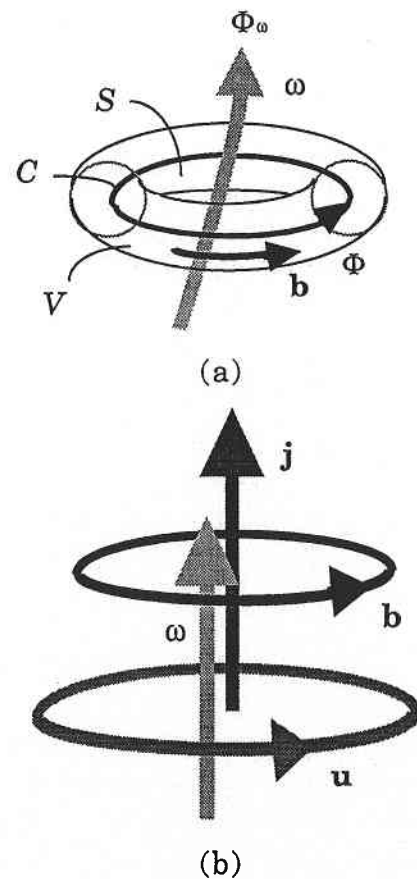


図2 クロス・ヘリシティの幾何イメージ
(a)最も単純幾何配位
(b)速度・磁場、渦度・電流密度の関係

これに対して速度場と磁場の内積によって定義されるクロス・ヘリシティ (15) は多少違った幾何学的意味をもっている。図 2(a) のような閉曲線 C のまわりの体積 V で断面積が小さい管を考える。この管の中の磁場 \mathbf{b} の流束を Φ とし、他の領域には磁場がないとする。すると

$$\begin{aligned} I_{\omega b} &= \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV = \Phi \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \Phi \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = \Phi \int_S \omega \cdot \mathbf{n} dS = \Phi \Phi_{\omega} \end{aligned} \quad (24)$$

つまりクロス・ヘリシティは幾何学的には渦度 ω の流束 Φ_{ω} を磁場 \mathbf{b} がどれだけ囲んでいるかを表している。クロス・ヘリシティが保存するという事は磁場の囲む正味の渦流量が一定であることに対応している。電流密度と磁場が $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{b}$ の関係で結ばれていることを考え併せると図 2(b) のようなイメージでクロス・ヘリシティを考えることができる。

4. 平均量とゆらぎ

前にも述べたように乱流現象には非常に広い範囲のスケールの運動が伴っており、それらすべてのスケールについて同時に解析することは困難である。ここでは大きなスケールの運動に注目し、興味のある大きなスケールの運動に対してゆらぎの効果がどうはたらくかを見ていこう。この目的のために物理量を平均部分とゆらぎ部分に分ける：

$$f = F + f', \quad F = \langle f \rangle \quad (25)$$

ただし

$$f = (\mathbf{u}, p, \mathbf{j}, \mathbf{b}, \mathbf{e}, \rho, p_M, \omega), \quad (26a)$$

$$F = (\mathbf{U}, P, \mathbf{J}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, \rho_m, P_M, \Omega), \quad (26b)$$

$$f' = (\mathbf{u}', p', \mathbf{j}', \mathbf{b}', \mathbf{e}', \rho', p'_M, \omega'). \quad (26c)$$

ここでたとえば p は圧力、 \mathbf{j} は電流密度、 \mathbf{e} は電場、 ρ は密度、 $p_M (\equiv p + \mathbf{b}^2/2)$ は MHD 圧力などである。また $\langle \cdot \rangle$ は物理量のアンサンブル平均を意味する。同様に平均部分の擬スカラー量とゆらぎ部分のそれとはそれぞれ次のように定義される：

$$G_M \equiv \mathbf{E} \cdot \Psi, \quad G \equiv \langle \xi' \cdot \psi' \rangle. \quad (27)$$

ただし $\mathbf{E} \equiv \langle \xi \rangle$ や $\Psi \equiv \langle \psi \rangle$ は平均部分であり、 ξ や ψ はゆらぎ部分である。運動ヘリシティを例にとると平均流ヘリシティ $H_M \equiv \mathbf{U} \cdot \Omega$ 、乱流ヘリシティ $H \equiv \langle \mathbf{u}' \cdot \omega' \rangle$ のよう

になる。

このように擬スカラー量を考えるとき本質的な量は平均流擬スカラー量よりはむしろ乱流擬スカラー量であることがわかる。つまり、とくに ξ が速度 \mathbf{u} になるような場合に平均流の擬スカラー量はガリレイ不変ではない。そのような量ではたとえば時間的・空間的に非一様な流れにあっては統計量の特定ができなくなってしまう。これに対して乱流擬スカラー量はガリレイ不変であるから、この量によって乱流の統計的性質を記述すべきである。

流体方程式の不変量である擬スカラー量としては非圧縮性中性流体における (運動) ヘリシティ、MHD 方程式の磁気ヘリシティやクロス・ヘリシティなどが知られている。以下に示すように、擬スカラー量に限らず、保存量についてはその平均量とゆらぎ量の関係について明確なイメージを描くことができる。たとえば擬スカラー不変量について (27) 式の定義に従って平均の擬スカラー量と乱流擬スカラー量の発展方程式を書くと次のような形にかけらる：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) G_M = P_{G_M} - \varepsilon_{G_M} + \nabla \cdot \mathbf{T}_{G_M}, \quad (28)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) G = P_G - \varepsilon_G + \nabla \cdot \mathbf{T}_G. \quad (29)$$

ここで P_Q , ε_Q , $\nabla \cdot \mathbf{T}_Q$ はそれぞれ量 Q の生成率、散逸率、輸送率である。保存量では平均量の生成率とゆらぎ量の生成率の間に

$$P_G = -P_{G_M} \quad (30)$$

の関係が成り立つ。これは平均量の生成が負すなわち平均量が減った分だけ乱流量が生成されることを示している。言い換えれば平均部分の吸い込み (sink) が乱流部分の湧きだし (source) あるいは生成になっているということである。小さなスケールへ移ったスカラー量は散逸率 ε で代表される分子粘性・磁気拡散などの効果によって最終的には散逸・拡散する。輸送率からの寄与は、発散の形で書かれていることからわかるように境界表面からの注入または流出がなければ、体積にわたって積分するとゼロになる。式 (28) と (29) は関係 (30) のもとで、大きなスケールで注入されたスカラー量が小さなスケールへとカスケードして散逸していくことをよく表している。このように明確なイメージを描きうるのは (30) 式の関係が成り立つ量、つまり保存量に対してだけである。保存量のうちでもエネルギーは純スカラーであり、空間の反転対称性の破れとそれに伴う構造についての指標にはなりえない。一方先に触れたようにヘリシティは擬スカラーであり、乱流中の構造を表すのに適している。この意味で乱流中の構造が問題になるような状況ではエネルギーだけでなく、中性乱流では (運

動) ヘリシティ, MHD 乱流ではクロス・ヘリシティといった擬スカラー保存量に注目すべきである. 実際これらの保存量の乱流擬スカラー量は乱流中の大規模渦にカップリングする量として重要であることが以下に示される.

5. 議 論

乱流中の構造がどのように生成・維持されるのか考えるとき最も有力なのが乱流ダイナモの考え方である. それは小さなスケールの運動であるゆらぎが一定の条件の下では大きなスケールの運動に寄与して大きなスケールの構造(磁場や渦)を再生・維持するというものである. 中性流体乱流あるいは non-MHD 乱流中の構造として第一に挙げられるのは渦構造, MHD 乱流中では大規模磁場構造である.

ダイナモの視点から渦度方程式と磁場の誘導方程式を眺めた場合, 二つのことが銘記されるべきである. まず第一に(1)式と(3)式からわかるように渦度方程式は本質的に \mathbf{u} あるいは $\boldsymbol{\omega}$ について非線型の方程式であるのに対し, 磁場の誘導方程式では例えば磁場が速度場に影響することを無視できる運動学的ダイナモの場合のように \mathbf{u} が与えられるとすると磁場方程式は \mathbf{b} についての線型方程式になる点に大きな違いがある. 第二に渦度方程式の構成要素である \mathbf{u} と $\boldsymbol{\omega}$ は(3)という関係で結ばれている. 一方, 磁場方程式では \mathbf{u} と \mathbf{b} に制限がない. この意味で束縛条件(3)の付いている中性流体の渦度方程式よりも磁場の誘導方程式の方が一般的だということができる. つまり一般の方程式(磁場方程式)で成り立つ結果を特殊な方程式(渦度場方程式)に適用することはできるがその逆は必ずしも許されないということである. しばしばこれら二つの方程式の類似性に着目して磁場方程式での磁気ダイナモに対応する渦度方程式での「渦ダイナモ」が議論されるが, 上述の制約のため安易な類推は許されない⁴⁾.

以下では平均場に対するゆらぎの影響を最も端的に表す量である乱流による応力の表現中に渦度と磁場の効果を取り入れるとき, それぞれの擬スカラー不変量の乱流部分がどのような役割を果たすかに注目していく.

5.1 中性乱流 (ヘリシティ効果)

電気伝導性のない非圧縮性乱流の平均速度場と平均渦度場とは次のような方程式に従う:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{R}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{V}_M) + \nu \Delta \boldsymbol{\Omega}, \quad (32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0. \quad (33)$$

ここでレイノルズ応力 \mathbf{R} と乱流渦起動力 \mathbf{V}_M はそれぞれ

$$\mathbf{R}^{\alpha\beta} \equiv -\langle u^\alpha u^\beta \rangle, \quad (34)$$

$$\mathbf{V}_M \equiv \langle \mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}' \rangle = \nabla \cdot \mathbf{R} \quad (35)$$

のように定義される量で, 平均場に対するゆらぎの効果を表す重要な量である. この \mathbf{R} の表式は, たとえば非一様な乱流に対する統計理論である TSDIA (Two-Scale Direct-Interaction Approximation) から求められる. TSDIA は大小二つのスケールを導入して微分展開をした後に, 最低次の基本場に統計的仮定を置いて 2 次のオーダーでプロパゲーターをくりこむ手法である⁵⁾. 理論解析の結果, \mathbf{R} は

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = & -\frac{2}{3} K \mathbf{I} + \nu_T [\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T] \\ & - \left[\Omega \gamma_V + (\Omega \gamma_V)^T - \frac{2}{3} (\Omega \cdot \gamma_V) \mathbf{I} \right], \end{aligned} \quad (36)$$

したがって \mathbf{V}_M は

$$\mathbf{V}_M = -\Omega \nabla \cdot \gamma_V - (\Omega \cdot \nabla) \gamma_V - \nu_T \nabla \times \Omega + \text{RT} \quad (37)$$

で与えられる⁴⁾. ここで K は乱流エネルギー, \mathbf{I} は単位行列, M^T は行列 M の共役, ν_T は乱流粘性, RT は高次の項である. また γ_V は渦度に関連する項の比例係数で, この量は乱流ヘリシティの勾配に比例する:

$$\gamma_V : \nabla H \quad \text{ただし} \quad H \equiv \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle. \quad (38)$$

さて(36)の表式中第2項まではよく知られた渦粘性近似の表現である. 第3項つまり渦度に関連する項がヘリシティの効果として新たに加わった項である. (31)式を見ればわかるように, この渦度に関係した項が存在することで, 乱流渦起動力がはたらいて渦度を生成・維持する可能性が生じる.

ここで注意しなければならないのは, 現実の乱流ではヘリシティ自身も(28)と(29)式に従ってエネルギーとともにカスケードし散逸する物理量である点である. つまりヘリシティの効果が継続してはたらくためには回転系での回転や旋回流での旋回外力のように絶えずヘリシティが供給されていなければならない.

レイノルズ応力 \mathbf{R} の表式(36)中, 渦度の比例係数であるヘリシティは1階微分の形で入っていることに注意が必要である. このことはレイノルズ応力の対称性の考察からわかる. 渦度は軸性のベクトルであるから対称なテンソル \mathbf{R} を構成するためには擬スカラー量の空間微分が必要である. このように微分の形で入ってくることから, ヘリシ

ティの効果が平均流にはたらくためには、単にヘリシティが存在するだけでは不十分で、ヘリシティの分布が非一様性をもっていることが不可欠であるとわかる。

このように乱流中に渦構造があるときその渦構造の存在そのものがヘリシティのはたらきを通して渦構造の生成や維持に寄与しうるのである。ただし、(運動)ヘリシティがはたらくためにはヘリシティが存在するだけではだめで、常に供給され、しかもそこに空間的非一様性があることが必要である。

実際この表式は惑星表面の大規模渦構造^{4), 6)}や台風・竜巻⁴⁾に適用されてそれらの生成・維持機構の定性的説明に成功している。

より定量的な分析を行うためには方程式を数値的に解くことが必要である。しかし乱流のように自由度の大きな現象では方程式を直接解くことは不可能である。したがって一点物理量を用いた方程式のモデル化が不可欠であるが、従来の渦粘性型二方程式モデル ($K-\epsilon$ モデル) はクロス流があるような場合にはまったく機能しない。その原因は、従来のモデルが一点物理量として乱流エネルギー K とその散逸率 ϵ という示強変量だけを用いていた点に求められる。そこで一点物理量として乱流ヘリシティを用いて構造の効果を取り入れ、従来の $K-\epsilon$ モデルを改良する三方程式モデル ($K-\epsilon-H$ モデル) が考えられる⁴⁾。そのモデルをクロス流をもつ典型的な流れである旋回流に適用し数値的に解くことで、従来の二方程式モデルではまったく再現のできなかった旋回乱流のいくつかの特徴を再現することに成功している^{4), 7)}。

5.2 MHD 乱流 (クロス・ヘリシティ効果)

非圧縮性 MHD 乱流中の大規模構造は平均速度場の方程式と平均磁場の誘導方程式とソレノイダル条件:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U} - \mathbf{B}\mathbf{B}) = -\nabla P_M + \nabla \cdot \mathbf{R}_M + \nu \Delta \mathbf{U}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_M) + \lambda \Delta \mathbf{B}, \quad (40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (41)$$

によって支配される。ここで乱流磁気レイノルズ応力 \mathbf{R}_M と乱流起電力 \mathbf{E}_M はそれぞれ

$$\mathbf{R}_M^{\alpha\beta} \equiv -\langle u'^\alpha u'^\beta - b'^\alpha b'^\beta \rangle, \quad (42)$$

$$\mathbf{E}_M = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle \quad (43)$$

で定義される量で、小さなスケールでのゆらぎの効果を平均場の方程式にカップリングさせる重要な量である。

TSDIA による理論解析から \mathbf{R}_M と \mathbf{E}_M は

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_M = & -\frac{2}{3} \Gamma \mathbf{I} + \frac{1}{3} \beta [\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^\dagger] \\ & -\frac{1}{3} \gamma [\nabla \mathbf{B} + (\nabla \mathbf{B})^\dagger], \end{aligned} \quad (44)$$

$$\mathbf{E}_M = \alpha \mathbf{B} - \beta \mathbf{J} + \gamma \boldsymbol{\Omega} \quad (45)$$

の形で表せる^{8), 9)}。ここで $\Gamma \equiv \langle \mathbf{u}^2 - \mathbf{b}^2 \rangle / 2$ であり、また α, β, γ はそれぞれ残留ヘリシティ H_R , MHD 乱流エネルギー K_M , 乱流クロス・ヘリシティ W で表せる:

$$\alpha : H_R \equiv \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' - \mathbf{b}' \cdot \mathbf{j}' \rangle, \quad (46a)$$

$$\beta : K_M \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}'^2 + \mathbf{b}'^2 \rangle, \quad (46b)$$

$$\gamma : W \equiv \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle. \quad (46c)$$

(45) 式の第 1 項は電流に平行な磁場を作るアルファ効果 (α 効果), 第 2 項は乱流拡散の効果として通常の乱流ダイナモの議論でおなじみのものである。第 3 項は乱流中に渦度が存在すると磁場を生成する効果 (γ 効果) が期待できることを示している。また中性流体の乱流運動ヘリシティの場合と比べて、 \mathbf{R}_M の表式 (44) 中の $\nabla \mathbf{B}$ の比例係数に乱流クロス・ヘリシティは γ を通して微分形ではなくそのままの形 W で入っている点が対照的である。

以下、平均磁場の誘導方程式 (40) の定常解を求めていく。ここでは特に (45) 式の第 3 項の働きを見るために第 1 項を無視する近似を行う。MHD 乱流についての半場の数値シミュレーションは α 効果に比して γ 効果がより重要であることを示唆している¹⁰⁾。さらに定常解のうち平均電場 \mathbf{E} がゼロであるようなものを考える。これは

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} \quad (47)$$

の関係を見るとわかるように定常磁場 ($\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$) を与える特殊な場合である。 $\mathbf{E} \neq 0$ を含めた $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ のより広い場合についても議論は可能である¹¹⁾。平均磁場の方程式 (40) の \mathbf{E}_M に α 項を落とした (45) の表式を代入し、磁気拡散率 λ は乱流拡散率 β よりずっと小さいので無視すると、定常磁場のダイナモ方程式は

$$\mathbf{U} \times \mathbf{B} - \beta \nabla \times \mathbf{B} + \gamma \nabla \times \mathbf{U} = 0 \quad (48)$$

のように簡略な形で書くことができる。このとき磁場

$$\mathbf{B} = \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{U} = C \frac{W}{K_M} \mathbf{U} \quad (49)$$

は β と γ の比の空間的な変化を無視する近似の下で (40) の特解となっていることがわかる¹²⁾。ただし二つめの等号は β と γ のモデル化⁸⁾ から得られたものであり定数は $C=0.07$ である¹⁰⁾。ダイナモ方程式 (48) 式の特解 (49) は、 γ あるいは乱流統計量であるクロス・ヘリシティ W がゼロでない場合には、速度場に平行または反平行な磁場が作られうということを示している。これは磁場が速度場に揃うというアラインメント現象のひとつの表現であると考えられる。比例係数のうち β すなわち乱流エネルギー K_M の部分は常に正であるから、磁場が速度場に対して平行か反平行かはその場所での γ つまりクロス・ヘリシティ W の符号の正負で決まることとなる。

式 (49) のモデル化された磁場の表現中で係数 W/K_M (乱流クロス・ヘリシティと乱流 MHD エネルギーの比) は

$$\langle \mathbf{u}'^2 \cdot \mathbf{b}'^2 \rangle \geq 2 \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle \quad (50)$$

という不等式が常に成り立つため、必ず

$$\frac{|W|}{K_M} \leq 1 \quad (51)$$

という範囲に収まっている。この比はクロス・ヘリシティを用いた乱流ダイナモの研究において最も重要な量の一つである。太陽の黒点磁場¹³⁾ および銀河磁場¹¹⁾ の研究から、この値は $O(10^{-2})$ 程度と予言されている。

また、このダイナモ解によれば乱流クロス・ヘリシティが正の領域で正の乱流クロス・ヘリシティが生成され、負の領域で負のクロス・ヘリシティが生成されることが保証される¹²⁾。したがって磁場の維持に必要なダイナモの効率は高いと期待される。

このダイナモ解はさまざまな天体宇宙現象に適用可能である。たとえばブラック・ホールなどコンパクト天体の周囲に存在する降着円盤の双極ジェットの生成機構¹²⁾、太陽の黒点磁場や緯度方向流れの生成機構¹³⁾、地球型磁場の維持機構¹⁴⁾、銀河磁場の維持機構¹¹⁾ などである。特に銀河磁場は光学的にも X 線的にも透過可能な媒質中に存在していることからトロイダル磁場を観測できるという大きな特長をもっている。また銀河ディスク内のプラズマ・ガスの速度場も観測可能である。したがってダイナモ理論の格好の検証舞台を提供すると期待されている。

6. 結 論

本稿では、擬スカラー量と結びついた乱流抑制機構という観点から、秩序構造の維持について論じてきた。擬スカ

ラー量は空間の反転対称性の破れを表す量であることから、対称性の破れとしての構造を記述するのに適した量であることが示された。中性流体乱流またはプラズマ乱流現象の中から擬スカラー不変量が重要な役割を占める幾つかの例が示唆された。
(1993年11月16日受理)

参 考 文 献

- 1) S. K. Robinson, S. J. Kline, and P. R. Spalart, "Quasi-coherent structures in the turbulent boundary layer: Part II. Verification and new information from a numerically simulated flat-plate layer," in *Near-Wall Turbulence*, edited by S. J. Kline and N. H. Afgan (Hemisphere, New York, 1990), p. 218.
- 2) H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge U. P., Cambridge, 1978).
- 3) H. K. Moffatt, "Relaxation under topological constraints," in *Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasma*, edited by H. K. Moffatt et al. (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992), p. 3.
- 4) N. Yokoi and A. Yoshizawa, "Statistical analysis of the effects of helicity in inhomogeneous turbulence," *Phys. Fluids A* **3**, 464 (1993).
- 5) A. Yoshizawa, "Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation," *Phys. Fluids* **27**, 1377 (1984).
- 6) A. Yoshizawa and N. Yokoi, "Vortex dynamo and large-scale turbulent structures in a rotating system," *J. Phys. Soc. Jpn.* **60**, 2500 (1991).
- 7) 西島勝一・横井喜充, 「ヘリシティによる構造効果を組み入れた 3 方程式乱流モデルの研究 (直円管旋回流への適用)」, 機論 B58, 2714 (1992).
- 8) A. Yoshizawa, "Self-consistent turbulent dynamo modeling of reversed field pinches and planetary magnetic fields," *Phys. Fluids B* **2**, 1589 (1990).
- 9) A. Yoshizawa, "Turbulent transport processes in tokamak's high-mode confinement," *Phys. Fluids B* **3**, 2723 (1991).
- 10) F. Hamba, "Turbulent dynamo effect and cross helicity in magnetohydrodynamic flows," *Phys. Fluids A* **4**, 441 (1992).
- 11) N. Yokoi, "The formation of large-scale magnetic fields in spiral galaxies using the cross-helicity dynamo," submitted to *Astrophys. J.* (1993).
- 12) A. Yoshizawa and N. Yokoi, "Turbulent magnetohydrodynamic dynamo for accretion disks using the cross-helicity effect," *Astrophysical J.* **407**, 540 (1993).
- 13) A. Yoshizawa, "Turbulent magnetohydrodynamic dynamo for intense magnetic fields as the origin of sunspots," *Publ. Astron. Soc. Japan*, **45**, 129 (1993).
- 14) A. Yoshizawa, "Cross-helicity dynamo for the sustaiment of earth-type magnetic fields," (unpublished).