

## Multigrid 法による 3 次元室内乱流の数値シミュレーション

Multigrid Method and its Application for 3-dimensional Turbulent Airflow in Room

村上 周三\*・加藤 信介\*\*・張 維\*\*

Shuzo MURAKAMI, Shinsuke KATO and Wei ZHANG

本稿は、SOR 等の緩和計算の加速法として空間分解能の異なる多数の解析格子を順次用いて計算を行う Multigrid を紹介する。莫大な格子点を用いた大規模流体の数値計算において、SOR などを用いた緩和計算を行う際、格子点数の増大に伴い緩和計算の収束性が悪くなるため、加速法が必要となる。本稿では、SIMPLED 法による流体の数値解法に Multigrid 法を組み込み、2 次元層流および 3 次元乱流室内気流を対象として Multigrid 法の効果を検討した結果を紹介する。

## 1. はじめに

Multigrid 法は大規模な流体等の偏微分方程式の数値解析における緩和計算の加速法として、Brandt<sup>1),2)</sup> (1973, 1979), Hackbusch<sup>3)</sup> (1976) などにより導入された。その後、数値流体力学を始めとする各分野の偏微分方程式の数値解析における緩和計算の加速法として普及している。粘性流の基礎方程式である NS 方程式への Multigrid 法の適用も Wessling<sup>4)</sup> (1977) などにより手掛けられた、特に Ghia ら<sup>5)</sup> (1982) による Multigrid 法を用いた 2 次元 cavity flow の計算結果は粘性流の数値計算の基本的な Benchmark test のデータベースとしてよく使われる。2 次元粘性流の計算で、Multigrid 法の加速率がかなり高いことを S. P. Vanka (1986)<sup>6)</sup>, 荒川<sup>7)</sup> (1988), Y. P. Chin<sup>8)</sup> (1988), P. E. Phillips<sup>9)</sup> (1985), Fuchs<sup>10)</sup> (1984), M. C. Thompson, と J. H. Ferziger<sup>11)</sup> (1989), M. Hortmann, M. Preic<sup>12)</sup> などが報告している。Multigrid 法を用いた高 Re 数の流れの数値計算については、Ghia ら<sup>5)</sup> (1982) は  $Re = 10000$  まで (cavity flow, mesh 数  $257 \times 257$ ), C. H. Bruneau ら<sup>13)</sup> (1990) は  $Re = 15000$  まで (cavity flow, mesh 数  $512 \times 512$ ) の数値計算を行っている。その他、J. Y. Tu<sup>14)</sup> (1992) は Multigrid 法を複雑な境界形状をとした粘性流の一般曲線座標に基づく解法に適用している。乱流への適用については、最近、F. S. Lien and A. Leschziner ら<sup>15)</sup> (1990) は Multigrid 法を一般曲線座標系の解法に適用し、乱流モデルに基づく解析を行った例を報告

している。今後は 3 次元の大規模な乱流の数値計算への適用が進むものと考えられる。

本解説では、莫大な格子点を用いた大規模な流体数値計算における Multigrid 法の適用を検討、解説する。流体計算法として SIMPLED 法<sup>16),17)</sup> に Multigrid 法を組み込み、その定式化を示すとともに、2 次元層流および 3 次元乱流 (k- $\epsilon$  モデル) 室内気流を対象として、Multigrid 法の効果を検討する。

## 2. Multigrid 法の基本原理

流体の数値シミュレーションにおいて連立多元方程式の解法には SOR (逐次加速緩和法) 等各種の緩和法がよく使われる。緩和法を用いた場合、緩和計算の始めは近似解を代入した方程式の残差は急速に小さくなるが、その後の収束は非常に遅くなる。これは緩和法が格子の大きさと同じ程度の波長の誤差を最も効率よく減衰させ、長波長の誤差に対しては効率が悪いために生じる。そのため、波長の大きな誤差を減衰させるためには、多くの反復回数を必要とする。これを改善するために、Multigrid 法は誤差のさまざまな波長成分にそれぞれ対応した粗い計算格子を用いて効率よく誤差を減衰させる。すなわち細かい格子上で方程式を緩和法によりある程度解いて短波長の誤差を減衰させ、その後誤差の修正方程式を粗い格子上に再構成し、長波長の誤差を速やかに収束させるものである。

## 2.1 線形方程式のための Multigrid 法

Multigrid 法は線形方程式で発展し、その後非線形方程式に適用された。ここでは、まず線形方程式に対する Multigrid 法を説明する。支配方程式を細かい格子上で離散化し、線形多元連立方程式(1)を得る。

\*東京大学生産技術研究所 付属計測技術開発センター

\*\*東京大学生産技術研究所 第 5 部

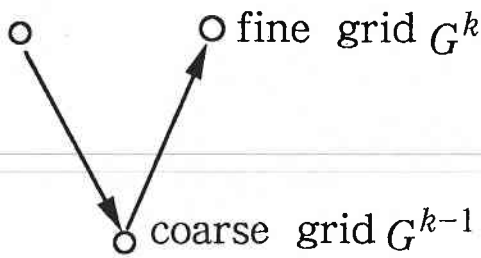


図1 Vサイクル

$$L^k \Phi^k = F^k \tag{1}$$

$L^k$ : 細かい格子上的の線形演算子,  $\Phi^k$ : 厳密解,  $F^k$ : 定数項, また上付添字  $k$ ,  $k-1$  はそれぞれ細かい格子  $k$ , 粗い格子  $k-1$  をおのおの示す.

SOR, 等により数回反復計算を実行して近似解  $\phi_1^k$  を求めた後, 各格子点における残差  $R^k$  を(2)より求める.

$$R^k = F^k - L^k \phi_1^k \tag{2}$$

$\phi_1^k$ : 厳密解  $\Phi^k$  に対する近似解. また, (1), (2)および  $L^k$  の線形性により

$$L^k \Phi^k - L^k \phi_1^k = L^k (\Phi^k - \phi_1^k) = R^k \tag{3}$$

近似解の修正量  $\delta^k$  を(4)のように定義すると, 細かい格子上的の修正方程式(5)を得る.

$$\delta^k = \Phi^k - \phi_1^k \tag{4}$$

$$L^k \delta^k = R^k \tag{5}$$

Multigrid 法においては, 低波数成分の誤差を粗い格子で減衰させるために修正方程式(5)を粗い格子に補間 (Restriction) してから解く. 残差の補間および粗い格子上的の修正方程式は次式で与えられる.

$$R^{k-1} = I_k^{k-1} R^k \tag{6}$$

$$L^{k-1} \delta^{k-1} = R^{k-1} \tag{7}$$

ここで,  $I_k^{k-1}$  は, 細かい格子から粗い格子への変化を行う演算子である. 粗い格子上的で修正方程式(7)式より修正値  $\delta^{k-1}$  を得る. 細かい格子上的での修正量  $\delta^k$  は  $\delta^{k-1}$  を補間 (Prolongation) して得ることができる.

$$\delta^k = I_{k-1}^k \delta^{k-1} \tag{8}$$

$I_{k-1}^k$  は  $I_k^{k-1}$  の逆向きの変換, すなわち粗格子から細格子への変換を示す. このような過程で得られた修正量  $\delta^k$  を用いて, (9)式に従って細かい格子上  $G^k$  での近似値の修正を行い, さらに数回の緩和計算を行う.

$$\phi_2^k = \phi_1^k + \delta^k \tag{9}$$

以上が図1に示す2 grid のVサイクルのMultigrid法の概要であり, 収束までこの過程を繰り返すことにより細格子単独の計算より速かに収束解を得る.

### 2.2 非線形方程式のMultigrid法

非線形方程式の場合(1)式の  $L^k$  は細かい格子  $G^k$  上の非線形演算子である. 線形方程式の場合と同じく細かい格子上でSOR法等により数回反復計算を実行した後, 各格子点における近似解  $\phi_1^k$  と(2)式より残差  $R^k$  が求まる.

ただし, 非線形方程式の場合, (3)式と異なり,  $L^k$  が線形でないので, 修正量  $\delta^k$  に対する修正方程式を直接導かず, (10)式が修正方程式の基礎となる.

$$L^k \Phi^k - L^k \phi_1^k = R^k \tag{10}$$

(10)式の残差  $R^k$  と近似解  $\phi_1^k$  を粗い格子  $G^{k-1}$  に補間し  $\phi_1^{k-1}$  に関する修正方程式を得る.

$$L^{k-1} \Phi^{k-1} = R^{k-1} + L^{k-1} \phi_1^{k-1} \tag{11}$$

$$\text{ここで } R^{k-1} = I_k^{k-1} R^k \tag{12}$$

$$\phi_1^{k-1} = I_k^{k-1} \phi_1^k \tag{13}$$

すなわち, 非線形方程式の場合, 線形と異なり, 残差  $R^k$  だけでなく緩和された未知数  $\phi_1^k$  の近似解そのものも粗い格子に補間する必要がある. (11)式を解いて  $\Phi^{k-1}$  の近似解  $\phi_2^{k-1}$  および(14)式により修正量  $\delta^{k-1}$  を求める.

$$\delta^{k-1} = \phi_2^{k-1} - \phi_1^{k-1} \tag{14}$$

細かい格子  $G^k$  上の近似解  $\phi_{new}^k$  は  $G^{k-1}$  での修正量(14)式を  $G^k$  上に補間 (Prolongation) して求める.

$$\begin{aligned} \phi_{new}^k &= \phi_1^k + I_{k-1}^k \delta^{k-1} \\ &= \phi_1^k + I_{k-1}^k (\phi_2^{k-1} - \phi_1^{k-1}) \end{aligned} \tag{15}$$

以上の説明は線形の場合と同じく2 grid のVサイクルの場合である (図1参照). (10)~(15)式を何サイクルか繰り返すことにより, 細かい格子のみを用いた場合に比べ, 高速に収束解を得る.

### 3. Multigrid法の3次元乱流数値解析の適用

本節では, SIMPLED法<sup>注1)</sup>による3次元乱流 ( $k-\epsilon$ モデル)の数値解法にMultigrid法を適用した定式化を示す.

#### 3.1 $k-\epsilon$ モデルによる3次元乱流シミュレーションのMultigridによる定式化

3次元  $k-\epsilon$ モデルを有限体積で離散化すると次式となる.

$$\Sigma A^{\phi} \phi_{i,j} = \Sigma A_{nb}^{\phi} \phi_{nb} + S_D^{\phi}(\phi) \tag{16}$$

ここに,  $\phi = \{u, v, w, k, \epsilon\}$ ,  $A$  は未知数に対する係数<sup>注2)</sup>,  $S_D^{\phi}(\phi)$  は生成項であり, 添字  $nb$  は隣接する点を表す. すなわち, 3方向の隣接点を添字  $W, E, S, N, T, B$  で表

すと

$$\Sigma A^\phi = A_W^\phi + A_E^\phi + A_S^\phi + A_N^\phi + A_T^\phi + A_B^\phi$$

以下図1に示す two grid 法における V サイクルの定式化を示す。図1で  $G^k$  は fine grid,  $G^{k-1}$  は coarse grid を示し, 計算手順は① $G^k \rightarrow$ ② $G^{k-1} \rightarrow$ ③ $G^k$  の順となる。

(1) Step 1: fine grid での緩和計算

まず fine grid で, (16)式を数回の反復法で計算する。その計算結果および残差は次式となる。

$$R_p^k = \Sigma A_{nb}^\phi \phi_{nb}^* + S_D^\phi(\phi^*) - \Sigma A^\phi \phi^*_{i,j} \quad (17)$$

添字\*の付された未知数は緩和の途中で得られた最新値を示す。次に連続条件より導いた, 圧力の修正式(18)により, 圧力の修正量  $p'$  を数回の緩和計算により算出し, 圧力と速度を修正する (prediction 値)。Multigrid 法に必要な圧力の残差  $R_p^k$  は(19)式で与えられる。SIMPLED 法は得られた圧力と速度を用いてさらに圧力の修正方程式を解く。この SIMPLED 法による圧力の correction 量  $p''$  は(20)式となり, その残差は(21)式となる。

$$\Sigma A^p p'_{i,j,k} = A_{EP}^p p'_{i+1,j,k} + A_{WP}^p p'_{i-1,j,k} + A_{NP}^p p'_{i,j+1,k} + A_{SP}^p p'_{i,j-1,k} + A_{TP}^p p'_{i,j,k+1} + A_{BP}^p p'_{i,j,k-1} + b_p \quad (18)$$

$$R_p^k = A_{EP}^p p'_{i+1,j,k} + A_{WP}^p p'_{i-1,j,k} + A_{NP}^p p'_{i,j+1,k} + A_{SP}^p p'_{i,j-1,k} + A_{TP}^p p'_{i,j,k+1} + A_{BP}^p p'_{i,j,k-1} + b_p - \Sigma A^p p'_{i,j,k} \quad (19)$$

$$\Sigma A^p p''_{i,j,k} = A_{EP}^p p''_{i+1,j,k} + A_{WP}^p p''_{i-1,j,k} + A_{NP}^p p''_{i,j+1,k} + A_{SP}^p p''_{i,j-1,k} + A_{TP}^p p''_{i,j,k+1} + A_{BP}^p p''_{i,j,k-1} + b_p'' \quad (20)$$

$$R_p^k = A_{EP}^p p''_{i+1,j,k} + A_{WP}^p p''_{i-1,j,k} + A_{NP}^p p''_{i,j+1,k} + A_{SP}^p p''_{i,j-1,k} + A_{TP}^p p''_{i,j,k+1} + A_{BP}^p p''_{i,j,k-1} + b_p'' - \Sigma A^p p''_{i,j,k} \quad (21)$$

ここで  $\Sigma A^p = A_E^p + A_W^p + A_N^p + A_S^p + A_T^p + A_B^p$ ,  $A^p$  は圧力修正方程式の係数であり,  $b_p$ ,  $b_p''$  は生成項である<sup>注3)</sup>。

なお,  $R_p^k$  は  $R_p^k$  よりかなり小さいので, coarse grid へ補間する場合, 本研究では,  $R_p^k$  を省略する。すなわち, coarse grid では SIMPLED ではなく単なる SIMPLE が解かれる。これは検討した結果, SIMPLED 法を coarse grid で用いても収束性が向上しなかったためである。したがって, coarse grid へ補間すべき変数は  $p_f^k$ ,  $\phi_f^k$  とそれぞれの残差  $R_p^k$ ,  $R_\phi^k$  となる。

(2) Step 2: fine grid から coarse grid への補間

$G^k$  レベルの fine grid で得られた結果と残差は  $G^{k-1}$  レベルの coarse grid へ補間する (Restriction)。この際 SIMPLED (SIMPLE) 法はスタガードグリッドを採用しているため, 補間関数は各変数で異なる。

③速度, 圧力およびスカラー量の場合,

$$p_c^{k-1} = p_f^k I_R^p, \quad \phi_c^{k-1} = \phi_f^k I_R^\phi \quad (22)$$

④残差の場合,

$$R_p^{k-1} = R_p^k I_R^p, \quad R_\phi^{k-1} = R_\phi^k I_R^\phi \quad (23)$$

ここに,  $I_R^p$ ,  $I_R^\phi$  は補間関数 (Restriction)

(3) Step 3: coarse grid での緩和計算

レベルの coarse grid 上で, 運動方程式および圧力修正量の修正方程式等を解く。

④運動方程式およびスカラー量の修正方程式<sup>注4)</sup>:

$$\Sigma A^\phi \phi_{i,j,k}^{k-1} = \Sigma A_{nb}^\phi \phi_{nb}^{k-1} + S_D^\phi(\phi^{k-1}) + \Sigma A^\phi \phi_c^{k-1} - \Sigma A_{nb}^\phi \phi_c^{k-1} - S_D^\phi(\phi_c^{k-1}) + R_\phi^{k-1} \quad (24)$$

⑤圧力修正量の修正方程式

$$\Sigma A^p p'_{i,j,k}^{k-1} = A_{EP}^p p'_{i+1,j,k}^{k-1} + A_{WP}^p p'_{i-1,j,k}^{k-1} + A_{NP}^p p'_{i,j+1,k}^{k-1} + A_{SP}^p p'_{i,j-1,k}^{k-1} + A_{TP}^p p'_{i,j,k+1}^{k-1} + A_{BP}^p p'_{i,j,k-1}^{k-1} + b_p + \Sigma A^p p'_c{}_{i,j,k}^{k-1} - (A_{EP}^p p'_{i+1,j,k}^{k-1} + A_{WP}^p p'_{i-1,j,k}^{k-1} + A_{NP}^p p'_{i,j+1,k}^{k-1} + A_{SP}^p p'_{i,j-1,k}^{k-1} + A_{TP}^p p'_{i,j,k+1}^{k-1} + A_{BP}^p p'_{i,j,k-1}^{k-1} + b_c) + R_p^{k-1} \quad (25)$$

ただし, (25)式では,

$$\Sigma A^p p'_c{}_{i,j,k}^{k-1} \approx (A_{EP}^p p'_{i+1,j,k}^{k-1} + A_{WP}^p p'_{i-1,j,k}^{k-1} + A_{NP}^p p'_{i,j+1,k}^{k-1} + A_{SP}^p p'_{i,j-1,k}^{k-1} + A_{TP}^p p'_{i,j,k+1}^{k-1} + A_{BP}^p p'_{i,j,k-1}^{k-1})$$

が成り立つので, (25)式を簡略化し(26)を用いる。

$$\Sigma A^p p'_{i,j,k}^{k-1} = A_{EP}^p p'_{i+1,j,k}^{k-1} + A_{WP}^p p'_{i-1,j,k}^{k-1} + A_{NP}^p p'_{i,j+1,k}^{k-1} + A_{SP}^p p'_{i,j-1,k}^{k-1} + A_{TP}^p p'_{i,j,k+1}^{k-1} + A_{BP}^p p'_{i,j,k-1}^{k-1} + b_p - b_c^{k-1} + R_p^{k-1} \quad (26)$$

以上(24), (26)を解いて, SIMPLE による速度, 圧力の緩和計算の結果は  $p_\Sigma^{k-1}$ ,  $\phi_\Sigma^{k-1}$  となる。

(4) Step 4: coarse grid から fine grid への補間

$G^{k-1}$  (coarse grid) レベルで, 速度, 圧力の修正量を求めて  $G^k$  (fine grid) レベルへ補間する (prolongation)。その補間した修正量により fine grid で速度と圧力を修正する,

$$p_{f2}^k = p_f^k + I_p^p (p_\Sigma^{k-1} - p_c^{k-1}) \omega_p \quad (27)$$

$$\phi_{f2}^k = \phi_f^k + I_p^\phi (\phi_\Sigma^{k-1} - \phi_c^{k-1}) \omega_\phi \quad (28)$$

$$\phi_{f2}^k = \phi_f^k + \max(0, I_p^\phi (p_\Sigma^{k-1} - p_c^{k-1}) \omega_\phi) \quad (29)$$

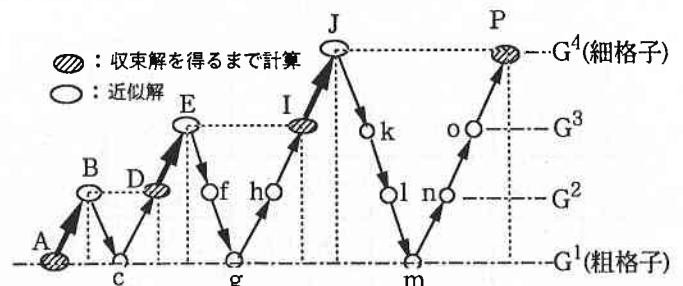


図2 FMG (full multigrid method)

ここで、 $P_p, I_p^k$  は coarse grid から fine grid への補間関数 (prolongation) である。  $\omega_p, \omega_k$  は緩和係数であり、本研究では、1としているが、計算の安定性のためには、1以下も考えられる。また、k- $\epsilon$ モデルでは、k や  $\epsilon$  は正値となるが、prolongation の過程で必ずしも正値性が保証されない。したがって(29)式に示すように今回は修正量を必ず正となる条件を課した。(27)~(29)を、 $G^k$  (fine grid) レベルの初期値として、次のサイクルの計算を行う。

#### 4. Multigrid 法の格子間移動の構造

前節では2種類の格子を用いた例を示したが、さらに粗い格子を用いて何重にも修正方程式を構成する方法がある。本研究では、最初 Brandt により提案され<sup>1), 2)</sup>、その後 Vanka<sup>6)</sup> などにより実用化されたアルゴリズム FMG (full multigrid) を利用する (図2)。FMGの場合、格子間の移動方法にはまず最粗格子 A で収束解を求め、次に A より細かい格子 B に解を補間し、B である程度計算 (数回反復) して、近似解を求め、B-c-D の V サイクルを行い、D で収束解を得る。同様に D から E レベルに補間し、f, g, h で修正方程式を構成し、3重 grid の V サイクル (E-f-g-h-I) を行う。必要に応じてさらに細密格子を用いれば4重 grid の V サイクル (J-k-l-m-n-o-P) となる。最後に、最密格子 (P) で収束解を得る。また、図2の英文大文字のところでは、圧力の correction 量を解く SIMPLED を用い、英文小文字のところでは、単なる SIMPLE 法を用いている。

#### 5. 2次元層流室内気流の計算

##### 5.1 計算概要

検討に用いた2次元正方形室内気流モデルを図3に示す。格子点数は細格子で160×160、粗格子ではおのおの80×80、40×40、20×20 (4重 grid) とする。格子間隔はいずれも均等とする。Matrix の解法は TDMA を利用する LSOR を用いている。移流項は最密格子 (160×160) で、Re=50および100の場合には、中心差分、Re=1000の場合に

は、1次精度の power low スキームを採用した。他の粗格子では1次精度の power low スキームを利用する。境界条件として壁面は no-slip 条件を課し、流入流出口は無次元速度1を与える。なお、Multigrid 法で近似解を求める際の収束回数として、粗格子の場合 (図2の白丸)、修正方程式の反復回数はおのおの20回ずつの固定とし、B, E, J の点では40回固定の反復を行った。

##### 5.2 計算結果

表1および図5~7に計算結果を示す。Multigrid 法と比較するために、最密格子のみによる計算 (Single grid 計算) も行った。

5.2.1 CASE1 (Re=50) の場合 計算結果を図5に示す。(a) は室内気流の流線分布、(b) は Multigrid 法と Single grid の収束状況を示す。収束条件として細密格子での圧力修正量の最大値  $\text{MAX}|p'| < 5.0 \times 10^{-4}$  を課した場合の計算では、細密格子のみによる計算は収束まで3320回の反復を必要としたのに対し、Multigrid の場合、最密格子での必要反復回数は合計220回 (表1) であった。また、収束解を得るまでの CPU 時間は SS10 (model 40) 計算機 (約10MFLOPS) で、Single grid の場合は11662.1秒必要としたのに対し、Multigrid は1451.0秒であり、加速率は8.04を達成した。また、収束条件をより厳しくした場合 ( $\text{MAX}|p'| < 1.0 \times 10^{-4}$ )、加速率は8.12倍となり、ほぼ変わらない加速率を得た。

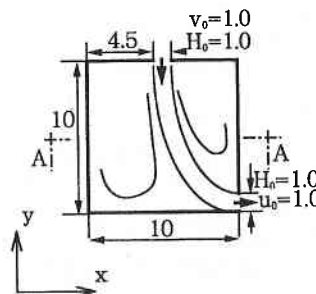


図3 2次元室内モデル

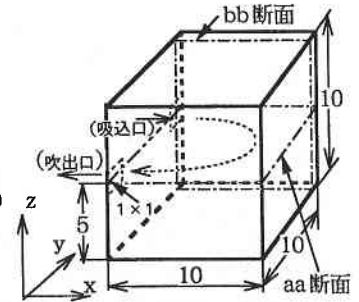


図4 3次元室内モデル

表1 CASE 1, 2, 3 の iteration 数と CPUtime の比較

CASE	CASE1 (Re = 50)				CASE2 (Re = 100)		CASE3 (Re = 1000)	
	MAX p'  < 5.0×10 <sup>-4</sup>		MAX p'  < 1.0×10 <sup>-4</sup>		MAX p'  < 5.0×10 <sup>-4</sup>		MAX p'  < 5.0×10 <sup>-4</sup>	
項目 方法	iteration	CUtime(秒)	iteration	CUtime(秒)	iteration	CUtime(秒)	iteration	CUtime(秒)
Single grid	3320	11662.1	5900	20513.4	4850	14963.1	10000 (収束せず)	37044.0
Multigrid	220	1451.0	450	2525.0	385	1764.96	420 (収束)	3010.3
性能比	15.1	8.04	13.1	8.12	12.59	8.47		

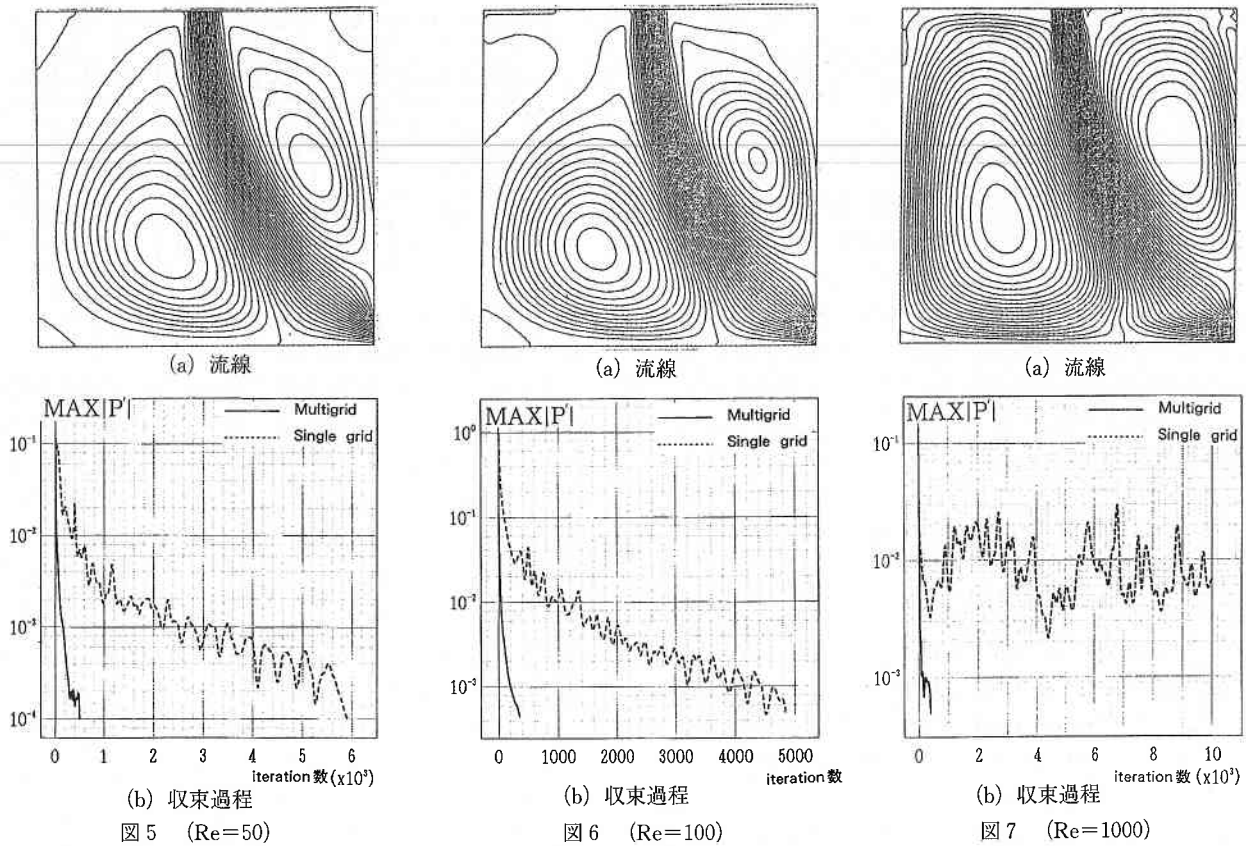


図 5 (Re=50)

図 6 (Re=100)

図 7 (Re=1000)

5.2.2 CASE2 (Re=100) の場合 計算結果を図 6 に示す。(a) は室内気流の流線分布, (b) は Multigrid 法と Single grid の収束状況を示す (収束条件は  $\text{MAX} |p'| < 5.0 \times 10^{-4}$ )。この場合, Single grid は収束まで 4850 回の反復を必要としたが, Multigrid は最密格子ではわずか 385 回であった。また, 収束解を得るまでの CPU 時間は Single grid は 14963.1 秒, Multigrid は 1764.9 秒であり, 加速率は 8.47 を達成した。

5.2.3 CASE3 (Re=1000) の場合 計算結果を図 7 に示す。(b) は Multigrid 法と Single grid の収束状況を示す (収束条件  $\text{MAX} |p'| < 5.0 \times 10^{-4}$ )。Re=1000 の場合, Single grid は 10000 step 計算しても収束しないのに対して, Multigrid は約 420 回で収束した。

5.3 収束過程の比較

Single grid の場合 Re 数が上がると, 収束性が悪くなり, 反復回数が増加する傾向がみられる, 吹出口の Re 数 1000 の場合, 全体流れ場が不安定で乱れた状態となり, Single grid では定常解が得られなかった。一方, Multigrid の場合, 3CASE とも収束するまでの反復回数は Re 数の増加により増加するが, 速かに収束解が得られている。特に吹出口の Re 数 1000 の場合も, 安定した計算が可能で, 定常解が得られた。

6. 3次元乱流室内気流の計算

6.1 計算概要

3次元正方形室内気流モデルを図 4 に示す。格子点数は 2重 grid から 4重 grid まで (表 3 参照) とする。格子間隔はいずれも均等とする。移流項は 1 次精度の power low スキームを採用した。境界条件を表 2 に示す。なお, Multigrid 法で近似解を求める際の収束回数として, 粗格子の場合 (図 2 の白丸), 修正方程式の反復回数はおのこの 1 回ずつの固定とし, B, E, J の点では 50 回固定の反復を行った。

6.2 k-ε モデルの場合の壁面境界条件

高 Re 数 k-ε 乱流モデルの場合, 壁面境界条件に対して, 壁法則を用いるので, 壁面の第一セル格子点が壁法則適用領域に入れる必要がある。Multigrid 法の場合, 各粗, 細格子で計算する時に, 壁面第一セル格子点がこの壁法則の適用範囲に入らない可能性が生ずる。本研究では最密格子においては壁面第一セルがこの壁法則の適用領域に入るものとしている。粗格子の壁境界条件を与える場合はまず細格子における分布性状から粗格子の壁面第一セルに補間した値を求め, さらに仮定された何らかの分布 (free slip や  $\frac{1}{7}$  乗則) に基づいて仮想セルの値を与える方法を利用した (表 2 を参照)。

6.3 計算結果

表3および図8~10に結果を示す. Multigrid法と比較するために最密格子のみによる計算(Single grid計算)も行った.

6.3.1 CASE1 (10×10×10, 20×20×20) 2重gridの場合. 収束条件として細密格子での圧力修正量の最大値  $\text{MAX}|p'| < 1.0 \times 10^{-4}$  を課した場合の計算では, 細密格子のみによる計算は収束まで515回の反復を必要としたのに対し, Multigridの場合, 最密格子での必要反復回数は合計435回(表3)であった. 図9, 10は計算した結果と実験結果の比較であり, よく一致していると考えられる. また, 収束解を得るまでのCPU時間はSS10(model 512) 計算機(約12MFLOPS)で, Single gridの場合は785.5秒必要としたのに対し, Multigridは714.6秒であった. このCASEの計算はgrid数が粗いので, 加速率は1.1に留まった.

6.3.2 CASE2 (10×10×10, 20×20×20, 40×40×40) 3重gridの場合(収束条件は  $\text{MAX}|p'| < 1.0 \times 10^{-4}$ ). 図8(a)はMultigrid法とSingle gridの収束状況を示す. この場合, Single gridは収束まで3225回の反復を必要としたが, Multigridは最密格子では1300回であった. また, 収束解を得るまでのCPU時間はSingle gridは76541.4秒, Multigridは19950.0秒であり, 加速率は2.33を達成した.

6.3.3 CASE3 (10×10×5, 20×20×10, 40×40×20, 80×80×40) 4重gridの場合. このCASEでは, 計算領域は高さ方向(z方向)に対称としているので, メモリを節約するため, 高さ方向の半分を計算した. 図8(b)はMultigrid法とSingle gridの収束状況を示す. Single gridは4200step計算して収束したのに対して, Multigridは732

表3: 各CASEのiteration数とCPUtimeの比較(収束条件  $\text{MAX}|p'| < 1.0 \times 10^{-4}$ )

CASE	CASE1 (10×10×10) (20×20×20)		CASE2 (10×10×10)(20×20×20) (40×40×40)		CASE3 (10×10×5) (20×20×10) (40×40×20) (80×80×40)	
	iteration	CPUtime	iteration	CPUtime	iteration	CPUtime
Multigrid	435	714.6	1300	19950.0	732	57345.5
Single grid	515	785.5	3225	46541.4	4200	242466.0
性能比	1.18	1.1	2.69	2.33	5.74	4.23

回で収束し, 加速率は4.23を達成した.

6.4 収束過程の比較

2次元層流の場合の加速率に比べ, 3次元乱流の場合の加速率はあまり大きくない. これは3次元の場合2次元の計算に比べ一方向の格子点数が小さい(case3で半分)であることも原因の一つである. (1) Single gridの場合, grid数が多くなると, 反復回数が大幅に増加する傾向がみられ, 収束性が悪くなる. (2) Multigridの場合, FMGによるgridの多重度の増加により, 加速率が増加する. 大規模な流体数値計算に対して, Multigridの効果は大きいと考えられる.

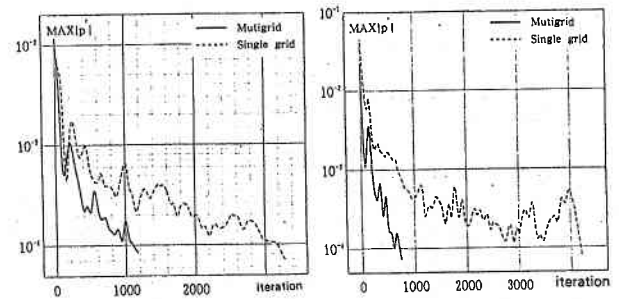


図8 収束過程

表2 境界条件

(1) 細格子  $G^k$  の境界条件:

④ 壁面境界条件: 速度:  $\frac{1}{7}$  乗の power law  
 $k$ : free slip  $\epsilon = \epsilon = C_\mu \frac{3}{4} k^2 / (\frac{1}{2} \kappa h_p)$

⑤ 吹出と吸込み口:  
 in flow:  $u_{in} = 1.0, v = w = 0.0, k = 0.005, \epsilon = C_\mu k^2 / l$   
 out flow:  $u_{out} = -1.0, v = w = 0.0, k, \epsilon$ : free slip  
 $C_\mu = 0.09, \kappa = 0.4, l = 0.01$   $h_p$ : 第一セル定義点から壁面までの距離

(2) 粗い格子  $G^{k-1}$  の壁面境界条件:  
 第一セル:  $u_p^{k-1} = (u_B^k + u_D^k) / 2$   
 $k_p^{k-1} = (k_A^k + k_B^k + k_C^k + k_D^k) / 4$   
 $\epsilon_p^{k-1} = (\epsilon_A^k + \epsilon_B^k + \epsilon_C^k + \epsilon_D^k) / 4$

P点の  $k, \epsilon$  の生産項  $S_p^\phi(\phi^{k-1})$  も細格子から補間して求める. 即ち, p点で計算する(24)式の生産項は  $S_p^\phi(\phi^{k-1}) - S_p^\phi(\phi^{k-1}) = 0$

となり,  $k, \epsilon$  方程式では, 移流拡散のみによる誤差修正を評価することになる.  
 仮想セル:  
 $u_p^{k-1} \propto [u_p^{k-1}]^{\frac{1}{7}} (\frac{1}{7} \text{乗}) \quad k_p^{k-1} = k_p^k \quad \epsilon_p^{k-1} = \epsilon_p^k$

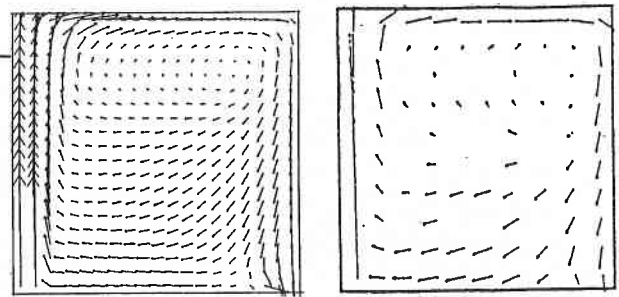


図9 aa断面の速度ベクトル(水平断面)

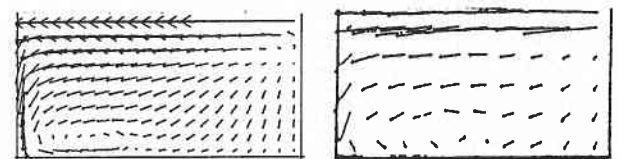
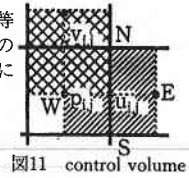


図10 bb断面の速度ベクトル(鉛直断面)

7. ま と め

- 1) 大規模な流体の数値シミュレーションにおいて緩和計算の加速が可能な Multigrid 法について説明し, LSOR 緩和を用いる SIMPLED 法に適用した.
- 2) これを用いて 2 次元層流室内気流を解析し, Multigrid 法が Single grid より約 8 倍以上の加速率を有することを確認した.
- 3) 高 Re 数の流れの場合 (吹出口の Re=1000) Single grid では, 安定した計算が行われなかったが, Multigrid 法では安定な定常解が容易に得られた.
- 4) 3 次元乱流 (k-ε モデル) の場合, 解析格子点の増加に伴い, Multigrid 法の加速率が增加する. しかし, 2 次元層流の場合に比べ, その加速率は相対的に小さい. 今回の例では, 最密格子点数 80×80×40 の 4 重 grid の場合, 加速率は 4.23 倍を達成した. なお, Multigrid 法について, 今回は図 2 に示す FMG を利用したが, このサイクルを種々調整すること (たとえば J→P のサイクルに G<sup>4</sup>→G<sup>3</sup>→G<sup>4</sup> のサイクルを挿入するなど) によって, さらに加速率を上じる余地を残している. (1993年12月16日受理)

注 2) 2 次元の場合で説明すると,  $\Sigma A^u \Sigma A^v$  等は  $u, v$  の方程式おのおの control volume 界面の移流・拡散 flux の定義点 (図 11 の E, W, N, S) における速度の内挿値に掛る係数の和である.



$$\Sigma A^u = A_E^u + A_W^u + A_N^u + A_S^u \quad (k)$$

注 3) 圧力修正量 p (prediction) の算定式は次式となる.

$$\begin{aligned} \Sigma A^p p_{ij} &= A_E^p p_{i+1, j} + A_W^p p_{i-1, j} + A_N^p p_{i, j+1} + A_S^p p_{i, j-1} + b_p \\ \Sigma A^p &= A_E^p + A_W^p + A_N^p + A_S^p \quad (l) \\ b_p &= (u_{ij}^* - u_{i-1, j}^*) \Delta y + (v_{ij}^* - v_{i, j-1}^*) \Delta x \\ A_E^p &= \Delta y^2 / \Sigma A^u_{ij}, \quad A_W^p = \Delta y^2 / \Sigma A^u_{i-1, j} \\ A_N^p &= \Delta x^2 / \Sigma A^v_{ij}, \quad A_S^p = \Delta x^2 / \Sigma A^v_{i, j-1} \end{aligned}$$

また, 圧力修正量 p (prediction) の算定式は (l) 式と同じ形となるが, 定数項  $b_p$  は異なり, 次式となる.

$$\begin{aligned} b_p^* &= \{ (\Sigma A_{nb}^u u_{nb}^* / \Sigma A_{ij}^u + S_D^u(u, v) / \Sigma A_{ij}^u) - (\Sigma A_{nb}^u u_{nb}^* / \Sigma A_{i-1, j}^u \\ &+ S_D^u(u, v) / \Sigma A_{i-1, j}^u) \} \Delta y + \{ (\Sigma A_{nb}^v v_{nb}^* / \Sigma A_{ij}^v + S_D^v(u, v) / \Sigma A_{ij}^v) \\ &- (\Sigma A_{nb}^v v_{nb}^* / \Sigma A_{i, j-1}^v + S_D^v(u, v) / \Sigma A_{i, j-1}^v) \} \Delta x \quad (m) \end{aligned}$$

注 4) (24) 式をスカラー量の修正方程式とした場合の  $S_D^k(\phi_c^{k-1})$  項は k と e 方程式の生産項と消散項の和である. k 方程式の場合,  $S_D^k(\phi_c^{k-1}) = P_{k,c}^{k-1} - \epsilon_c$  ここで,  $P_{k,c}^{k-1}$  は k 方程式の生産項であり, 細格子上的変数を粗格子に補間して評価する.

注 1) SIMPLED では, 運動方程式を prediction step と correction step の 2 段階に分けて計算し, SIMPLE 法で, 省略されている項の影響も考慮した圧力修正を行う<sup>16), 17)</sup>. SIMPLED の prediction step では, SIMPLE 法と同様の手順で求める. ここで, 2 次元の例を用いて説明する. まず, 適当な  $u, v, p$  の近似解を用いて (16) 式 (運動方程式) を解き運動方程式のみを満たす  $u^*, v^*$  を求める. 運動方程式, 連続式ともに満たす速度, 圧力  $u^{(p)}, v^{(p)}, p^{(p)}$  (prediction 値) に対して, 運動方程式のみを満たす速度, 圧力を  $u^*, v^*, p^*$  ( $=p$ ) とすると, 速度と圧力の修正量  $u', v', p'$  は次式で定義される.

$$\begin{aligned} u_{ij}^{(p)} &= u_{ij}^* + u'_{ij} \quad (a) \\ v_{ij}^{(p)} &= v_{ij}^* + v'_{ij} \quad (b) \\ p_{ij}^{(p)} &= p_{ij}^* + p'_{ij} \quad (c) \end{aligned}$$

(a), (b) 式を離散化された運動方程式 (16) 式に代入して, 整理すると,  $u, v$  の方程式が得られる

$$\Sigma A_{ij}^u u'_{ij} = \Sigma A_{nb}^u u'_{nb} + \Delta y (p'_W - p'_E) + S_D^u(u, v) \quad (d)$$

$$\Sigma A_{ij}^v v'_{ij} = \Sigma A_{nb}^v v'_{nb} + \Delta x (p'_N - p'_S) + S_D^v(u, v) \quad (e)$$

SIMPLE 法では  $I_u, I_v$  および  $\Pi_u, \Pi_v$  を省略した (d) (e) を連続式に代入し, 圧力の修正量 p の方程式を得る<sup>注 2)</sup>. SIMPLED 法では, SIMPLE 法を適用して  $u^{(p)}, v^{(p)}, p^{(p)}$  を求めた後, さらにこの省略した項の影響を考慮して correction step による修正を行う.

$$\begin{aligned} u_{ij} &= u_{ij}^{(p)} + u'_{ij} \quad (f) \\ v_{ij} &= v_{ij}^{(p)} + v'_{ij} \quad (g) \\ p_{ij} &= p_{ij}^{(p)} + p'_{ij} \quad (h) \end{aligned}$$

ここで,  $u_{ip}, v_{ip}, p_{ij}$  が求めている精確解である.  $u'_{ip}, v'_{ip}, p'_{ij}$  が SIMPLED 法では省略されていた項の影響による修正量である.  $u'_{ip}, v'_{ip}$  は次のように近似される.<sup>16), 17)</sup>

$$u'_{ij} = (\Sigma A_{nb}^u u'_{nb} + \Delta y (p'_{ij} - p'_{i+1, j}) + S_D^u(u, v)) / \Sigma A_{ij}^u \quad (i)$$

$$v'_{ij} = (\Sigma A_{nb}^v v'_{nb} + \Delta x (p'_{ij} - p'_{i, j-1}) + S_D^v(u, v)) / \Sigma A_{ij}^v \quad (j)$$

(i), (j) 式を (f), (g) 式に代入し, さらにこれを連続式に代入し, 圧力の correction 量  $p^*$  の方程式が得られる<sup>16), 17)</sup>

記 号

$L^k$ : 方程式の演算子添字 k と k-1 は各々細, 粗格子を示す.	$I_h^{k-1}$ : 細格子から粗格子への補間
$R^k$ : 細格子上の残差	$I_h^k$ : 粗格子から細格子への補間
$\Phi^k$ : 厳密解	$u_{ij,kl}$ : 細格子上的速度 (v,w も同様)
$\phi_1^k$ : 近似解	$u_{i,c,j,c}$ : 粗格子上的速度 (v,w も同様)
$\phi_2^{k-1}$ : 粗格子上の近似解	$p_{ij,kl}$ : 細格子上的圧力
$\delta^k$ : 残差修正値	$p_{i,c,j,c}$ : 粗格子上的圧力
$p'$ : 圧力修正量	$S_D^k$ : 変数 $\phi$ の source 項
$p$ : 圧力	$\phi$ : 変数 (u,v,w,k,ε)
$A_{nb}$ : 未知数周辺の係数	

参 考 文 献

- 1) A. Brandt (1973): Multi-Level Adaptive Technique (MLAT) for Fast Numerical Solution to Boundary Value Problems, proc. 3rd. Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Mechanics Vol. 1 H. Cabannes and R. Teman (eds) (Lecture Notes in Physics 18) Springer, Berlin, 82-89
- 2) A. Brandt: (1979) Multigrid-Level Adaptive Computations in Fluid Dynamics. AIAA Paper 79-1455
- 3) Hcakbusch. W (1977) On the Convergence of a Multigrid Iteration Applied of Finite Element Equations, Univertry Koln. Report, 77-8
- 4) J. P. Wasseling: An Introduction to Multigrid Methods John Wiley & Son 1991.
- 5) U. Ghia, K. N. Ghia, C. Y. Shin (1982): High-Re Solution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method J. Computational Physics 48, 387-411
- 6) S. P. Vanka: (1986) Block Implicit Multigrid Solution of Navier Stokes Equation in Primitive Variables J. Computational Physics 65, 138-158

- 7) 荒川忠一, 他: (1988) 多重格子法による N-S 方程式の分離解法の高速度化 日本機械学会論文集 (B 編) vol.: 54 No: 498
- 8) Y. P. Chin. and R. L. Street (1989) Three-Dimensional Unsteady Flow Simulations: Alternative Strategies for a Volume-Averaged Calculation Int. J. Numerical Methods in Fluids, Vol. 9. 341-362
- 9) R. E. Phillips and F. W. Schmidt (1985) A Multilevel-Multigrid Techniaue for Recirculating Flows Numerical Heat Transfer. Vol. 8. 573-594
- 10) Fuchs. L, Zhao, H. S. (1984) Solution of Three-Dimensional Viscous Incompressible Flows by a Multi-Grid Method, Int. J. Numerical. Methods in Fluids. Vol. 4, pp 539-555
- 11) M. C. Thompson, J. H. Ferziger (1989) An Adaptive Multiplied Technique for the Incompressible Navier-Stokes Equation J. Computational Physics 82:94-121
- 12) M. Hortmann, and M. Peric (1990): Finite Volume Multigrid Prediction of Laminar Natural Convection: Benchmark Solutions International Journal for Numerical Method in Fluids, 11:189~207, 1990
- 13) C. H. Bruneau, C. Jouron (1990): An Efficient Scheme for Solving Steady Incompressible NS Equation Journal of Computational Physics 89, 389~413 (1990)
- 14) J. Y. Tu (1992) Three-Dimensional Overlapping Grids and Multigrid Methods for Flow Calculations in Complex IC Engine Geometries Department of Mechanics Applied Computational Fluid Dynamics Royal Institute of Technology. Stockholm, Sweden
- 15) F. S. Lien and M. A. Leschziner (1990) Multigrid Convergence Acceleration for Complex Flow Including Turbbulence Third European Conf. on Multigrid Methods, Oct. 1990: GMD Bonn.
- 16) 張維, 村上周三, 持田灯: 定常解法による建物周辺気流の数値シミュレーション (その 1, その 2) 日本建築学会関東支部論文報告集, pp 76~87 東京 (1992.1)
- 17) 張維, 村上周三, 持田灯: 定常解法による建物周辺気流の数値シミュレーション (その 3) 日本建築大会論文概要集, 新潟 (1992.8)
- 18) 小国力, 他: 行列計算ソフトウェア, 丸善, 1991
- 19) 張維, 村上周三, 加藤信介: 並列処理による流体の数値解析に関する研究 (その 5) —Multigrid 法による流体の数値解析の高速度化 日本建築大会論文概要集, 関東 (1993.9)
- 20) 張維, 村上周三, 加藤信介: 並列処理による流体の数値解析に関する研究 (その 7) —Multigrid 法による 2 次元室内気流の数値解析— 空調衛生学会大会論文集, 大阪 (1993.10)
- 21) 張維, 村上周三, 加藤信介: Multigrid 法による 3 次元室内気流の数値解析 第 7 回日本数値流体力学シンポジウム論文集 (東京・中央大学) 1993.12.20
- 22) 村上周三, 加藤信介, 近藤靖史: 代数応力モデルによる 3 次元室内等温流れ場の解析 生産研究 Vol. 42 (1) (1990.1)