

## 有限要素法によるチャンネル乱流の LES

Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow using Finite Element Method

小林 敏雄\*・坪倉 誠\*・谷口 伸行\*・大島 まり\*

Toshio KOBAYASHI, Makoto TSUBOKURA, Nobuyuki TANIGUCHI and Marie OSHIMA

## 1. はじめに

LES (Large Eddy Simulation) は、高レイノルズ数、3次元性、非定常性といった、乱流現象の特徴を再現する計算手法として以前より注目されており、現在までに差分法を中心として多くの研究がなされており、単純な流れ場についてはその有用性は実証済みである。一方、工学、工業上求められる流れ場は、複雑な形状を有するものが多く、計算機能力の向上に伴い、LES をそういった流れ場に適用しようという研究も、数学モデル、数値計算手法の両面において盛んになりつつある。

本研究では、複雑な境界形状を有する流れ場に対して、比較的有利に適用できる有限要素法をLESに用いるための第一ステップとして、単純な流れ場であるチャンネル乱流を対象として、数値解析を行い平均速度、乱流強度、レイノルズ応力について、実験値、理論値と比較検討した。

## 2. 基礎式

基礎式は、質量の保存則（連続の式）と運動量の保存則（ナビエ・ストークスの方程式）に空間的なフィルターを操作した、以下のグリッドスケールの連続の式と運動方程式である。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \tau_{ij} \right\} \quad (2)$$

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \quad (3)$$

$$L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (4)$$

$$C_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}'_j + \bar{u}'_i \bar{u}_j} \quad (5)$$

$$R_{ij} = \overline{\bar{u}'_i \bar{u}'_j} \quad (6)$$

ここで、 $\bar{u}_i$  はグリッドスケールの速度、 $\bar{p}$  は、乱流圧力を含む圧力を表している。また、 $\rho$  は流体の密度、 $\nu$  は流体の動粘性係数を表している。式(4)、(5)、(6)は、Leonard, cross, Reynolds 項と呼ばれる、サブグリッドスケールの項である。本研究では、これらの項のモデル化に、Deardorff<sup>1)</sup>による初期のLES計算に採用されたモデル式(7)、(8)を用いる。

$$R_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} R_{kk} \approx -2 \nu_{sgs} \bar{S}_{ij} \quad (7)$$

$$L_{ij} + C_{ij} \approx 0 \quad (8)$$

ここに、 $\nu_{sgs}$  は、サブグリッドスケール渦粘性係数で、Smagorinsky<sup>2)</sup>によるモデル式(9)、(10)を用いる。通常は、式(7)、(8)、(9)、(10)をあわせて Smagorinsky モデルとよぶ。

$$\nu_{sgs} = (C_s \Delta)^2 (2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2} \quad (9)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (10)$$

ここに、 $C_s$  はモデル定数で本研究では、壁乱流における推奨値である0.1を用いた。また、 $\Delta$  は、サブグリッドスケールの長さスケールで、各要素の体積を  $V$  とすると、次のように与えた。

\*東京大学生産技術研究所 第2部

$$\Delta = (V)^{1/3} \quad (11)$$

ただし、サブグリッドの長さスケールには、Van Driest型の壁面減衰関数<sup>3)</sup>を乗じて壁面近傍を考慮する。

$$f = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right)$$

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad A^+ = 25 \quad (12)$$

ここに、 $y$  は壁からの距離、 $u_\tau$  は壁面摩擦速度、 $\tau_w$  は壁面摩擦応力を表している。

### 3. 有限要素法による離散化

基礎式を重み付き残差法により弱形式化した後、ガラーキン法により空間方向に離散化を行う。なお、速度は1次の、圧力は0次の補間関数(すなわち、エレメント内一定)を用いて離散化している。

時間方向に対しては、2次のAdams-Bashforth法を用いて陽的に離散化を行う。

圧力は、MAC法により解かれる。MAC法に基く有限要素行列式は、以下ようになる。

$$C^t M^{-1} C P^n = -\frac{1}{\Delta t} C^t u^n + C^t M^{-1} (1.5 F^n - 0.5 F^{n-1}) \quad (13)$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t M^{-1} [C P^n - 1.5 F^n - 0.5 F^{n-1}] \quad (14)$$

$$F^n = N(u^n) u^n + D(u^n) u^n \quad (15)$$

ここで、 $M$ 、 $C$ 、 $N$ 、 $D$ は、それぞれ、質量、勾配、対流、拡散マトリックスを表している。本研究では、質量マトリックスについて、質量集中化を行った。ここに、行列 $C^t M^{-1} C$ は、正定置対称マトリックスであり、式(13)は共役勾配法を用いて解くことができる。また、これらの、質量、勾配、対流、拡散マトリックスは流れ場全体のマトリックスとして記憶するのではなく、各エレメントごとに細分化して記憶している。そのため、本研究に用いたエレメント数7680個の内、形状が異なるのは、わずか20個であり、20個分のマトリックスしか記憶させていない。

なお、対流項については、厳密な有限要素離散化を行わずに以下に示す簡略化を行っている。

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} \approx \bar{U}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (16)$$

ここに $\bar{U}_j$ は、グリッドスケールの速度をエレメント内一定に近似した速度を表している。

## 4. 計算条件

### 4.1 計算領域

図1に計算領域を示す。主流方向を $y$ 、スパン方向を $x$ 、壁に垂直方向を $z$ としている。領域は、平板間隔を $H$ とすると、主流方向に $3.2H$ 、スパン方向に $0.6H$ である。用いた要素数は、主流方向に32個、スパン方向に6個、壁に垂直方向に40個である。ただし、壁方向には不等間隔の要素を用いている。スパン方向については、より厳密な乱流構造を捕えるためには、より長い、長さとともに多くの要素を必要とすると思われるが、計算機の能力による制約より、本研究では上記の長さ要素数とした。

### 4.2 境界条件

$x$  および、 $z$  方向には周期境界条件、壁では non-slip 条件を課した。

### 4.3 初期条件

初期条件として、当初、空間的に乱流構造をもつ流れ場を与えるために、2次元のチャンネル間流れ(コードは、3次元のものを用いスパン方向に長さ0.1のエレメントを1つだけ使う。)をLESにより解析し、ランダムに数ステップ抽出し、スパン方向に並べて3次元計算の初期値としようとしたが、2次元LESの計算において、周期境界条件を用いた場合、最初の数秒で、壁面近傍で乱れが減衰し、さらに平均速度が層流化し、以後20秒までに有意な解が得られなかった。

そこで、平均速度は普遍的速度分布として経験則によるSpalding則<sup>4)</sup>(式(17))により与え、乱れは流れ方向のみ、Kreplin<sup>5)</sup>らの実験値の2.5倍の乱れに正規乱数を乗じたものとして与え、それぞれを和したものを初期値として用いた。

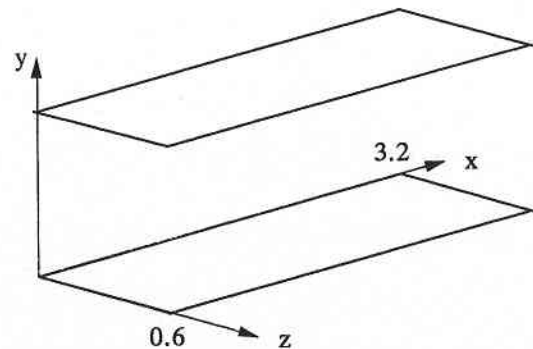


図1 流れ場の概観

$$F(y^+, u^+) = u^+ - y^+ +$$

$$+ \exp(-\kappa \cdot B) \cdot \left[ \exp(\kappa \cdot u^+) - 1 - (\kappa \cdot u^+) - \frac{(\kappa \cdot u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa \cdot u^+)^3}{6} \right] = 0$$

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \tag{17}$$

ここに、 $\kappa$ は0.4、 $B$ は5.5である。

#### 4.4 設定条件

壁面摩擦速度を代表速度、チャンネル幅を代表長さとするレイノルズ数で300と、1200の2ケースについて、解析を行った。時間の刻み幅は、0.001である。また、式(13)の離散化されたポアソン方程式は、共役勾配法 (CG 法) を用いて解かれ、このときの CG 法の反復の収束条件は $10^{-10}$ である。

なお、主流方向に無次元圧力勾配-2を与えることで、主流方向の流れを維持している。

また、統計量、主流方向の平均速度については、16秒まで計算した後、4秒間の時間、空間の平均をとっている。

### 5. 計算結果

図2に、主流方向の平均速度分布を示す。○印はレイノルズ数300、△印は1200の時の結果である。

図3、4、5に、グリッドスケールの乱流強度分布を示す。スパン方向の乱流強度 (図4) は、実験結果と比較的よく一致しているが、流れ方向の乱流強度 (図5) はレイノルズ数300、1200のどちらのケースについても、実験結果よりかなり大きいことがわかる。また、壁に垂直方向の乱流強度は、壁近傍でのみ、やや小さいがそれ以外は比較的实验値に近い値であることがわかる。

図6は、グリッドスケールのレイノルズ応力分布を示している。流れ方向の乱流強度と同様、壁近傍で理論値より

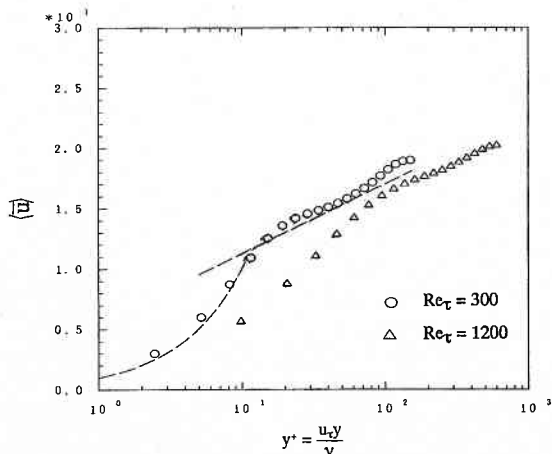


図2 主流方向平均速度分布

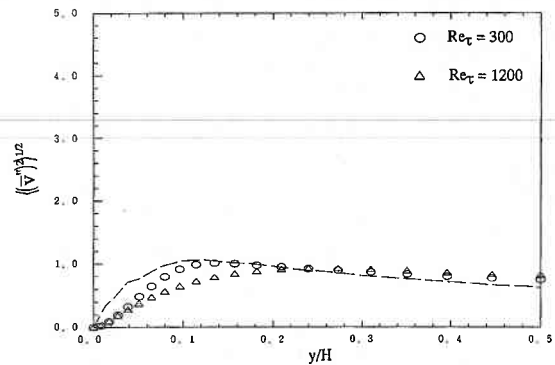


図3 壁に垂直方向乱流強度分布 (グリッドスケール)

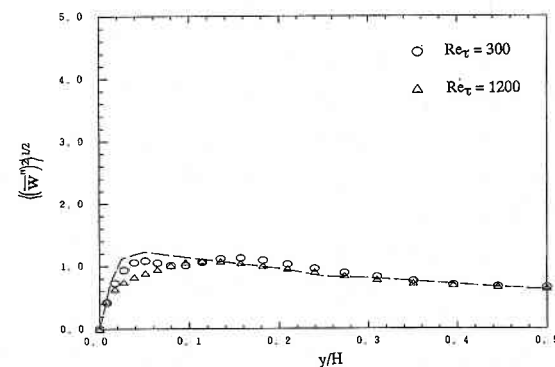


図4 スパン方向乱流強度分布 (グリッドスケール)

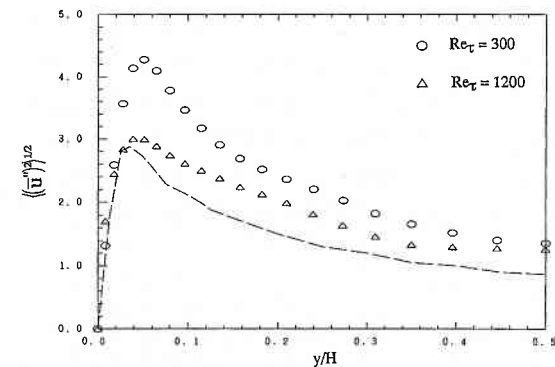


図5 主流方向乱流強度分布 (グリッドスケール)

大きくなっている。

なお、実験値には Kreplin<sup>5)</sup>らの結果を示している。

### 6. 結論と今後の課題

平行平板間乱流を LES により、有限要素法を用いて解析した。その際、スパン方向に1エレメント用いた場合有意な解は得られなかったが、6エレメント用いることで、定性的に求めることができた。スパン方向の要素数と長さを十分とることで、定量的にもより実験値、理論値に近い

## 研究速報

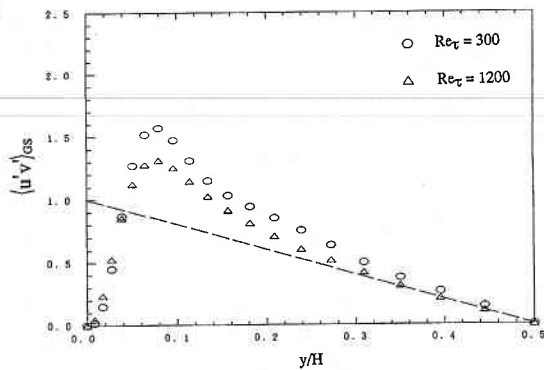


図6 レイノルズ応力分布(グリッドスケール成分)

値が得られるものと思われる。

现阶段で有限要素法を用いる問題点として、(1) 対流項のフォーム、(2) 壁面境界条件の処理、などがあげられる。

(1) については、大きく2つに分けられる。ひとつは、今回用いた対流項の離散化の方法を採用した場合、先に述べたように、速度についてエレメント内で平均をとる操作をしているので、この影響がどの程度、どのように現われるか、どの程度のエレメントを用いればその影響が無視しうるか、ということである。有限要素法においては、このような簡略化は、計算速度をあげるためには、必要とされることが多いので、このことは重要な問題である。もうひとつは、非圧縮性流体について、物理的な保存則(エネルギー)を満たすために、一般に差分法では中心差分を行うことにより、エネルギー保存型の対流項の離散化は容易に行えるが、有限要素法の離散化については弱形式化を行っているので、離散化前の対流項に保存形を用いても、離散化後、離散的に保存性を満たす保証がないということ

である。これは弱形式化により離散化を行う有限要素法の弱点のひとつであり、重要な研究課題でもある。

(2) については、差分法に比べて同じ接点数でもかなり大きなメモリーを必要とする有限要素法においては、エレメント数の節約は大きな課題のひとつである。また、有限要素法は、複雑な境界を有する流れ場に適用するために用いるので、なんらかの法則を壁面の境界条件に導入することは、必要かつ有効なことである。

今後、以上述べた2項目についての研究が必要である。

また、本計算において、1ステップの計算時間に差分法の約10倍の計算時間を要した。この原因の1つとして、離散化の違いによる計算量の多さとは別に、差分法にくらべて、有限要素法の計算コードは、ベクトル化が進めにくいことが挙げられる。このことも、早急に解決すべき問題のひとつである。

(1993年11月10日受理)

## 参考文献

- 1) Deardorff, J.W., "A Numerical Study of Three Dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Number", J. Fluid Mech. 41, part 2, pp. 453-480 (1970)
- 2) Smagorinsky, J., "General Circulation Experiments with the Primitive Equations. I. The Basic Experiment", Monthly Weather Review 91, pp. 99-164 (1963)
- 3) Van Driest, E.R., "On Turbulent Flow Near a Wall", J. Aero. Sci. 23 (1956)
- 4) Spalding, D.B., "A Single Formula for the "Law of the Wall, Trans. ASME, J. Appl. Mech. 28, pp. 455-458 (1961)
- 5) Kreplin, H. and Eckermann, H., "Behavior of the Three Fluctuating Velocity Components in the Wall Region of Turbulent Channel Flow." Phy. Fluids 22 (7), pp. 1233-1239 (1979)