

非平衡渦粘性乱流モデルの研究

—— 一様せん断乱流と前方ステップ乱流への適用 ——

Study of a Turbulence Model Based on a Nonequilibrium Representation of the Eddy Viscosity
—— Applications to Homogeneous Shear Flow and Forward-Facing Step Flow ——

西島 勝一
Shoiti NISIZIMA

1. はじめに

工学的研究分野での乱流数値解析にあたっては、構造が比較的簡単で計算時間が少なくすむ等の理由から、 $k-\varepsilon$ モデルが多用されている。しかし、このモデルは工学上重要な乱流の数値解析において的確な予測ができない場合が少なくない。たとえば、

- 1) 一様せん断乱流の数値解析においては、渦粘性のモデル定数 C_v を変化させないと有効な結果がえられない¹⁾。
- 2) 建物周辺の流れにおいては、建物上流や上方の乱流エネルギー値を過大に算出してしまふ²⁾。

本研究は、この $k-\varepsilon$ モデルの欠点を改善することを目指している。

吉澤は統計理論 (TSDIA) を駆使して、先に、レイノルズ応力の非等方渦粘性表現を導出した³⁾。最近、このモデルを発展させて、非平衡渦粘性表現に基づく乱流モデルを提起した⁴⁾。このモデルは渦粘性率の値がラグランジェ微分、すなわち時間微分および移流効果を受け、流体の履歴を反映するように変化するものとなっている。

本論文では、この非平衡渦粘性表現モデルを提起し、これを一様せん断乱流と前方ステップ乱流の数値解析に適用する。その数値解析結果を、Direct Numerical Simulation (DNS) や $k-\varepsilon$ モデルによる解析値と比較して、非平衡渦粘性表現モデルの定性的検討を行う。

2. 非平衡渦粘性 ($k-\varepsilon$) モデル

速度、圧力 (密度で割ったもの) のアンサンブル平均部分とそれからのずれを示す擾乱部分をそれぞれ (\bar{v}, \bar{p}) と (v', p') で表すと、三次元非圧縮・粘性流体に対する平均部分の基本方程式は、

$$\frac{D\bar{v}_\alpha}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) \bar{v}_\alpha = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(R_{\alpha\alpha} + \nu \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (2)$$

で与えられる (アルファベットのつぎ添字については 1 から 3 まで和をとることにする)。ここで、 ν は動粘性率、 $R_{\alpha\alpha}$ はいわゆるレイノルズ応力で、擾乱場の基本的統計量として乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ε を選び、次のとおり表す：

$$R_{\alpha\beta} = -\langle v_\alpha' v_\beta' \rangle = -\frac{2}{3} k \delta_{\alpha\beta} + \nu_e \left(\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (3)$$

$$\nu_e = C_v \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (4)$$

ここで $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表し、 $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタ記号、 ν_e は渦粘性率、 C_v は定数である。この式は次の k および ε 方程式と連立させる事により解く事ができる。

$$\frac{Dk}{Dt} = R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(\frac{\nu_e}{C_k} \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_a^2} \quad (5)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(\frac{\nu_e}{C_{\varepsilon 3}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_a^2} \quad (6)$$

モデル定数は、一般的に使用されている次の値を用いる⁵⁾。

$$C_v = 0.09, C_k = 1.0, C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.9, C_{\varepsilon 3} = 1.3 \quad (7)$$

以上の各式は、 $k-\varepsilon$ モデルそのものである。吉澤は統計理論を駆使して、式 (4) の渦粘性表現に流体の履歴を反映させるモデルを提起した⁴⁾。すなわち：

*東京大学生産技術研究所 第1部

研 究 速 報

$$v_i = v_e \left\{ 1 - C_i \frac{k}{\epsilon} \frac{D}{Dt} \log(v_e) \right\} \quad (8)$$

$$R_{12} = v_i \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \quad (13)$$

これは、次のように変形することによって各種乱流の数値解析へ適用しやすくなると予想される。

$$v_i = v_e / \left\{ 1 + C_{d1} \frac{k}{\epsilon} \frac{D}{Dt} \log(v_e) \right\} \quad (9a)$$

$$v_i = v_e \exp \left\{ -C_{d2} \frac{k}{\epsilon} \frac{D}{Dt} \log(v_e) \right\} \quad (9b)$$

この v_i を式 (4) v_e の代わりに用いれば非平衡渦粘性モデルの解が得られる。

3. 一様せん断乱流への適用

図 1 に表される一様せん断乱流は次のとおり条件付けられている。

$$\bar{v}_1 = f(x_2), \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = 0, \quad s = \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} = \text{constant} \quad (10)$$

ここで、 $s = \partial \bar{v}_1 / \partial x_2$ 値は場所と時間の双方に関し不変であり、この流れは時間発展だけに支配されているという特徴をもっている。支配方程式は、

$$\frac{\partial k}{\partial t} = R_{12} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} - \epsilon \quad (11)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} R_{12} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (12)$$

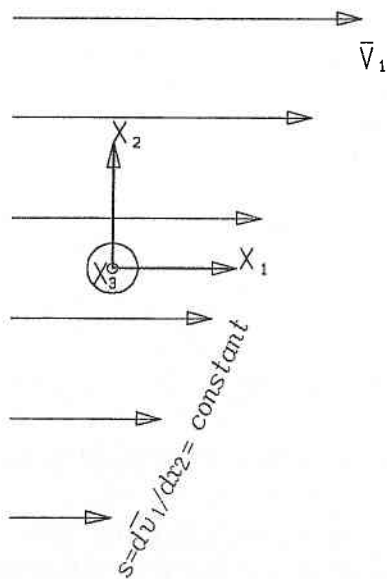


図 1 一様せん断乱流の座標

となる。

この流れを通常の $k-\epsilon$ モデルで数値解析すると、 k, ϵ とも DNS の解析値¹⁾ より異常に大きくなってしまふ事は長野・松本によって確かめられている¹⁾。ここで式 (4) の渦粘性率 v_e を式 (9a) に代えた吉澤モデルを適用してこの流れを数値解析して見る。はじめに、通常 $k-\epsilon$ モデルで長野・松本の結果を再現し、計算プログラムの点検を行った。 $s = \partial \bar{v}_1 / \partial x_2 = 28.28$ の流れの結果を図 2 に示す。数値計算方法は 4 次の Runge-Kutta-Gill 法を用い、時間刻み $\Delta st = 1/20$ 、初期値は DNS¹⁾ による解析値を採用した。この図から、長野・松本が指摘した $k-\epsilon$ モデルの欠点が再現されていることがわかる。

次に (9a) の定数を、

$$C_{d1} = 1.3 \quad (14)$$

としての数値解析結果を図 3、図 4 に示す。図 3 と図 4 の違いは計算の出発 (初期) 値が異なっていることにある。図 2 - 図 4 の結果から、非平衡渦粘性モデルが DNS 解析値の再現に有効であることがわかる。

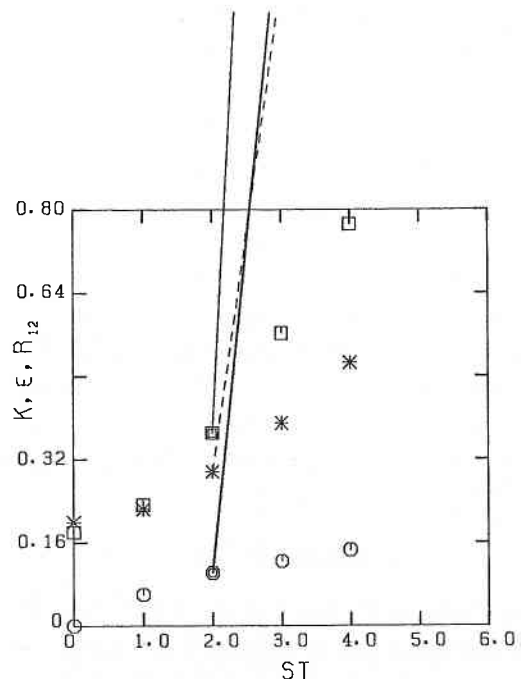


図 2 $k-\epsilon$ モデルによる数値解析結果
(一様せん断乱流, 解析出発値 ($st=2$))
・*・ Com : k ; -□- Com : ϵ ; -○- Com : R_{12} ; * DNS : k ; □ DNS : ϵ ; ○ DNS : R_{12} .

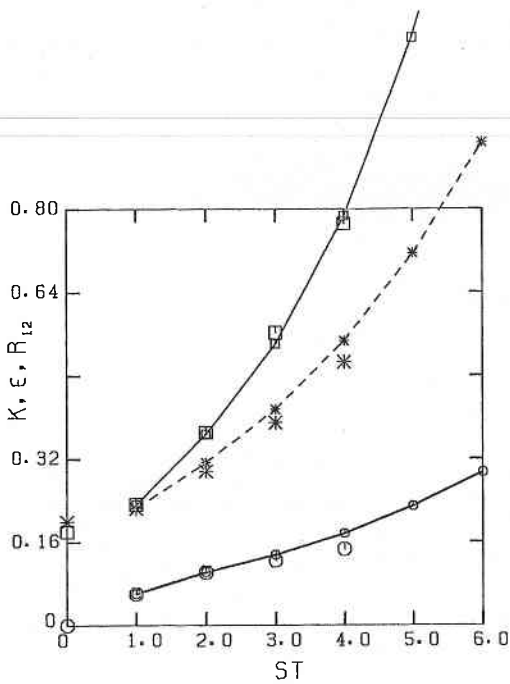


図3 非平衡渦粘性モデルによる数値解析結果
(一様せん断乱流, $C_{d1}=1.3$, 解析出発値 $st=1$)
・*・ Com : k ; —□— Com : ϵ ; —○— Com : R_{12} ; * DNS : k ; □ DNS : ϵ ; ○ DNS : R_{12} .

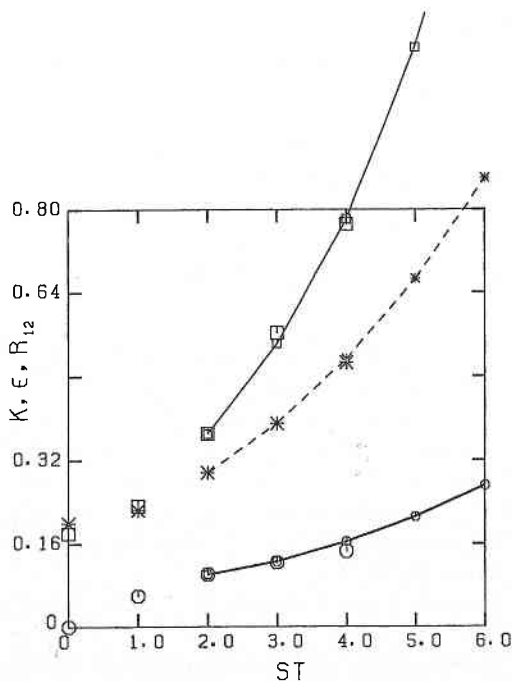


図4 非平衡渦粘性モデルによる数値解析結果
(一様せん断乱流, $C_{d1}=1.3$, 解析出発値 $st=2$)
・*・ Com : k ; —□— Com : ϵ ; —○— Com : R_{12} ; * DNS : k ; □ DNS : ϵ ; ○ DNS : R_{12} .

4. 前方ステップ乱流への適用

村上らは建物周りの流れの解析²⁾において、 $k-\epsilon$ モデルによる数値解析結果は「実験値に比べて、建物の上流と上面において乱流エネルギーを過大に算出してしまふ」欠点がある事を明らかにした。本節ではこの欠点の改善を目的として、ステップに向かって流速が急変し剝離を伴う等定性的には建物回りの流れに近いと思われる前方ステップ乱流の解析を試みた。ここで、非平衡渦粘性モデルが定性的に、通常 $k-\epsilon$ モデルの欠点を改善できる事が明らかにされたならば、次には、実験値が発表されている流れに適用して定量的な最適化を行う予定である。

今回、数値解析の対象として選んだ前方ステップ乱流は、図5(格子点の配置)の形状である。数値解析の計算方法は、溝乱流や正方形管内乱流の時に用いた手法^{6),7)}を踏襲した。流れ関数 ψ を導入して流れ関数はSOR法、渦度 ω , k , ϵ はCrank-Nicolson法を用いて解いている。格子点の配置は図5のように壁近くに多くの点を配置した不等間隔メッシュを用い、両壁間に60、入り口と出口間に100個配置した。壁上で滑り無し境界条件を用いるように壁減衰関数を導入した⁸⁾。境界条件は次のとおり表される。

$$\psi = \int \bar{v}_1 dx_2, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad (f = \bar{v}_1, k, \epsilon) \quad [\text{at the inlet}] \quad (15)$$

$$\psi = k = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}, \quad \epsilon = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_2^2} \quad [\text{on the wall}] \quad (16)$$

$$\psi = \text{constant}, \quad \omega = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial x_2} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x_2} = 0 \quad [\text{at the center-line of channel}] \quad (17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad [\text{at the outlet}] \quad (18)$$

なお、入り口の値は \bar{v}_1 , k , ϵ の連立方程式より算出した。断面平均流速と溝間の半分長で表わされるレイノルズ数は20140で、計算時間は平均流速で溝入り口から出口までの距離の2倍以上を通過したことに相当しており、定性的検討は可能と思える。

通常の $k-\epsilon$ モデルによる解析では式(4)の渦粘性率を用い、非平衡モデルでは式(9b)の定数 $C_{d2}=0.003$ を用いている。現在、本研究は進行途中であり、一様せん断乱流解析での式(9a)適用との整合性(本節では(9b)を適用)や、定数の最適化等の課題は未解決となっている。両モデル間の違いを図6-図7に示す。明らかに、非平衡モデルはステップ上流と上面の k の値を減少させるように

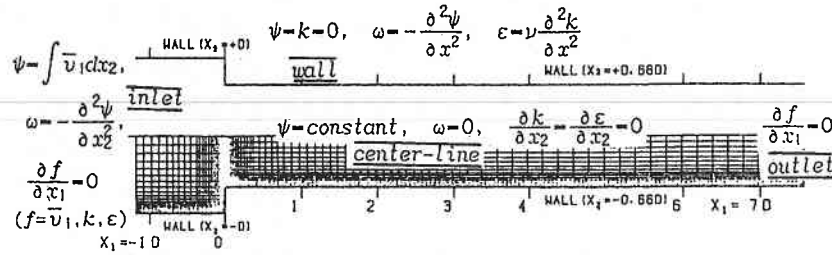


図5 前方ステップ乱流における数値解析の格子点

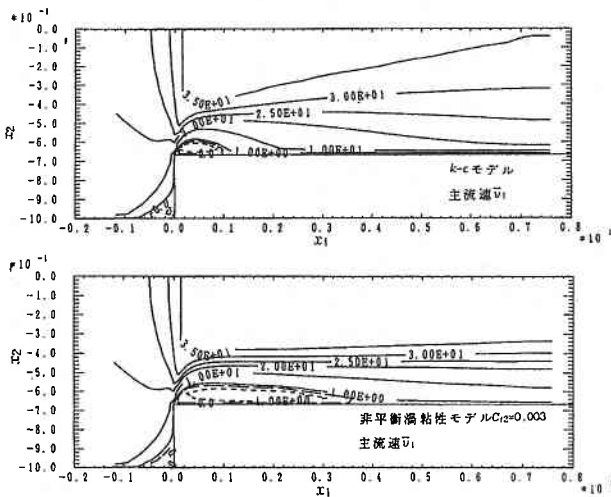


図6 主流速 v_1 の等値線図
(前方ステップ乱流, 上図: $k-\epsilon$ モデル, 下図: 非平衡渦粘性モデル $C_2=0.003$)

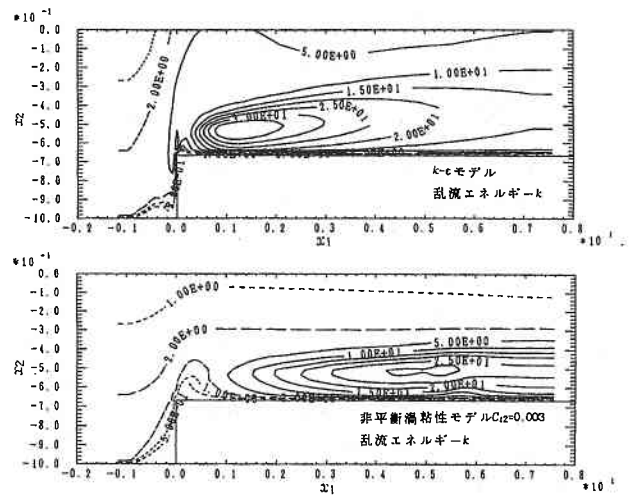


図7 乱流エネルギー k の等値線図
(前方ステップ乱流, 上図: $k-\epsilon$ モデル, 下図: 非平衡渦粘性モデル $C_2=0.003$)

解析していることがわかる。また、これに伴い、ステップ後方の循環流領域の長さが拡大する特徴も示されている。

5. 結 論

統計理論的結果を用いての非平衡渦粘性 ($k-\epsilon$) 乱流モデルは、一般的に使用されているモデル定数を変化させることなく、一様せん断乱流と前方ステップ乱流をシミュレートできることを示した。特に、 $k-\epsilon$ による乱流エネルギー等の過大評価を是正する性質があることがわかった。渦粘性率の表現 (式 (9a) か (9b) それとも他の表現か等) や定数の最適化を行うことによって、一様せん断乱流や(剥離を伴い流速が急変する領域を含む) 建物回りの乱流等の数値解析に有効なモデルとなる事が期待される。

謝 辞

本研究を進めるにあたり、吉澤徹博士から、特に、モデ

ルについて有益なご指導・助言をいただきました。ここに、感謝の意を表します。(1993年11月11日受理)

参 考 文 献

- 1) 長野・松本: 乱流伝熱シミュレーションモデルに関する調査 (III) 報告書, 東京理科大, (1993), p 10.
- 2) 村上・持田・林: 生産研究, 41 (1989), p 44.
- 3) Yoshizawa, A. : Phys. Fluids, 27 (1984), p 1377.
- 4) Yoshizawa, A. and Nisizima, S. : Phys. Fluids, A5 (1993), p 3302.
- 5) P. C. T. Bradshaw and T. H. Whitelaw : Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow, Academic Press (1981), 37.
- 6) Nisizima, S. and Yoshizawa, A. : AIAAJ., 25 (1987), 414.
- 7) Nisizima, S. : Theoret. Comput. Fluid Dynamics, 2 (1990), 61.
- 8) 西島: 機論B, 59-566 (1993), p 3032.