

軸対称旋回流の数値解析における非等方 $k-\epsilon$ モデルの 非線形項係数 C_2 の考察

Discussion for Optimization of the Coefficient of C_2 Appearing
in Non-linear Terms of an Anisotropic $k-\epsilon$ Turbulence Model
by the Analysis of Axisymmetric Swirling Flow

李 蓮 源*・小林 敏 雄*

YeonWon LEE and Toshio KOBAYASHI

1. はじめに

旋回流は強い流線曲率を持つ物理的に複雑な 3 次元流れ場の一つである。その顕著な特徴は軸方向速度が最大になる位置が壁の方へ移って行く点と、接線方向の旋回速度が長く持続するという点である。乱流によるエネルギーカスケード効果のみに注意を払っている従来の渦粘性乱流モデルでは、旋回は実験に比べてずっと速く減衰してしまう。この問題を解決するため、さまざまな工夫がなされた。代表的なものとして旋回流の構造を持続させるため Richardson 数を利用する Kim and Chung (1987)¹⁾、Karasu (1980)²⁾ の修正等が挙げられる。Karasu は Lilley and Chigier (1971)³⁾ が半実験的な手法を用いて、旋回にとって重要な渦粘性係数を混合長理論の表式として提案したものを管内旋回流に適用し、改善をもたらした。さらに、この混合距離に方向依存性 (乱れの異方性) を考慮する試み小林ら (1986)⁴⁾ によってなされた。

しかし、このような大部分の修正型モデルは特定の旋回流の予測にはある程度改善はもたらすが、本質的に一般性を持っていない欠点がある。最近、小林らの修正式および非等方乱流モデルを適用した西村 (1990)⁵⁾ による旋回流の解析が成されたが、一般性をもつモデルとして効果的な改善は見られなかった。西村は旋回流における非等方乱流モデルによる計算結果、改善ができなかった理由について論理的に触れていない。また、非線形項に現れる係数 C_2 がまだ確立されたとは言えない (西島, 1991)⁶⁾ という点に注目し、ここでは旋回流を対象にして数値解析を行い、非等方乱流モデルの物理的な機構を調べるとともに係数 C_2 を検討する。

*韓国釜山工業大学

**東京大学生産技術研究所 第 2 部

2. 非等方 $k-\epsilon$ 乱流モデル

2.1 非等方 $k-\epsilon$ 乱流モデル

非等方 $k-\epsilon$ 乱流モデルは TSDIA (Two Scale Direct Interaction Approximation) を利用し、Yoshizawa (1984)⁷⁾ が最初に提案した。その後、Speziale (1987)⁸⁾ が asymptotic expansion 法によって realizability および不変性条件を満たす非線形 $k-1$, $k-\epsilon$ モデルを導いた。また、Myong (1988)⁸⁾ は乱流エネルギー輸送方程式の項を再分析して、Yoshizawa と同形式の非等方 $k-\epsilon$ 乱流モデルを提案している。他の非等方モデルとして RNG (Renormalization Group) 理論による Rubinstein (1991)¹⁰⁾ のものもある。Yoshizawa-Myong の非等方 $k-\epsilon$ 乱流モデルの Reynolds 応力表現は次式で与えられる。ここに C_1 , C_2 , C_3 はモデル定数である。

$$\overline{\rho u_i u_j} = \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{k}{\epsilon} \mu_t \sum_{m=1}^3 C_m (S_{mj} - \frac{1}{3} S_{mm} \delta_{ij})$$

$$\mu_t = C_{\mu} \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (1)$$

$$S_{1ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \frac{\partial U_j}{\partial x_m}$$

$$S_{2ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_m}{\partial x_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} + \frac{\partial U_m}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right)$$

$$S_{3ij} = \frac{\partial U_m}{\partial x_i} \frac{\partial U_m}{\partial x_j}$$

2.2 非線形項における係数 C_2 について

表 1 からわかるように非等方 $k-\epsilon$ モデルの係数は提案者によって、低 Reynolds 数の減衰関数または Reynolds 応力の表現などが少しずつ異なるが、本質的に問題になっ

研 究 速 報

Table 1 Coefficients in Nonlinear Terms of Anisotropic k-ε Model

No.	C ₁	C ₂	C ₃	Desc.
Myong	0.8	0.45	-0.15	k-εq
Nishijima	0.63	-4.11	-0.074	TSDIA
Rubinsten	0.38	1.156	-0.156	RNG
Speziale	0.456	0.156	-0.156	tensor

Table 2 Order of Spatial Terms (refer to Ref. No. 4)

$\frac{\partial U}{\partial x}$	$\frac{\partial U}{\partial r}$	$\frac{\partial V}{\partial x}$	$\frac{\partial V}{\partial r}$	$\frac{\partial W}{\partial x}$	$\frac{\partial W}{\partial r}$
Θ(10 ⁻²)	Θ(10 ⁰)	Θ(10 ⁻⁴)	Θ(10 ⁻²)	Θ(10 ⁻²)	Θ(10 ⁰ -10 ¹)

ているのは係数 C₂である。西島は他の研究者とは異なる負の値を使っている。この理由について西島は C₂の値をもし正にすると正方形 duct の二次流れがうまく再現されないことを挙げた。しかし、同じ形状の計算で明、小林 (1991)¹¹⁾は C₂に関連する項を全部落とした計算でも二次流れをうまく再現できることを示した。この事実から正方形 duct の流れは C₂にほとんど依存しないことがわかる。したがって、西島の結果は、むしろ k および ε 方程式において相互拡散を含む式が使われたことや減衰関数の表式などに強く関係するものと思われる。さらに、Rubinsten (1991)¹⁰⁾によると、連続体力学の座標不変性仮定から C₂は正になると考察している。したがって、Yoshizawa-Myong 型のモデルの信頼性を高めるため、数値実験

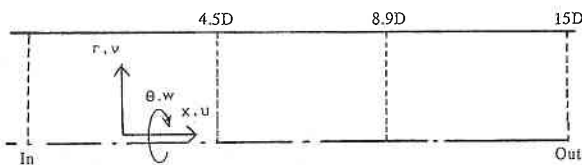


Fig. 1 Calculation Domain of Flow Field of an Axisymmetric Pipe Flow.

による再評価が必要である。ここでは C₂の効果が顕著に現れる軸対称旋回流 (図 1) を対象として物理的機構を解析するとともに、最適化を行う。

3. 計算結果および考察

3.1 軸対称旋回流の Reynolds 応力

速度勾配に対して表 2 を参考し、各項をオーダ解析 (たとえば Tennekes and Lumley (1972) に現われるように乱流解析の時しばしば利用される order of magnitude 法) すると、軸対称旋回流の Reynolds 応力の成分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \overline{uu} = & \frac{2}{3}k - \nu_t \left(2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ & + \frac{1}{3} \frac{k}{\epsilon} \nu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 (2C_1 - C_3) \right. \\ & + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 (-C_1 - C_3) \\ & + \left(\frac{W}{r} \right)^2 (-C_1 - C_3) \\ & \left. + \frac{W}{r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) (2C_2) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \overline{vv} = & \frac{2}{3}k - \nu_t \left(2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) \\ & + \frac{1}{3} \frac{k}{\epsilon} \nu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 (-C_1 + 2C_3) \right. \\ & + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 (-C_1 + 2C_3) \\ & + \left(\frac{W}{r} \right)^2 (2C_1 - C_3) \\ & \left. + \frac{W}{r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) (-C_2) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \overline{ww} = & \frac{2}{3}k - \nu_t \left(2 \frac{V}{r} \right) \\ & + \frac{1}{3} \frac{k}{\epsilon} \nu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 (-C_1 - C_3) \right. \\ & + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 (2C_1 - C_3) \\ & + \left(\frac{W}{r} \right)^2 (-C_1 + 2C_3) \\ & \left. + \frac{W}{r} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) (-C_2) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\overline{uv} = -\nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \overline{uw} = & -\nu_t \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ & + \frac{k}{\epsilon} \nu_t \left[C_1 \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{1}{2} C_2 \frac{W}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\overline{vw} = -\nu_t \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \quad (7)$$

また、(8)式のように仮定すると、(9)-(12)式になる。

$$\Theta \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \approx \Theta \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) \approx \Theta \left(\frac{W}{r} \right) \approx 1 \quad (8)$$

$$\overline{uu} \approx 2C_2 - 3C_3 \quad (9)$$

$$\overline{vv} \approx 3C_3 - C_2 \quad (10)$$

$$\overline{ww} \approx -C_2 \quad (11)$$

$$\overline{uw} \approx C_1 - 0.5C_2 \quad (12)$$

ここで、 C_1 、 C_3 はそれぞれ0.8、 -0.15 として定まっているものとする、もし C_2 の値が負になると、 \overline{uu} においては C_3 の部分とお互い相殺してしまうことになる。しかし、係数 C_2 が正になると \overline{uu} への非等方効果は大きくなり、せん断応力が改善されなくとも軸方向の速度に改善をもたらす可能性がある(13式)。しかしながら、この場合でも \overline{uw} はほとんど変わらないので旋回速度の改善は出来ないことが予想される(14式)。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu[\dots] - \left[\frac{\partial \overline{uu}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \overline{uw}}{\partial r} \right] \quad (13)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{VW}{r} = \nu[\dots] - \left[\frac{\partial \overline{uw}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \overline{vw}}{\partial r} + \frac{\overline{vw}}{r} \right] \quad (14)$$

Reynolds 応力が運動方程式と関係する時 \overline{uu} 、 \overline{uw} は軸方向の微分として \overline{uv} 、 \overline{vw} は半径方向の微分として関係するが、大きく影響する \overline{uv} 、 \overline{vw} に対するオーダー評価からわかるように非等方項による貢献は見られないので、本質的に旋回流を改善する機構をもっていないと判断される。したがって、ヘリシテイ等を積極的に導入する必要が生じてくる。

3.2 計算結果

図1は計算対象であり、実験は小林ら(1986)⁴⁾が利用したものと同じである。小林らの計算では直径の9倍(9D)の計算領域において半径方向20、軸方向36の等間隔格子を利用した。本計算はそれを踏まえて出口の影響小さくするため15Dの領域を設定し、半径方向22、軸方向72の等間隔格子を使用し計算を行い、4.5Dおよび8.9Dの位置で比較してみた。図2、3の結果からわかるように前節の解析と同じ結果が得られた。すなわち、軸方向速度Uは係数 C_2 が大きくなるにつれ実験値に近い結果を与えてくる。しかし、図4、5の結果から旋回速度Wはほとんど変わらないことがわかる。 C_2 の係数について2.0以上の値を使うと、図2の軸方向の速度分布の場合対称軸側は実験値にもっと近くなるが質量保存のため peak 部分が実

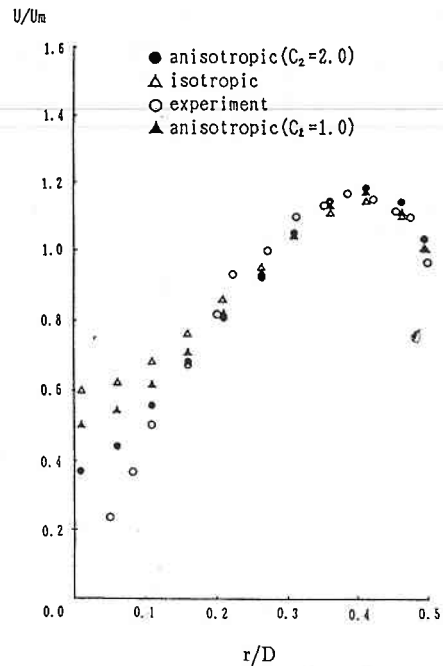


Fig. 2 Axial Velocity Distribution of an Axisymmetric Pipe Flow. (a) 4.5 D section.

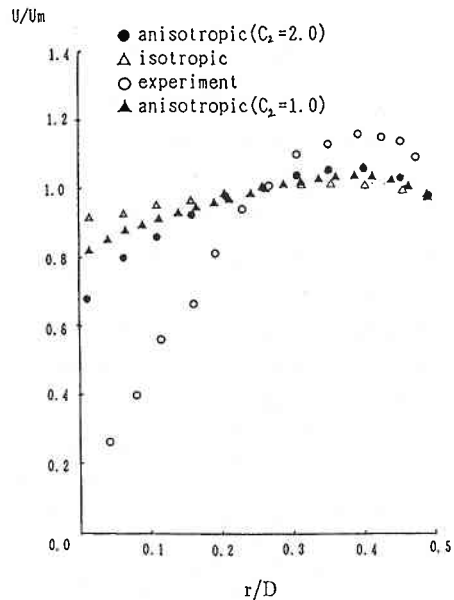


Fig. 3 Axial Velocity Distribution of an Axisymmetric Pipe Flow. (b) 8.9 D section.

研究速報

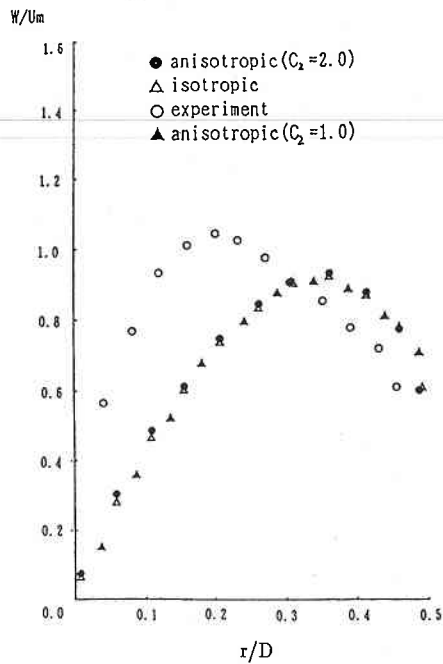


Fig. 4 Swirl Velocity Distribution of an Axisymmetric Pipe Flow. (c) 4.5 Dia.

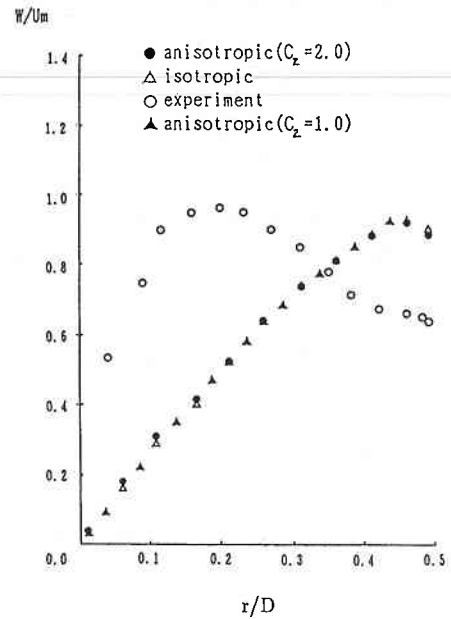


Fig. 5 Swirl Velocity Distribution of an Axisymmetric Pipe Flow. (d) 8.9 Dia.

験値より大きくなるのでここでは2.0として定めている。

4. 結 論

軸対称旋回流を対象にし、非等方 k-ε 乱流モデルの非線形項の物理的な機構を解析し、旋回流の場合これらのモデルが根本的な改善をもたらすことが難しいことがわかった。また、係数 C₂を探るためオーダ評価と共に標準 k-ε および非等方 k-ε 乱流モデルによる計算を行い、その結果係数 C₂は正になるべきことを明らかにした。係数 C₂に対しては他の複雑な流れ場において検討する必要がある。

本研究をまとめるにあたり、谷口伸行助教授の御討論をいただきました。ここに謝意を表す。

(1993年11月19日受理)

参 考 文 献

- 1) Kim, K. Y. and Chung, M. K. (1987) AIAA J., 25, 1020.
- 2) Karasu, T. (1980) Ph.D. Thesis, Imperial College, Univ. of London.
- 3) Lilley, D. G. and Chigier, N. A. (1971) Int. J. Heat Mass Transfer, 14, 573.
- 4) 小林ほか (1986) 機論, B52-481,3230.
- 5) 西村ほか (1991) 生産研究, Vol. 43
- 6) 西島勝一 (1991) 生産研究, Vol. 43
- 7) Yoshizawa, A. (1984) Phys. Fluids 27(6), 1377.
- 8) Speziale, C. G. (1987) JFM, 178, 459.
- 9) Myong, H. K. (1988) Ph.D. Thesis, The Univ. of Tokyo.
- 10) Rubinstein, R. and Barton, J. M. (1990) Phys. Fluids A 2 (8), 1472.
- 11) 明, 小林 (1991) 機論 B57-540, 2538.