特集 15　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　UDC 532：517.4：532.1/.3

統計理論による浮力下の乱流モデリング

Turbulence Modelling of a Bouyant Flow by a Statistical Theory

岡本正芳*・吉澤　徴*
Masayoshi OKAMOTO and Akira YOSHIZAWA

1. 序　　論

われわれの身の回りには多くの流れが存在し，大なり小なり重力や熱の影響を受けている．そのため，温度差と重力により駆動される浮力の効果を無視できない流れも多数存在し，工学や自然科学の分野において浮力効果を考慮した乱流を研究することは大変意義深いものとなっている．

浮力の効果を取り入れた乱流の研究においてはレイノルズ応力と温度フラックスをいかにモデル化するかということが重要な問題となってくる．この問題に対しては今日まで工学の分野において応力方程式，特に代数応力モデルを中心としたモデルがいくつか提案されてきた．

また，温度に関連した現象であるため，浮力の働く方向により決まる安定成層状態，不安定成層状態における物理現象としての違いをどう取り扱うかという問題も起こってくる．この問題に関するものとして今回われわれはViolletにより提案されたK-εタイプのモデル[1]について取りあげる．彼はこの問題に対して，散逸率方程式中に浮力の影響を取り入れる度合いを示すパラメータを導入し，安定成層と不安定成層でその値を変えることで，この問題を解消するモデルを提案している．

本研究では，前者に対しては乱流の統計理論のひとつである2スケール直接相関近似（TSDIA）を用いてレイノルズ応力と温度フラックスをモデル化して，他の浮力効果を考慮したモデルの結果と比較した．後者に対しては，われわれは安定成層，不安定成層に関係なく統一的に評価できるモデル化を行う方針である．過去TSDIAの1次の解析[2]ではViolletのモデルに対応するような安定成層と不安定成層の違いが導出できないので，TSDIAの2次の解析を行う．いくつかの仮定の下で両者の違いについて議論し，浮力効果を取り入れたモデルを提案する．

2. モデリング

浮力効果の取り扱いとして，われわれは今回次のような弱重力，弱温度差の場合に成立するBoussinesq近似を適用したNavier-Stokes方程式を採用した：

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}+(\mathrm{u}\cdot\nabla)\mathrm{u}=-\nabla p+\nu\Delta\mathrm{u}-\beta\theta,\ \nabla\cdot\mathrm{u}=0, \tag{1,2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+(\mathrm{u}\cdot\nabla)\theta=\kappa\Delta\theta. \tag{3}$$

ただし，uは速度ベクトル，pは圧力，θは温度，νは粘性率，κは温度拡散率，βは温度膨張率と重力加速度ベクトルの積を表している．

これらの方程式系についてアンサンブル平均を取ることにより，速度と圧力と温度について平均場 $\{U, P, \Theta\}$ と揺らぎの場 $\{u', p', \theta'\}$ に分離する．平均場の方程式系は

$$\frac{\partial U}{\partial t}+(U\cdot\nabla)U-\nabla R=-\nabla P+\nu\Delta U-\beta\Theta,\ \nabla\cdot U=0, \tag{4,5}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t}+(U\cdot\nabla)\Theta-\nabla\cdot H=\kappa\Delta\Theta, \tag{6}$$

ただし，2階のテンソルRとベクトルHはそれぞれレイノルズ応力と温度フラックスであり，次のように定義される：

$$R\equiv-\langle u'u'\rangle,\ H\equiv-\langle u'\theta'\rangle. \tag{7,8}$$

また，式(1)〜(3)と式(4)〜(6)の差として得られる揺らぎの

*東京大学生産技術研究所　第1部

場の方程式より，乱流エネルギーK ($=\langle u_j' u_j' \rangle/2$) と温度強度$K_\theta$ ($=\langle \theta' \theta' \rangle/2$) に関する輸送方程式が

$$\frac{DK}{Dt}=P_K-\varepsilon+D_K+B, \tag{9}$$

$$\frac{DK_\theta}{Dt}=P_\theta-\varepsilon_\theta+D_\theta, \tag{10}$$

のように得られる．ただし，左辺の時間微分はラグランジェ時間微分であり，その他の項は次のように定義される：

$$P_K \equiv R_{jm}\frac{\partial U_j}{\partial x_m},\quad \varepsilon \equiv \nu\left\langle \frac{\partial u_j'}{\partial x_m}\frac{\partial u_j'}{\partial x_m}\right\rangle, \tag{11,12}$$

$$D_K \equiv -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\langle u_j' u_m' u_m'\rangle+\langle u_j' p'\rangle\right)+\nu\Delta K, \tag{13}$$

$$B \equiv \beta_j H_j,\quad P_\theta \equiv H_j\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}, \tag{14,15}$$

$$\varepsilon_\theta \equiv \kappa\left\langle \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}\frac{\partial \theta'}{\partial x_j}\right\rangle,\quad D_\theta \equiv -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\langle u_j' \theta' \theta'\rangle+\kappa\Delta K_\theta. \tag{16,17}$$

上記の項はそれぞれ上から乱流エネルギーの生成項，散逸項，拡散項，浮力項，温度強度の生成項，散逸項，拡散項となる．

揺らぎの場の方程式に2次のTSDIAを導入し，重力についての展開を1次まで考慮すると，レイノルズ応力と温度フラックスがモデル化できる．まずレイノルズ応力は

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta}=&-\frac{2}{3}K\delta_{\alpha\beta}+\nu_T\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right)+\gamma_1\left(\beta_\alpha\frac{\partial \Theta}{\partial x_\beta}+\beta_\beta\frac{\partial \Theta}{\partial x_\alpha}\right)^*\\
&-0.0427\frac{K^3}{\varepsilon^2}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\\
&-0.0542\frac{K^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_j}\right)^*-0.0297\frac{K^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_\beta}+\frac{\partial U_\beta}{\partial x_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_\alpha}\right)^*\\
&-0.00525\frac{K^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_j}{\partial x_\beta}\right)^*+0.0231\frac{K^4}{\varepsilon^3}\frac{D}{Dt}\left(\beta_\alpha\frac{\partial \Theta}{\partial x_\beta}\beta_\beta\frac{\partial \Theta}{\partial x_\alpha}\right)^*\\
&+0.0218\frac{K^4}{\varepsilon^3}\left(\beta_\alpha\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_j}+\beta_\beta\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_j}\right)^*\\
&+0.0101\frac{K^4}{\varepsilon^3}\left(\beta_\alpha\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_\beta}+\beta_\beta\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_\alpha}\right)^*\\
&+0.0101\frac{K^4}{\varepsilon^3}\left(\beta_\alpha\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_\beta}+\beta_\beta\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_\alpha}\right)^*\\
&+0.00413\frac{K^4}{\varepsilon^3}\left(\beta_j\frac{\partial \Theta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_j}{\partial x_\beta}+\beta_j\frac{\partial \Theta}{\partial x_\beta}\frac{\partial U_j}{\partial x_\alpha}\right)^*\\
&+0.00413\frac{K^4}{\varepsilon^3}\left(\beta_j\frac{\partial \Theta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_j}{\partial x_\beta}+\beta_j\frac{\partial \Theta}{\partial x_\beta}\frac{\partial U_j}{\partial x_\alpha}\right)^*\\
&+0.0101\frac{K^4}{\varepsilon^3}\left(\beta_j\frac{\partial \Theta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_j}+\beta_j\frac{\partial \Theta}{\partial x_\beta}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_j}\right)^*\\
&-0.00526\frac{K^4}{\varepsilon^3}\left(\beta_j\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}+\beta_j\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right).
\end{aligned}\tag{18}$$

ただし，上式で中の係数は

$$\nu_T=0.123\frac{K^2}{\varepsilon}-0.147\frac{K^2}{\varepsilon^2}\frac{DK}{Dt}+0.0933\frac{K^3}{\varepsilon^3}\frac{D\varepsilon}{Dt}, \tag{19}$$

$$\gamma_1=-0.0329\frac{K^3}{\varepsilon^2}+0.0770\frac{K^3}{\varepsilon^3}\frac{DK}{Dt}-0.0525\frac{K^4}{\varepsilon^4}\frac{D\varepsilon}{Dt}. \tag{20}$$

一方，温度フラックスは次のようにモデル化される;

$$\begin{aligned}
H_j=&\zeta_1\beta_j+\zeta_2\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}+\zeta_3\beta_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\zeta_4\beta_j\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\\
&-0.0362\frac{K^3}{\varepsilon^2}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}\right)-0.0546\frac{K^3}{\varepsilon^2}\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\\
&-0.0365\frac{K^3}{\varepsilon^2}\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_i}-1.40\frac{K_\theta^4}{\varepsilon_\theta^3}\beta_j\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)\\
&-0.233\frac{K_\theta^4}{\varepsilon_\theta^3}\beta_j\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\\
&-0.200\frac{K_\theta^4}{\varepsilon_\theta^3}\beta_j\frac{\partial U_j}{\partial x_j}\frac{\partial U_m}{\partial x_j}+0.0333\frac{K_\theta^4}{\varepsilon_\theta^3}\beta_i\frac{\partial U_j}{\partial x_m}\frac{\partial U_j}{\partial x_m}\\
&-0.600\frac{K_\theta^4}{\varepsilon_\theta^3}\beta_j\frac{\partial U_i}{\partial x_m}\frac{\partial U_m}{\partial x_j}\\
&-0.167\frac{K_\theta^4}{\varepsilon_\theta^3}\beta_j\frac{\partial U_i}{\partial x_m}\frac{\partial U_j}{\partial x_m}\\
&-0.167\frac{K_\theta^4}{\varepsilon_\theta^3}\beta_j\frac{\partial U_m}{\partial x_i}\frac{\partial U_m}{\partial x_j}-0.167\frac{K_\theta^4}{\varepsilon_\theta^3}\beta_j\frac{\partial U_m}{\partial x_i}\frac{\partial U_j}{\partial x_m}\\
&+\zeta_5\beta_i\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}-0.00730\frac{K^4}{\varepsilon^3}\beta_j\frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}.
\end{aligned}\tag{21}$$

ここで，

$$\zeta_1=1.28\frac{K_\theta^2}{\varepsilon_\theta}-0.0210\frac{K_\theta^3}{\varepsilon_\theta^3}\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt}-0.481\frac{K_\theta^3}{\varepsilon\varepsilon_\theta^2}\frac{D\varepsilon}{Dt}+3.19\frac{K_\theta^2}{\varepsilon_\theta^2}\frac{DK_\theta}{Dt}, \tag{22}$$

$$\zeta_2=0.134\frac{K^2}{\varepsilon}-0.0867\frac{K^2}{\varepsilon^2}\frac{DK}{Dt}+0.0549\frac{K^3}{\varepsilon^3}\frac{D\varepsilon}{Dt}, \tag{23}$$

$$\zeta_3=0.976\frac{K_\theta^3}{\varepsilon_\theta^2}+1.27\frac{K_\theta^4}{\varepsilon_\theta^4}\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt}+0.0470\frac{K_\theta^4}{\varepsilon\varepsilon_\theta^3}\frac{D\varepsilon}{Dt}-1.26\frac{K_\theta^3}{\varepsilon_\theta^3}\frac{DK_\theta}{Dt}, \tag{24}$$

$$\zeta_4=0.163\frac{K_\theta^3}{\varepsilon_\theta^2}+0.211\frac{K_\theta^4}{\varepsilon_\theta^4}\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt}+0.00840\frac{K_\theta^4}{\varepsilon\varepsilon_\theta^3}\frac{D\varepsilon}{Dt}-0.207\frac{K_\theta^3}{\varepsilon_\theta^3}\frac{DK_\theta}{Dt}, \tag{25}$$

$$\zeta_5=0.00688\frac{K^4}{\varepsilon^3}-0.748\frac{K^3K_\theta}{\varepsilon^2\varepsilon_\theta}. \tag{26}$$

ただし，重力の2次以上の項は小さいとして無視した．式⒅と㉑の中にある添字の＊はテンソルの縮約を取ると0になるような構造を意味している．また，ここでの数値の評価はPassive-Scalor場の慣性領域理論[3]を適用することで導出した．

散逸率方程式と温度散逸率方程式は，乱流の速度場を特徴付ける長さと温度場を特徴付ける長さが等しいとした場合，

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=1.33\frac{\varepsilon}{K}P_K-1.71\frac{\varepsilon^2}{K}+1.71\frac{\varepsilon}{K}D_K+1.71\frac{\varepsilon}{K}B+0.106\frac{K}{\varepsilon}P_K B_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}-0.157K\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}$$
$$+0.106\frac{K}{\varepsilon}D_K\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}-0.0455\frac{K^2}{\varepsilon}\beta_j\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}\right)+0.0222\frac{K^2}{\varepsilon}\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_m}\frac{\partial U_m}{\partial x_j}$$
$$+0.0283\frac{K^2}{\varepsilon}\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_m}\frac{\partial U_j}{\partial x_m}, \tag{27}$$

$$\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt}=0.410\frac{\varepsilon_\theta}{K}P_K-0.527\frac{\varepsilon\varepsilon_\theta}{K}+0.527\frac{\varepsilon_\theta}{K}D_K+0.527\frac{\varepsilon_\theta}{K}B+1.20\frac{\varepsilon_\theta}{K_\theta}P_\theta-1.20\frac{\varepsilon^2_\theta}{K_\theta}$$
$$+1.20\frac{\varepsilon_\theta}{K_\theta}D_\theta+0.0326\frac{K\varepsilon_\theta}{\varepsilon^2}P_K\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}-0.0484\frac{K\varepsilon_\theta}{\varepsilon}\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}+0.0326\frac{K\varepsilon_\theta}{\varepsilon^2}D_K\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}$$
$$-0.857K_\theta\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}+0.959\frac{K^2_\theta}{K\varepsilon_\theta}P_K\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}-1.23\frac{\varepsilon K^2_\theta}{K\varepsilon_\theta}\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}+1.23\frac{K^2_\theta}{K\varepsilon_\theta}D_K\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}$$
$$+0.510\frac{K_\theta}{\varepsilon_\theta}P_\theta\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}+0.510\frac{K_\theta}{\varepsilon_\theta}D_\theta\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}-0.0814\frac{K^3\varepsilon^2_\theta}{\varepsilon^2K^2_\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}$$
$$-0.0140\frac{K^2\varepsilon_\theta}{\varepsilon^2}\beta_j\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}\right)-1.12\frac{K^2_\theta}{\varepsilon_\theta}\beta_j\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}\right)+0.00684\frac{K^2\varepsilon_\theta}{\varepsilon^2}\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_m}\frac{\partial U_m}{\partial x_j}$$
$$+0.299\frac{K^2_\theta}{\varepsilon_\theta}\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_m}\frac{\partial U_m}{\partial x_j}+0.00872\frac{K^2\varepsilon_\theta}{\varepsilon^2}\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_m}\frac{\partial U_j}{\partial x_m}+0.0496\frac{K^2_\theta}{\varepsilon_\theta}\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_m}\frac{\partial U_j}{\partial x_m} \tag{28}$$

となる．

3．レイノルズ応力と温度フラックスの比較

前章で示した浮力下でのレイノルズ応力と温度フラックスを，モデリングの検証という観点から，他のモデルと比べる．従来，浮力効果を考慮した乱流に対するモデリングの多くは応力方程式を利用する2次モデルが主流となっている．特に代数応力モデル（ASM）を基礎とするモデリングが詳細に研究された．それらの代表例として代数応力モデルを村上，加藤，永野が改良して提案したMKNモデル[4]，Launderの提案したモデル[5]および，相良によりLaunderのモデルを改良したモデル[6]がある．一方，渦粘性型表現を温度フラックスに適用したモデル[7]を比較対象モデルとした．

また，本モデルでは式⒅と㉑を見てわかるようにラグランジェ時間微分に関係する項などが多数あるが，上記のモデルはすべてそのような項を有していない．比較の簡単さのために，準定常一様剪断流（平均速度は第1成分以外すべて0で，平均速度も平均温度も空間の第3成分にのみ依存する：$U_i=\delta_{i1}U_1(x_3)$，$\Theta=\Theta(x_3)$）の下で比較した．その結果，ここで取り上げたすべてのモデルは以下のような形で，レイノルズ応力と温度フラックスの成分としてそれぞれ書き下すことができる．ただし，以下の式の導出に際して，統計理論による展開に合わせて高次の項に対応するものはすべて消去した．すなわち，

$$R_{11}=C_{r1}K+C_{r2}\frac{K^3}{\varepsilon^2}\beta_3\frac{\partial\Theta}{\partial x_3}+C_{r3}\frac{K^3}{\varepsilon^2}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}, \tag{29}$$

$$R_{22}=C_{r4}K+C_{r5}\frac{K^3}{\varepsilon^2}\beta_3\frac{\partial\Theta}{\partial x_3}+C_{r6}\frac{K^3}{\varepsilon^2}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}, \tag{30}$$

$$R_{33}=C_{r7}K+C_{r8}\frac{K^3}{\varepsilon^2}\beta_3\frac{\partial\Theta}{\partial x_3}+C_{r9}\frac{K^3}{\varepsilon^2}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}, \tag{31}$$

$$R_{12}=0,\ R_{23}=0, \tag{32,33}$$

$$R_{31}=C_{r10}\frac{K^2}{\varepsilon}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}+C_{r11}\frac{K^4}{\varepsilon^3}\beta_3\frac{\partial\Theta}{\varepsilon^3}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}, \tag{34}$$

$$H_1=C_{h1}\frac{K^3}{\varepsilon^2}\frac{\partial\Theta}{\partial x_3}\frac{\partial U_1}{\partial x_3},\ H_2=0, \tag{35,36}$$

$$H_3=C_{h2}\frac{K^2}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta}{\partial x_3}+C_{h3}\frac{K^4}{\varepsilon^3}\beta_3\frac{\partial\Theta}{\partial x_3}\frac{\partial\Theta}{\partial x_3}. \tag{37}$$

係数はそれぞれのモデルにおいて表1のようになる．ただし，2つのLaunderモデルは，それぞれLaunder自身がモデルAは代数応力モデルにより理論的に導出したモデルであり，モデルBはその理論モデルを元に実験を反映させて作ったモデルである．数値が記されてなく“ー”のマークがあるところはその項に該当する項がそのモデルに存在しないことを意味する．

以上，表1からもわかるようにC_{h3}を除いては正負の符号の逆転もなく，数値的にも，他のモデルとの対応がある程度見られる．C_{h3}についての不一致は展開における高次項ということもあり，統計理論に何か問題があるのではないかと考えられる．

4．安定成層，不安定成層に関する問題

序論でも指摘したViolletのK-εタイプのモデルにおける散逸率方程式は一様流という仮定の下で

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=1.45\frac{\varepsilon}{K}P_K-1.92\frac{\varepsilon^2}{K}+1.45\mu\frac{\varepsilon}{K}B, \tag{38}$$

のように書ける．ここで，μは安定成層時（$B<0$）には0であり，不安定成層時（$B>0$）には1を取るパラメータである．このような不連続なパラメータを導入することで実験と対応するモデルが得られるということは，この不連

研究速報

表1　準定常一様剪断流におけるレイノルズ応力および温度フラックスのモデル定数比較

	本モデル	渦粘性モデル	MKNモデル	相良モデル	LaunderモデルA	LaunderモデルB
C_{r1}	−2/3	−2/3	−2/3	−2/3	−2/3	−0.94
C_{r2}	0.0219	−	−	0.0096	0.0278	0.0681
C_{r3}	−0.0344	−	−	−	−0.0355	−
C_{r4}	−2/3	−2/3	−2/3	−2/3	−2/3	−0.53
C_{r5}	0.0219	−	−	0.0096	0.0278	−
C_{r6}	0.0199	−	−	−	0.0177	−
C_{r7}	−2/3	−2/3	−2/3	−2/3	−2/3	−0.53
C_{r8}	−0.0438	−	−	−0.0192	−0.0557	−0.0681
C_{r9}	0.0146	−	−	−	0.0177	−
C_{r10}	0.123	0.09	0.09	0.09	0.133	0.106
C_{r11}	0.0266	−	−	−	0.129	0.0255
C_{h1}	−0.0546	−	−0.045	−	−0.0744	−0.0593
C_{h2}	0.134	0.1	0.167	0.09	0.166	0.209
C_{h3}	−0.193	−	−	0.0158	0.0698	0.0627

続性が何らかの物理的現実を反映していると思われる．その対応を安定成層であるか，不安定成層であるかの区別のいらないわれわれのモデルにおいていくつかの仮定の下に調べる．Violletのモデルに理論的裏付けを与えるとともに，今回提案したわれわれのモデルの検証の一つとする．

Violletのモデルの散逸方程式に対応する形に，温度フラックスを使って繰り込むと，われわれの散逸率方程式は次のような表式で得られる：

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=1.33\frac{\varepsilon}{K}P_K-1.71\frac{\varepsilon^2}{K}+1.33\frac{\varepsilon}{K}B+0.260\frac{K}{\varepsilon}P_K\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}-0.430K\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}$$
$$-0.0593\frac{K^2}{\varepsilon}\beta_j\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}\right)+0.00833\frac{K^2}{\varepsilon}\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_m}\frac{\partial U_m}{\partial x_j}+0.00755\frac{K^2}{\varepsilon}\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_m}\frac{\partial U_j}{\partial x_m}\qquad(39)$$

この変形には一様流という仮定以外何らの近似，仮定も含まれていない．

まず，式(39)の右辺の最後の2項はその表式から対流に関連している項であり，安定成層時には無視できることは明白であるが，ここでは不安定成層時でも無視して議論する．さらに，展開の高次の中では生成項P_Kと散逸項εの違いは大きく影響しないとしてほぼ等しいと仮定する．これにより式(39)は次のように変形される：

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=1.33\frac{\varepsilon}{K}P_K-1.71\frac{\varepsilon^2}{K}+1.33\frac{\varepsilon}{K}B-0.170K\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}-0.0593\frac{K^2}{\varepsilon}\beta_j\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}\right)\qquad(40)$$

以下の議論ではこの散逸率方程式を用いる．

安定成層時（B<0）には変動は誘起されにくいので式(40)の右辺の最後の項は相対的に他の項より小さいと予想され無視する．この考えの下で，浮力項は

$$B=0.113\frac{K^2}{\varepsilon}\beta_j\frac{\partial\Theta}{\partial x_j},\qquad(41)$$

で与えられることがわかる．これにより，式(40)の右辺第4項を右辺第3項に繰りこむと最後の2項は消えて第3項の係数は−0.02に変わる．このことはちょうどViolletの安定成層時に浮力項に掛かるパラメータを0に設定すると実験データとあうという事実を反映していると考えられる．る．

一方，不安定成層時（B>0）では安定成層時とは異なり変動が誘起されやすく式(40)の右辺の最後の項は無視できない．また，右辺第4項は正の値を取るのに対して，右辺第5項は時間とともに安定成層になるように変動を誘発するので負の値を取る．このことから，安定成層時とは異なり，右辺第4項を右辺第3項に繰り込むということよりは，第4項と第5項が相殺するため第3項を残すべきであると考えられる．

5．結　　論

今回の報告ではTSDIAの2次の展開まで取り込んだ解析を行った結果，複雑で実用的であるかどうかは別として，K-K_θ-ε-ε_θという4方程式タイプのモデルを導出した．また，特殊な場合に限ったレイノルズ応力と温度フラックスの比較では展開低次では他のモデルとかなりよい対応が見られたが高次では問題が残っている．また，厳密な議論はできなかったが，浮力を取り入れたViolletのK-εタイプの経験的なモデルをいくつかの制限の下に再現し，安定か不安定かによらないモデルを示した．このモデルにはまだ充分な検証が必要である．

（1993年11月10日受理）

参考文献

1) P. L. Viollet, Nucl. Eng. Des. 99 (1987) 365
2) A. Yoshizawa, J. Phys. Soc. Jpn. 52 (1983) 1194
3) A. Yoshizawa, J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 659
4) 村上周三，加藤信介，永野紳一郎，生産研究 42-1 (1990) 75
5) B. E. Launder, J. Fluid Mech. 67 (1975) 569
6) 相良和伸，日本建築学会論文報告集 305 (1981) 88
7) 山川正剛，学位論文，東京大学 (1991)