

# 固体内非連続挙動の有限要素解析

Finite Element Analysis of Discontinuous Behavior in a Solid

佐藤 裕\*・渡辺 勝彦\*  
Yutaka SATO and Katsuhiko WATANABE

破壊問題に代表されるように微視的ないしは局所的な力学挙動に注目することが問題の本質を理解する上で重要となる場合、「連続体モデル」を用いることが必ずしも適当とは言えない。ここでは固体内に生じる非連続性を考慮した力学挙動解析を有限要素法により一般的に取り扱うためのモデルと、その応用について解説する。

## 1. はじめに

固体材料の一般的力学挙動評価に際し、いわゆる「連続体モデル」が広く適用されるようになった背景には、その理論体系の完結性と共に有限要素法に代表されるような数値解析技術の急速な進歩により、ほとんどあらゆる問題に対する数値解が比較的手軽に得られるようになったというその汎用性の高さがある。「連続体モデル」は、一般には不均質で非連続的な性質を有した固体材料の巨視的な力学挙動を記述するための一つの力学モデルであり、微視的ないしは局所的な力学挙動そのものが問題の本質を考える上で重要となる場合には必ずしも合理的な力学モデルとはなり得ないのであるが、これに優る一般性、汎用性を有したモデルが他に存在しないことから、本来その適用が必ずしも適当ではないと思われる状況に対しても便宜的に適用されている場合も少なくない。

そのようなことから、著者らは連続体モデルの持つ一般性、汎用性を最大限生かしつつ、固体内において生じる非連続性を一般的に取り扱うことの可能な解析モデル（これを非連続モデルと呼ぶこととする）を提案し、その適用性の検討を、特に微視的、局所的な非連続性を考慮することが現象の理解に重要であると考えられるき裂問題を中心に行ってきた<sup>1)~4)</sup>。

ここでは、このモデルの基本的な考え方と有限要素法による定式化法について述べ、具体的な適用例のいくつかを示すこととする。

## 2. 非連続モデル

変形を受けていない初期の状態において、内部に割れや空洞等の欠陥を持たない完全な連続体と考えることのできる任意形状の物体を想定する (Fig. 1 (a))。この物

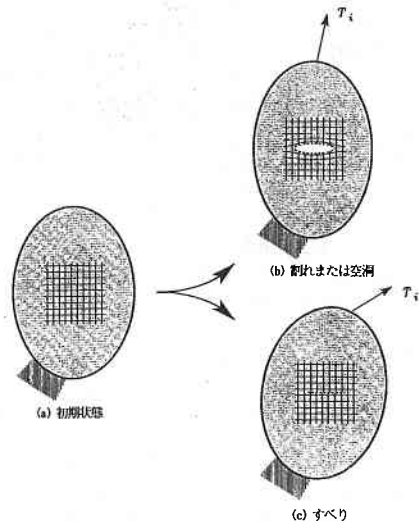


Fig. 1 連続体内に生じる変位の非連続な面

体は何らかの外的な力を受け変形する際に、その内部の一部分に Fig. 1 (b)および(c)に示すように割れや空洞あるいはすべり等による変位の非連続な面状の領域（非連続面）が生じるものとする。この非連続面を除く物体の各部分は、変形した後も依然として連続体としての要件である変位の連続性が満たされており、そこでは一般的な連続体と同様の応力、ひずみの各成分が定義され、線形弾性体、弾塑性体等の構成関係が適用されるものとする。一方、この非連続面に対しても以下に示すような方法によって相対変位、面内ひずみおよび応力の各成分を定義し、これらの諸量を用いてこの面状の領域の非連続挙動を支配する力学関係を与えることを考える。

Fig. 2 に示すように非連続面  $S$  上の点  $P$  における接平面に垂直で、図の上方に向かう方向に  $X_2$  軸、接平面内

\*東京大学生産技術研究所 第1部

に  $X_1$  および  $X_3$  軸を持つ局所直交座標系を考える. 点  $P$  は変形を受けた後, 図の  $P^+$  と  $P^-$  を結ぶ線状に引き伸ばされたものとなるが, この状態において相対変位ベクトル  $\vec{\delta}$  の  $X_i (i=1, 2, 3)$  座標系に関する成分  $\delta_{21}, \delta_{22}$  および  $\delta_{23}$  を考える. すなわち,  $\delta_{22}$  は非連続面の開口量を,  $\delta_{21}$  および  $\delta_{23}$  はそれぞれ  $X_1$  および  $X_3$  軸方向へのすべり量を代表するものであり, これらを非連続面における相対変位と呼ぶこととする.

変形後において, 面  $S^+$  および  $S^-$  はそれぞれ非連続面に隣接する連続体として考える領域との境界面となっており, 連続体側から見ればそこでは通常のひずみ成分が定義できる. そこで非連続面内における面内ひずみ面  $S^+$  と  $S^-$  におけるひずみを用いて

$$[\varepsilon_i] = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_{31}]$$

$$= \left[ \frac{\varepsilon_{11}^+ + \varepsilon_{11}^-}{2} \quad \frac{\varepsilon_{33}^+ + \varepsilon_{33}^-}{2} \quad \frac{\gamma_{31}^+ + \gamma_{31}^-}{2} \right] \quad (1)$$

によって定義し, これと相対変位とにより非連続面の変形を表すこととする.

一方応力については Fig. 3 に示すようにやはり局所座標系に対して, 非連続面に隣接する連続体部分で定義される応力と整合性のとれたものとして, 面内成分  $[\sigma_i] = [\sigma_{11} \quad \sigma_{33} \quad \tau_{31}]$  および面外成分  $[\sigma_n] = [\tau_{21} \quad \sigma_{22} \quad \tau_{23}]$  を定義することができる.

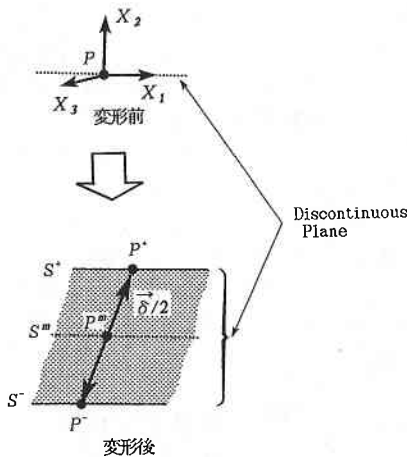


Fig. 2 非連続面上の相対変位

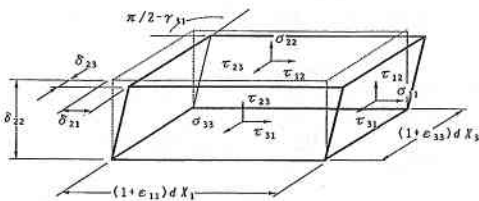


Fig. 3 非連続面上における相対変位, ひずみおよび応力

非連続面の挙動を支配する力学的関係, すなわち構成関係は想定する個々の問題ごとに適切なものを用いなければならないが, 本モデルにおいては相対変位および面内ひずみと応力間の一般的な関係としてこれを与える. その際相対変位を直接構成関係に用いることも考えられるが, 長さの次元を持つパラメータ  $[h_n^k]$  を導入することによりひずみ相当の量を

$$[\tilde{\varepsilon}_n] = [\tilde{\gamma}_{21} \quad \tilde{\varepsilon}_{22} \quad \tilde{\gamma}_{23}]$$

$$= \sum_k \left[ \frac{\delta_{21}^k}{h_{21}^k} + \left( \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right)^k \frac{\delta_{22}^k}{h_{22}^k} - \frac{\delta_{23}^k}{h_{23}^k} + \left( \frac{\partial U_2}{\partial X_3} \right)^k \right] \quad (2)$$

と定義することにより, 連続体で用いられる構成関係と矛盾がなく形式的には類似の関係を考えるものとする. ただしここで  $k$  は弾性, 塑性等の成分を代表するものであり, また  $U_2$  は非連続面の  $X_2$  方向の変位を表す. そしてパラメータ  $[h_n^k]$  の値を適当に選択することによって, 対象とする現象にふさわしい構成関係を定めることができる.

たとえば, 増分理論に従う弾塑性体としての構成関係を適用する場合であれば, 全ひずみ相当量の増分が

$$[\tilde{\varepsilon}_n] = \left[ \frac{\delta_{21}^e}{h_{21}^e} + \frac{\delta_{21}^p}{h_{21}^p} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \quad \frac{\delta_{22}^e}{h_{22}^e} + \frac{\delta_{22}^p}{h_{22}^p} \quad \frac{\delta_{23}^e}{h_{23}^e} + \frac{\delta_{23}^p}{h_{23}^p} + \frac{\partial U_2}{\partial X_3} \right] \quad (3)$$

によって与えられ, 連続体において弾塑性マトリックスと呼ばれる  $[D^p]^{(5)}$  を用いることにより非連続面の構成関係を

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_i \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{ii}^p & D_{in}^p \\ D_{ni}^p & D_{nn}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tilde{\varepsilon}_i \\ d\tilde{\varepsilon}_n \end{Bmatrix} \quad (4)$$

と表すことができる.

### 3. 有限要素法による定式化

非連続モデルでは, 解析対象を通常の連続体と考え取り扱う部分と, 非連続面とに分けて考えるが, このうち連続体として扱う領域に対しては通常用いられている連続体有限要素がそのまま適用できる. 一方非連続面についても各種の連続体要素に適合した有限要素により離散化することが可能であり, 形式的には通常の連続体と同様の手続きによって非連続モデルの有限要素解析を行うことができる.

Fig. 4 に示すように初期状態において想定する非連続面を適当な大きさの面状の要素に分割し, これを非連続面要素と呼ぶこととする. おのおのの非連続面要素は変形後において, 面  $S^+$  に属する節点と  $S^-$  に属する節点より構成される. 非連続要素内の面  $S^+$  および  $S^-$  上の

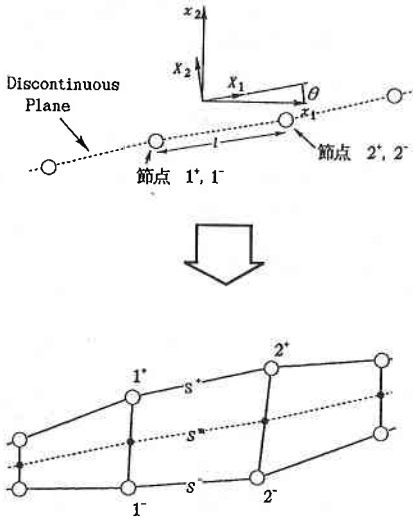


Fig. 4 非連続面要素の例

任意の点における局所座標系で表した変位 $\{U^+\}$ および $\{U^-\}$ は、それぞれの面に属する節点の全体座標系で表した変位 $\{\Delta^+\}$ および $\{\Delta^-\}$ を用いてそれぞれ

$$\begin{aligned} U^+ &= [N] \{\Delta^+\} \\ U^- &= [N] \{\Delta^-\} \end{aligned} \quad (5)$$

によってあたられる。ここで、 $[N]$ は非連続面要素に対する変位関数を表し、その成分は一般には全体座標系で表した非連続面上の位置 $x_i$ と $x_j$ においてFig. 2のように定義された非連続面の局所座標系 $X_i$ と全体座標系 $x_i$ との関係を表す関数である。これより非連続面の相対変位は

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \delta_{21} \\ \delta_{22} \\ \delta_{23} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} U_1^+ - U_1^- \\ U_2^+ - U_2^- \\ U_3^+ - U_3^- \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta^+ \\ \Delta^- \end{Bmatrix} \\ &= [N_d] \begin{Bmatrix} \Delta^+ \\ \Delta^- \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

によって与えられる。

$[dF^+]$ および $[dF^-]$ をそれぞれ $S^+$ 、 $S^-$ に属する節点の荷重増分、 $\delta[d\Delta^+ \ d\Delta^-]$ を仮想変位増分と表すことにすれば非連続面についての仮想仕事の原理を表す

$$\delta[d\Delta^+ \ d\Delta^-] \begin{Bmatrix} dF^+ \\ dF^- \end{Bmatrix} = \delta[d\Delta^+ \ d\Delta^-] \int_{\Delta S_m} [N_d]^T \{d\sigma_n\} ds \quad (7)$$

が得られる。ただしここで $\Delta S_m$ は非連続面要素の面積を表す。この関係はいかなる仮想節点変位増分 $\delta[d\Delta^+ \ d\Delta^-]$ に対しても成立し、これをもとに非連続面の要素剛性方程式を非連続面要素の要素剛性マトリックス

$[k_D]$ を用い増分形式で

$$[k_D] \begin{Bmatrix} d\Delta^+ \\ d\Delta^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dF^+ \\ dF^- \end{Bmatrix} \quad (8)$$

のように表すことができる。これを連続体要素の剛性方程式と重ね合わせるにより、非連続モデルに対する全体剛性方程式を得ることができる。

#### 4. 原子面間結合力を考慮した脆性き裂の破壊挙動<sup>6)</sup>

完全脆性き裂の破壊問題は、本質的にはき裂面における原子面間結合応力を考慮したモデルによって取り扱うことができる。最近では分子動力学(MD)法によりき裂端近傍の原子挙動を直接シミュレートする試みも盛んに行われるようになってきたが、連続体的手法との関係がまだ明確ではなく、従来連続体力学を用いて定義され有効とされてきた破壊力学パラメータの持つ本質的な意味を探るという目的に対しては、必ずしも適切なものとはなっていない。

ここでは脆性き裂のき裂先端近傍での原子面間挙動を考慮したき裂モデルとして非連続モデルを適用し、き裂先端近傍で起こっている破壊現象の負荷履歴に沿った解析を行うことにより得られた結果について述べる。

##### 4.1 モデル化

初期の外力が作用しない状態においてFig. 5に示すような半径 $\rho$ の切欠き状のき裂端部を有し、き裂端部前方の原子面間挙動を考慮するために、切欠き底部前方に非連続面を想定したき裂モデルを考える。非連続面以外の領域は通常の連続体として取り扱い、そこでは線形弾性体としての構成関係が適用されるものとする。非連続面については原子間の平衡距離からの変位とそれに応じて作用する力の関係をその構成関係として与える。

モードIの負荷を受ける場合、非連続面において考慮されるべき相対変位は $\delta_{22}$ のみであり、これを原子面間の平衡位置からの変位と対応づけるものとする。非連続面の応力 $\sigma_{22}$ を原子間に作用する力を平衡位置での格子間隔 $b_0$ の二乗によって平均化したものとし、これと $\delta_{22}$ 間の構成関係として

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \sigma_{\max} \sin \frac{2\pi\delta_{22}}{\lambda} \quad (0 < \delta_{22} < \lambda/2) \\ \sigma_{22} &= 0 \quad (\delta_{22} \geq \lambda/2) \end{aligned} \quad (9)$$

を仮定する。上式はパラメータ $h_{22}^*$ を導入することにより、ひずみ相当量 $\tilde{\epsilon}_{22}$ を用いて

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \sigma_{\max} \sin \frac{2\pi h_{22}^* \tilde{\epsilon}_{22}}{\lambda} \\ &= \sigma_{\max} \sin \frac{2\pi \tilde{\epsilon}_{22}}{\lambda_s} \quad (0 < \tilde{\epsilon}_{22} < \lambda_s/2) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sigma_{22} = 0 \quad (\tilde{\epsilon}_{22} \geq \lambda_s/2)$$

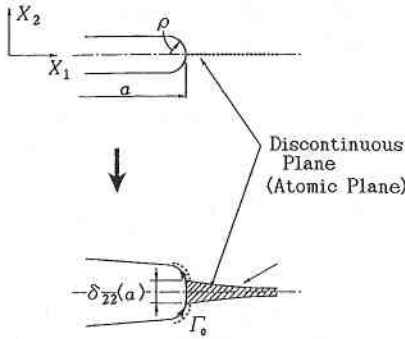


Fig. 5 き裂先端に切欠き部を有した原子間結合力モデル

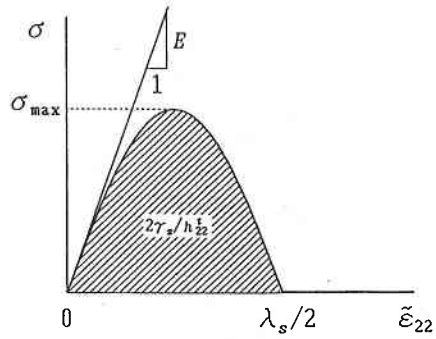


Fig. 6 原子間挙動を表す構成関係

と表すことができる。この場合  $h'_{22}$  は、 $\tilde{\epsilon}_{22}$  が巨視的なひずみに対応するべきものであることを考慮すれば、 $b_0$  に等しいものであることは明らかである。

式(10)で表わされる非線形構成関係における接線係数の初期値は、連続体部分におけるヤング率  $E$  に等しいと考えるのが妥当であることから

$$\frac{2\pi\alpha_{\max}}{\lambda_s} = E \quad (11)$$

として

$$d\sigma_{22} = E \cos \frac{2\pi\tilde{\epsilon}_{22}}{\lambda_s} d\tilde{\epsilon}_{22} \quad (0 < \tilde{\epsilon}_{22} < \lambda_s/2) \quad (12)$$

$$d\sigma_{22} = 0 \quad (\tilde{\epsilon}_{22} \geq \lambda_s/2)$$

が、増分形で表した  $\sigma_{22}$  と  $\tilde{\epsilon}_{22}$  の関係を与える構成関係となる。Fig. 6 に  $\sigma_{22}$  と  $\tilde{\epsilon}_{22}$  間の関係として与えられる非連続面の構成関係を示す。

#### 4.2 き裂パラメータ

従来の破壊力学で用いられてきたき裂パラメータは、ある限られた構成関係のもとで完全に鋭いき裂先端を有した連続体き裂モデルを考える場合にのみその定義が与えられていることから、ここで想定したようなモデルに対しては厳密な意味で定義することができない。しかし、これら従来のき裂パラメータが有していた制約を受けることなく、常に物理的意味が明確なものとして提案された CED (Crack Energy Density)<sup>7)</sup> は、このようなき裂モデルに対しても定義することが可能である。

このモデルにおける CED の全体量  $\mathcal{E}$  は、非連続面における寄与分  $\mathcal{E}^*$  と Fig. 5 における連続体切欠き部の径路  $\Gamma_0$  における寄与分  $\mathcal{E}^N$  の和として

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^* + \mathcal{E}^N \quad (13)$$

によって与えられる。式(12)で示した構成関係を適用するとき  $\mathcal{E}^*$  は

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^* &= \int_0^\phi \sigma_{22} d\delta_{22} \\ &= h'_{22} \int_0^{\phi_s} \sigma_{22} d\tilde{\epsilon}_{22} \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ただし  $\phi_s$  は

$$\phi_s = \frac{\phi}{h'_{22}} \quad (15)$$

によって定義されるき裂先端開口変位  $\phi$  に対応したひずみ相当量である。また  $\mathcal{E}^N$  はひずみエネルギー密度  $W$  を用いて

$$\mathcal{E}^N = \int_{\Gamma_0} W dX_2 \quad (16)$$

により定義される。

連続体線形弾性体中の完全に鋭いき裂モデルに対する CED の値を  $\mathcal{E}_K$  によって表すことにすれば、エネルギー解放率  $\mathcal{G}$  および応力拡大係数  $K$  との間に平面ひずみ状態において

$$\mathcal{E}_K = \mathcal{G} = \frac{(1-\nu^2)K^2}{E} \quad (17)$$

なる関係がある。

#### 4.3 解析結果

Fig. 7 に示すようにき裂先端周りの微小な領域の周囲に、応力拡大係数によって規定される変位場を増分的に与えた解析を行った。非連続面のパラメータ  $h'_{22}$  は  $0.4 \times 10^{-6}$  mm とし、連続体切欠き部の半径  $\rho$  としては、 $\rho = 0$  を含め数種類の値を採用した。

Fig. 8 は  $\rho = 0$  とした場合の CED と応力拡大係数  $K$  によって表した外力との関係を示したものであり、 $\mathcal{E}_K$  は式(17)の関係より求められる値、 $\mathcal{E}_J$  は径路独立積分による CED の評価値、また  $\mathcal{E}^*$  は式(14)に基づく直接評価値を表している。本質的には  $\mathcal{E}_J$  と  $\mathcal{E}^*$  は同じ値となるべきものであるが、 $\mathcal{E}^*$  のほうが低めの値となっている。一般に径路独立積分による評価のほうが精度よく真の CED の値を評価できることから、これは直接評価による誤差によるものであると考えられる。一方、 $\mathcal{E}_K$  と  $\mathcal{E}_J$  が外力の増加に伴い差が生じてくるのは、き裂先端近傍の非線形性によるものと考えられる。Fig. 9 は  $\rho = 0.4 \times 10^{-6}$  mm とした場合の結果である。この場合には  $\mathcal{E}^* + \mathcal{E}^N$  と  $\mathcal{E}_J$  が同等の値となるべきものであるが、やはり

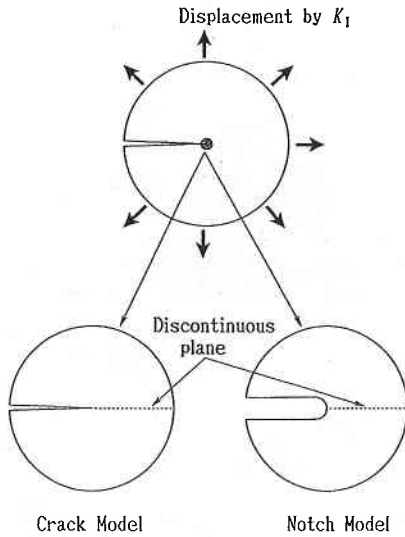
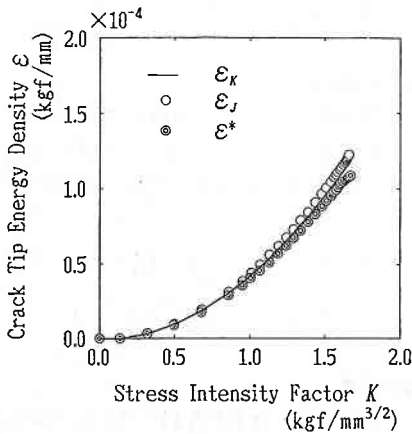
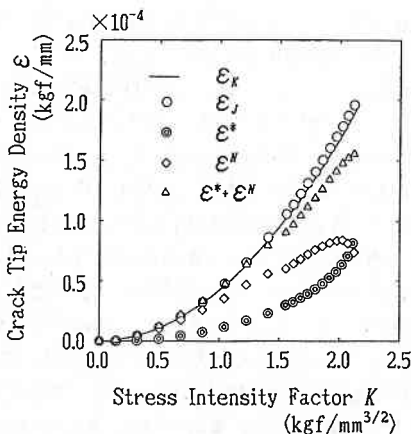


Fig. 7 解析対象と境界条件

Fig. 8  $\rho = 0$  としたき裂モデルにおける CED の評価結果Fig. 9  $\rho = 0.4 \times 10^{-6}$  mm としたき裂モデルにおける CED の評価結果

このモデルにおける CED の値を精度よく与えていると考えられる  $\mathcal{E}_J$  に対し、直接的な評価値は低めの値となっている。

いずれにせよこれらの結果より切欠き部を持たないき裂モデルでは

$$\mathcal{E}^* (= \mathcal{E} = \mathcal{E}_J) \approx \mathcal{E}_K = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \quad (18)$$

$$= G$$

が成立することがわかる。き裂先端の非連続面の相対変位が  $\lambda/2$  に到達することにより、もはや構成関係を表す曲線上を逆向きに移動することができなくなるにより原子面間結合力が断ち切れ、そのとき破壊が生じるものと考えたと

$$\mathcal{E}^* = 2\gamma_s (= \mathcal{E}^*_C) \quad (19)$$

が破壊の必要十分条件であることは明らかである。 $\mathcal{E}^*$  が  $2\gamma_s$  に等しくなったときの  $K$ ,  $G$  の値をそれぞれ  $K_{IC}^*$ ,  $G_C^*$  とするとき、それぞれのパラメータで表した限界値間の関係式として

$$\mathcal{E}_C^* = 2\gamma_s \approx \frac{1 - \nu^2}{E} K_{IC}^{*2} \quad (20)$$

$$= G_C^*$$

が得られるが、この関係は  $2\gamma_s$  が材料固有の値であると考えられることから、 $K_{IC}^*$ ,  $G_C^*$  もほぼ一定の値となることを示すものである。

一方、連続体部分に有限の大きさの切欠き部を有するき裂モデルでは

$$\mathcal{E} (= \mathcal{E}^* + \mathcal{E}^N = \mathcal{E}_J) \approx \mathcal{E}_K = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \quad (21)$$

$$= G$$

が成立する。この場合にも直接的な破壊の必要十分条件は、式(19)によって与えられると考えることができるが、 $\mathcal{E}^* = 2\gamma_s$  が満たされたときの  $\mathcal{E}^N$  の値を  $2\gamma_N$  と表すことにすれば、これはまた CED の全体量を用いて

$$\mathcal{E} = 2(\gamma_s + \gamma_N) (= \mathcal{E}_C) \quad (22)$$

によっても表すことができる。さらにこの関係が成り立つときの  $K$  および  $G$  の値をそれぞれ  $K_{IC}$  および  $G_C$  で表すことにすれば式(22)の関係より、各パラメータで表した限界値間の関係式として

$$\mathcal{E}_C = 2(\gamma_s + \gamma_N) \approx \frac{1 - \nu^2}{E} K_{IC}^2 \quad (23)$$

$$= G_C$$

を得ることができる。

これらのことより切欠き部を有したより実際のなき裂モデルにおいては、Griffith の条件式<sup>8)</sup>は破壊の必要条件を与えるにすぎず、十分条件を満足するものとはなっていないことがわかる。また  $\gamma_N$  はき裂先端に想定した切欠き半径  $\rho$  に依存するものであることから、 $K_I$  や  $G$  で表した破壊靱性の測定値が一般にかなりばらつくことの定性的な説明ができる。さらには、これらのパラメータを介することによる表面エネルギーの評価値が実際よりもかなり高めとなることが容易に理解できる。

5. 弾塑性 (転位) 問題への応用<sup>2),3)</sup>

金属材料の塑性変形は転位という固体内における一種の非連続的挙動が深く関わっているが、通常の連続体を適用した弾塑性解析では本来の非連続的な側面は陽に現れることはない。しかし大きな変形が局所的に集中するような場合等、その本来の非連続性を考慮したモデルを用いた解析を行うことが現象を理解する上で有用な場合も多い。

ここではそのようなモデルに対する解を得るための汎用的な解析法としての非連続モデルの有用性の一端を、連続分布転位弾塑性き裂モデルの解析を通して示す。

5.1 連続分布転位弾塑性き裂モデルとの対応

転位の連続分布を仮定したき裂の解析は数多くなされているが、その中で弾塑性き裂のモデル化とその解析手法としてこれを用いたものとしては、Bilby らによるいわゆる B.C.S. モデル<sup>9),10)</sup>が有名であり、この解析により彼らは先に行われた Dugdale モデル<sup>11)</sup>と等価な結果を得た。

これらのモデルは、線形弾性体と考える連続体中のき裂およびき裂先端前方の面に仮定された塑性域を変位の非連続な面と考え、この面における非連続性をおのおの変形モードに応じた転位の連続分布という形で与えたモデルであると考えることができる。転位の分布関係は、外力および転位の存在によって生ずる応力と、転位の移動抵抗応力間の釣合い条件、また塑性域終端に応力の特異性が生じないという条件のもとに決定される。モード I, II に対応した刃状転位、またモード III に対応したらせん転位の堆積によって生ずる非連続量はそれぞれ相対変位成分  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{21}$  および  $\delta_{23}$  と関係づけることができ、さらにこれらの転位の移動抵抗応力を非連続面内の応力に対応づけることによって、非連続モデルを適用することが可能となる。

例としてモード I に対するモデルと厳密な対応を考える場合、非連続面に与えるべき構成関係は増分形式を用いて

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = [D_{Dug}^p] \begin{Bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$[D_{Dug}^p] = [D^e] - \frac{E^2}{E + (1-\nu)H'} \begin{bmatrix} \frac{\nu^2}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{1-\nu}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

と表される。ただしここで  $[D^e]$  は平面応力に対する線形弾性マトリクスであり、 $H'$  は硬化率を表す。塑性ひずみ相当量  $\tilde{\epsilon}_{22}^p$  と相対変位の塑性的成分  $\delta_{22}^p$  との間には、

$$d\tilde{\epsilon}_{22}^p = \frac{d\delta_{22}^p}{h_{22}^p} \quad (26)$$

なる関係があることから、 $H'$  は

$$H' = h_{22}^p \frac{d\sigma_{22}}{d\delta_{22}^p} \quad (27)$$

と表されるが、硬化を考えない特殊な場合は  $H' \rightarrow 0$  の極限に相当し、 $d\delta_{22}^p$  が有限の値であれば  $d\sigma_{22} \rightarrow 0$  となることから、 $h_{22}^p$  の値によらず非連続面の塑性挙動は同一のものとなる。また相対変位の弾性的成分  $\delta_{22}^e$  は、 $h_{22}^p \rightarrow 0$  とすることによって排除できる。Dugdale モデルはこの場合に当たる。

また平面ひずみ状態にあるき裂が、き裂面に垂直な一様な引張応力  $\sigma$  を受ける場合、Fig. 10 に示すようにき裂に対してある角度を持った面で塑性すべりが特に顕著に現れるという事実を背景に、き裂に対して傾斜した塑性すべり面に対して刃状転位の連続分布を仮定したさらに一般的ななき裂モデルも提案されている<sup>12)</sup>。この場合すべり面に沿った任意の場所における非連続量は、転位分布密度を  $B_{II}(X_1)$ 、塑性域長さを  $s$  として

$$\delta_{21}(X_1) = \int_{X_1}^s B_{II}(X_1) dX_1 \quad (28)$$

によって表すことができる。また特にき裂先端における開口変位量  $\delta$  は

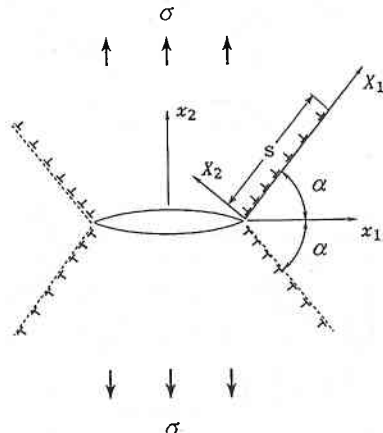


Fig. 10 き裂面に対して傾斜したすべり面を持つき裂モデル

$$\delta = 2\delta_{21}(0) \sin \alpha \tag{29}$$

によって与えられる。

5.2 解析結果

Fig. 11に示すような中央き裂材を対象とし、一様な引張応力を受ける場合（モードI）および一様なせん断応力を受ける場合についての解析を行った。リガメント面には4節点のアイソパラメトリック非連続面要素を採用し、それ以外の連続体領域にはこれと適合する4節点アイソパラメトリック要素を用いた。

Fig. 12は平面応力状態を仮定したモードIにおけるき裂先端の弾性分も含めた相対変位  $\delta_{22}(a)$  を応力の変化に対して表したものである。無限板に対する解析解はDugdaleらによって与えられており、これを実線によって示すことにより本解析結果との比較を行っている。また図中↓印はき裂先端の要素の降伏開始点を示したものである。

これらの図からわかるように、き裂先端の相対変位はほぼ解析値に一致しているといえる。非連続面における相対変位の弾性成分の影響はこの場合パラメータ  $h(=h_{22}^e=h_{22}^p)$  の値を0に近づけることで小さくできるが、ここでの結果はそれを裏付けるものとなっている。これらの図からこの場合  $h=1.0\text{mm}$  程度の値を用いれば、実用上問題ない精度でき裂先端変位の評価が可能であるといえる。

Fig. 13には対応した塑性域の長さの変化を解析解とともに示した。この場合にもほぼ解析解と一致した値が得られている。かなり塑性域が発達したところでは心し高めの値を取る傾向にあるが、これは有限板の効果として理解することができる。

非連続面をき裂に対してどのように用いるかによっても種々の連続分布弾塑性き裂モデルを考えることができ

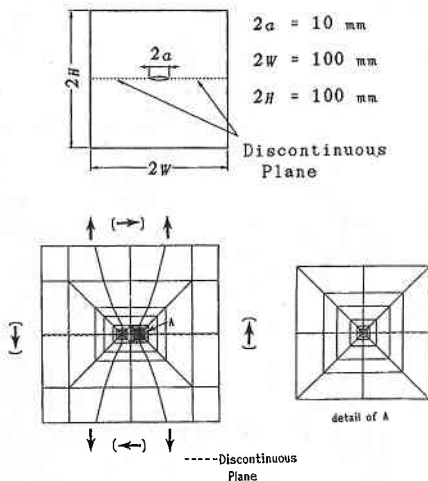


Fig. 11 DBCSモデルの解析に用いた中央き裂材と有限要素分割

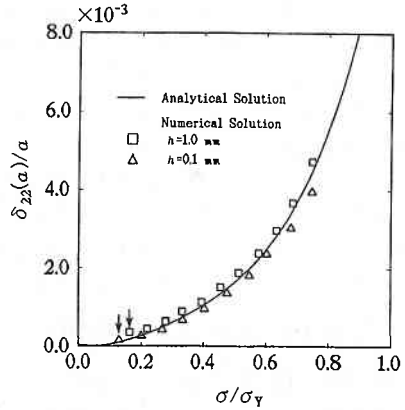


Fig. 12 応力に対するき裂先端での相対変位の変化（モードI）

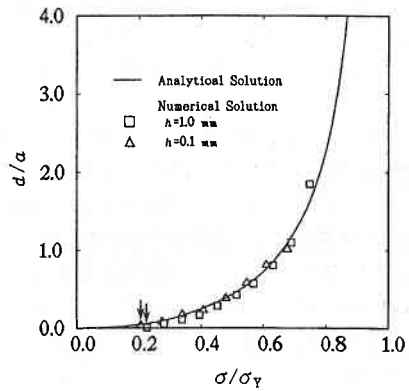


Fig. 13 応力に対する塑性域長さの変化（モードI）

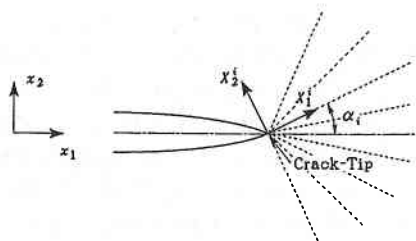


Fig. 14 複数の非連続面を持つき裂モデル

る。非連続モデルは有限要素法によって解析が可能であるという汎用性を備えていることから、それらのモデルに対応した解析を容易に行うことができる。

たとえば Fig. 14に示すようにき裂先端よりき裂面に対して傾いた非連続面を複数想定するモデルとして  $\alpha = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$  および  $80^\circ$  の面に同時に非連続面を有する場合の解析結果を示す。

Fig. 15はき裂先端におけるすべり量を表す  $\delta$  の負荷応力に対する変化を示したものである。非連続面の構成則により多少値に差がでるが、 $\alpha = 60^\circ$  の面のすべり量が最も大きいのがわかる。また Fig. 16は非連続面を用

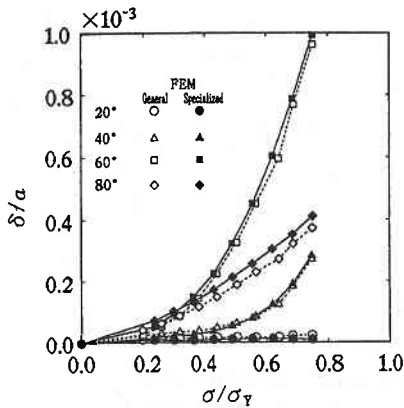


Fig. 15 き裂先端における  $\delta_{21}$  の応力に対する変化

いない連続体として通常の弾塑性解析において、き裂先端の節点より1節点あるいは2節点分だけ内側のき裂上下の節点の変位により、き裂先端部の開口変位をそれぞれ  $\delta'$  および  $\delta''$  とし、これを非連続モデルにおいて直接評価されるき裂端開口変位と比較したものである。連続体弾塑性モデルがある意味で局所的な非連続的現象に起因すると考えられる塑性変形を平均的な意味において表現するモデルであるのに対して、非連続モデルは非連続面の相対変位により、それをより直接的に表すモデルであるという特徴がこれらの結果によく現れている。

6. おわりに

本解析モデルはここで例として示したき裂問題に限らず、多結晶体の粒界におけるクリープキャビティ成長挙動解析等にも適用され<sup>(13), (14)</sup>、その有用性が示されている。このモデルを適用することによって、従来概念には存在しても実際に解析することの困難であったモデルに対する解が得られる例が他にもあるものと期待できる。

(1993年6月25日受理)

参考文献

- 1) 渡辺, 畔上, 日本機械学会論文集, Vol. 51-469A, pp. 2154-2161, 1985.
- 2) 渡辺, 佐藤, 日本機械学会論文集, Vol. 53-488A, pp. 786-794, 1987.
- 3) 渡辺, 佐藤, 吉川, 日本機械学会論文集, Vol. 54-206A, pp. 1879-1886, 1988.
- 4) 渡辺, 佐藤, 吉川, 日本機械学会論文集, Vol. 54-506A, pp. 1887-1894, 1988.
- 5) 山田, 塑性・粘弾性, 培風館, 1980.
- 6) 佐々木, 佐藤, 渡辺, 生産研究, Vol. 43-3, pp. 157-160, 1991.
- 7) 渡辺, 日本機械学会論文集, Vol. 47-416A, pp. 406-415,

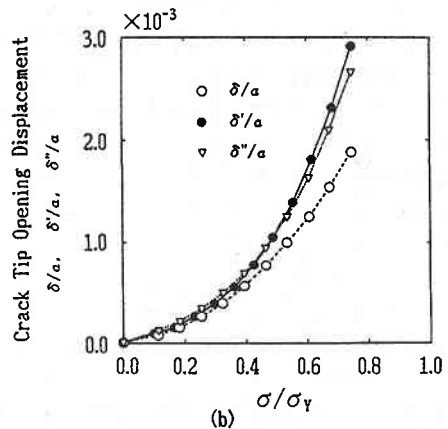
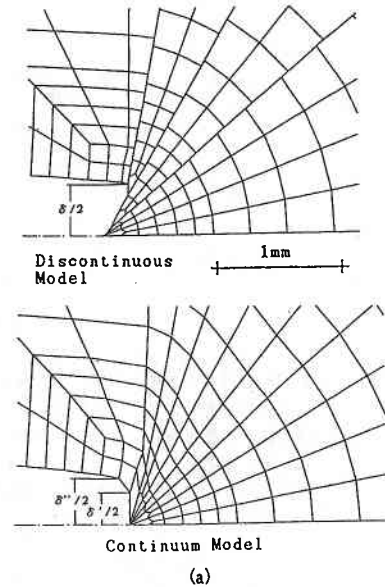


Fig. 16 連続体弾塑性モデルとのき裂先端開口変位の比較

- 1981.
- 8) Griffith, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A221, pp. 163-197, 1921.
- 9) Bilby, Cottrell and Swinden, Proceedings of Royal Society, A272, pp. 304-314, 1963.
- 10) Bilby and Swinden, Proceedings of Royal Society, A285, pp. 22-33, 1965.
- 11) Dugdale, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
- 12) Vitek, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 24, pp. 263-275, 1976.
- 13) 佐藤, 渡辺, 日本機械学会講演論文集, No. 900-86, pp. 224-227, 1990.
- 14) 佐藤, 渡辺, 日本機械学会講演論文集, No. 910-17, pp. 402-405, 1991.