

一般逆行列解法による構造のシフト・シンセシス

Structural Shift-Synthesis by Generalized Inverse Formulation

中 桐 滋*
Shigeru NAKAGIRI

試設計の存在を前提として、その構造応答が不満足な場合に設計変更により応答にシフトを与えて満足し得る構造応答を実現するシフト・シンセシスについて解説する。構造応答の設計変数に関する感度解析に基づいて所要のシフトを線形近似の等式および不等式制約条件により表現する。構造応答のシフトに対する構造諸元のシフトをスラック変数を導入して定める定式を提示し、その求解の手法として一般逆行列解法を紹介する。

1. は じ め に

計算の能力と手段が限られていた時代の構造解析では解析結果の精度を維持または向上することに汲々としていたので、解析を行う本来の目的である構造設計の質を高めることまで解析者の眼はあまり届いてはいなかった。計算機の発達により構造解析が容易になって初めて、よりよい構造を求める設計変更に構造解析を直接利用することが可能となった。しかし、直接利用できるといっても、構造諸元を思い付きで変えて構造の再解析を繰り返すだけでは計算機資源の浪費につながりやすい。そこで、系統的によりよい構造を求める、具体的にはその構造諸元を定める、ことが重要となった。近年、有限要素法または境界要素法による最適設計の研究が旺盛であるのはこの間の事情を物語っている。本稿では、最適設計とは見方を変えて構造の変更を行うシフト・シンセシスについて述べる。

2. 最適設計とシフト・シンセシス

最適設計 (optimal design) という術語は1950年代からよく知られていた。初期の最適設計では最小重量設計が目標とされていた。その最適設計での問題設定は、式(1)で与えられた J 個の不等式制約条件の下で目的関数 f を最小にするというものである。

$$g_j(\alpha_m) \leq 0 \quad (1)$$

ここで、不等式制約条件と目的関数は構造諸元変化を代表する M 個の独立な設計変数 α_m の関数として表されているものとする。等式の形で与えられている制約条件は設計変数を独立なものに絞り込むとき用いられ、最適

計で本質的な制約条件は設計変数の許容領域を定める不等式制約条件である。古典的な最適設計手法では、多次元の設計変数空間でどの方向に最適解 (目的関数を最小にする設計変数の意) を探索するか、またその方向へどの程度設計変数を変えるかが主要な二段階である。その手法は多様であり、最適設計についての出版物は多数にのぼる [その一部は 1~14]。多様で多数ということは決定的な手法がいかに無いかを暗示している。そして、このようにして探索された最適解が大局的最小を与えているか、もしくは局所的極小しか与えていない (もっと探せば別に最小値がある) かが問題とされてきた。

この問題だけが、試設計の存在を前提とする古典的な最適設計にまつわるのではない。この外にも効果と費用が事前には不明であるとの問題がある。試設計が余程の手抜きでない限り、試設計での構造応答または重量・寸法等はそれなりに適当な、換言すれば最適に近い、値になっている。試設計に最適設計を加えても、最適設計という名前程には魅力的な改善結果がいつも得られるわけではない。制約条件にもよるが、最適設計の効果、たとえば構造重量がどれ位減るか、は事前には不明である。また、これまでの最適設計手法の多くはそこに含まれている定数等を選択しながら行う反復解法である。定数等の選択には試行か経験を必要とし、反復収束までの回数、すなわち計算費用、の推定が事前には不明である。このように古典的な最適手法では効果と費用の事前推定がほとんどできない。効果も費用も不明であるときに行動を起こすのは勇気を要する。このため、最適設計の研究は古くから行われてきたが、実用化は遅れたのであろう。

効果が事前には不明なのは、最小なり最適なりの「最的」な概念にこだわるからである。見方を変えて、試設計を想定し、さらに満足し得る重量軽減等の設計仕様を

*東京大学生産技術研究所 第1部

設定して、それを与えられた制約条件の下で実現する構造を探索すれば「最的」の呪縛から逃れられる。この見方によれば、設定してあるので効果は事前に既知である。また、目的関数は不要となる。設計変数は応力をいくら以下にする、固有振動数をいくらに保つ、重量をいくら以下にする等の等式および不等式制約条件のみに現れる。これらの制約条件は着目する構造応答や構造重量の変更量、すなわちシフトを設定している。したがって、制約条件から設計変数を定める定式を案出すれば、所望の構造応答を実現する構造諸元の決定、すなわちシンセシスが可能となる。そして、その定式で所要計算量が推定可能であれば、効果と費用が事前に推定されているシフト・シンセシスが構成される。シンセシスという用語は1980年代前半から現れている [その一部は15~21]。

3. シフト・シンセシスの問題設定

本章ではシフト・シンセシスにおける問題の設定と必要な準備について述べる。まず、対象とする構造の試設計を想定する。この試設計についての構造応答が有限要素法または境界要素法より解析されているとする。その解析結果より一部の構造応答が設計仕様を満たしていない、たとえば弾性設計を前提としているのに発生応力が材料の降伏応力を越えている、ことが判明したとする。そこでM個の設計変数 α_m を適切に選択して式(2)により構造諸元 x_m を変えて設計仕様を満たさせることとする。上の例では発生応力の降伏応力以下への抑制が設計変更目的となる。この種の設計変更は、注目するI個の構造応答 z_i には変更後の目標値、J個の構造応答 z_j には変更後の限界値で適切に構成された式(3)と(4)で表される等式および不等式制約条件により設定することができる。また所望の構造重量等への変更も制約条件により表すことができるのは当然である。そして、この設計変更が成就した後は注目したすべての構造応答は設計仕様が満たされていることになる。

$$x_m = \bar{x}_m (1 + \alpha_m), \quad m = 1 \sim M \quad (2)$$

$$h_i(\bar{x}_m, \alpha_m) = 0, \quad i = 1 \sim I \quad (3)$$

$$g_j(\bar{x}_m, \alpha_m) \leq 0, \quad j = 1 \sim J \quad (4)$$

この問題では目的関数は設定されておらず、設計変数は式(3)と(4)のみで決定される。以後、上付きの棒記号は試設計における値であることを、添字 m は設計変数 α_m に関する量であることを示す。シフト・シンセシスの実行にあたっては式(3)と(4)の内容を具体化しておく必要がある。そのためには、構造応答の感度解析を行い、応答変化の一次近似を用いる。

構造応答のシフトを与える前記の等式および不等式制約条件(3)と(4)は一般には設計変数の非線形関数である。今、注目応答 z_i を試設計近傍で設計変数に関するテイ

ラー級数展開し、応答変化を一次項打ち切りで近似すると不等式制約条件の一次近似は式(5)の形で具体化される。等式制約条件も同様である。

$$\bar{z}_i + \sum_{m=1}^M z_{im}^I \alpha_m \leq z_i^* \quad (5)$$

ここで z_{im}^I は構造応答 z_i の設計変数 α_m に関する一階感度を、また以後肩符の I は一階感度を、星記号はシフトの限界値か目標値を意味する。一次近似式であると言っても式(5)を定めるには構造応答の一階感度を算出しておくことが必要である。

着目する場の性質が構造諸元値の変化により変わらない線形構造系の場合、一階感度は摂動法により効率的に求められる [22]。有限要素法で用いられる剛性方程式(6)を例に取り未知変位ベクトルの一階感度の求め方を以下に略記する。

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (6)$$

ここで、[K] は剛性行列、{U} は未知節点変位ベクトル、{F} は外力ベクトルである。まず始めに、剛性行列の一階感度 $[K_m^I]$ (設計変数に関する微係数であるので自動微分等により簡単に求められよう [23]) を利用して剛性行列の試設計近傍の変化を設計変数に関するテイラー級数展開の式(7)により一次近似する。一方、未知節点変位ベクトルの変化も同様に式(8)で表されると仮定する。一方、ここでは設計変更により外力ベクトルは変化しないものとする。

$$[K] = [\bar{K}] + \sum_{m=1}^M [K_m^I] \alpha_m \quad (7)$$

$$\{U\} = \{\bar{U}\} + \sum_{m=1}^M [U_m^I] \alpha_m \quad (8)$$

式(7)と(8)を式(6)に代入して、その結果に摂動法を適用して剛性方程式が任意の設計変数について成立するようにすれば試設計の節点変位ベクトルを与える式(9)と節点変位ベクトル一階感度を与える式(10)が得られる。

$$\{\bar{U}\} = [\bar{K}]^{-1} \{F\} \quad (9)$$

$$\{U_m^I\} = -[\bar{K}]^{-1} ([K_m^I] \{\bar{U}\}) \quad (10)$$

ここで、肩符の -1 は逆行列を示す。式(10)は、変位ベクトルの一階感度が設計変数の別によらず試設計での剛性行列についての求解で定められることを意味している。節点変位の一階感度が求められれば応力やひずみの注目構造応答の一階感度は所定の算術公式で容易に算出される。この摂動法は同様にして線形固有値問題の感度解析にも適用できるが、非線形構造の感度解析はここで述べたような簡単なものではない [24]。

4. 一般逆行列解法による設計変数の決定

4.1 決定方程式の構成

設計変数のM次元超空間において一次近似された一つ

の不等式制約条件の境界面は一枚の超平面で表されるので、式(5)はすべての不等式制約条件を満たす設計変数の許容領域はJ枚の超平面で限られた領域であることを意味している。3章の想定により、この超空間の原点は試設計に対応し、しかも許容領域外にある。もし追加的にI個の等式制約条件が設定されているとき、それらを満たしながらこの許容領域内に入っている設計変数を見いだすと、所要のシフト・シンセシスが成就されることになる。このシフト・シンセシスでは、許容領域という空間内にあればよいのであるから設計変数は唯一に定まらなくてもよい。この設計変数は一般逆行列を用いて以下のように求められる。

感度解析の結果を利用した不等式制約条件の一次近似式が得られているとき、スラック変数 β_j を用いて不等式制約条件を等式化する。等式化にあたっては式(5)との対比からスラック変数は非負でなければならないことになる。等式制約条件の一次近似式(11)と等式化された不等式制約条件の一次近似式(12)をまとめると設計変数とスラック変数を未知量とする連立一次方程式が得られる。それを簡単に式(13)と書き表す。

$$\bar{z}_i + \sum_{m=1}^M z_{im}^I \alpha_m = z_i^* \quad (11)$$

$$\bar{z}_j + \sum_{m=1}^M z_{jm}^I \alpha_m + \beta_j = z_j^* \quad (12)$$

$$[S]\{x\} = \{D\} \quad (13)$$

ここで、 $[S]$ は成分が応答感度 z_{jm}^I 、1および0である $(I+J) \times (M+J)$ の係数行列、 $\{x\}$ は成分がM個の設計変数とJ個のスラック変数である未知ベクトル、 $\{D\}$ はその成分が $z_i^* - \bar{z}_i$ と $z_j^* - \bar{z}_j$ からなるシフト・ベクトルである。もし $I=M$ であれば、設計変数は等式制約条件のみで定められてしまう。実際には、合理的な等式制約条件を設計変数の数ほど多数に設定するのは困難である。多くの場合は $I < M$ 、すなわち $[S]$ は横長になると見て差し支えない。

4.2 一般逆行列による求解

構造解析でこれまで取扱われた連立一次方程式はその係数行列が正方形で正則の場合が殆どであり、非正方または非正則であれば連立一次方程式は解けないとさえ錯覚される程である。非正方で非正則であっても連立一次方程式は一般逆行列を用いれば解ける [25~27]。また、一般逆行列の利用は構造分野においても形態解析を中心として広がりつつある [28]。一般逆行列の性質と利用法についての詳述は避けるが、シフト・シンセシスにおける設計変数の決定の理解に必要な基本的な事項のみを以下に述べる。

いま、 $[S]$ がN行L列 ($N \neq L$) の非正方行列であるとき、式(14)を満たす行列 $[S^-]$ を $[S]$ の一般逆行列という。この式は一般逆行列の定義を述べているだけであって、

この式から一般逆行列 $[S^-]$ が数値的にも定められるのではない。一般逆行列で式(15)を満たすものを反射型一般逆行列、式(16)を満たすものを最小二乗型一般逆行列、式(17)を満たすものをノルム最小型一般逆行列と言い、そのすべてを満たすものをムーア・ペンローズ一般逆行列と言う。

$$[S][S^-][S] = [S] \quad (14)$$

$$[S^-][S][S^-] = [S^-] \quad (15)$$

$$([S][S^-])^T = [S][S^-] \quad (16)$$

$$([S^-][S])^T = [S^-][S] \quad (17)$$

ここで、肩符Tは行列の転置を表す。行列 $[S]$ に対してムーア・ペンローズ一般逆行列は唯一に定まり、以後ムーア・ペンローズ一般逆行列を $[S^-]$ で表す。

連立一次方程式(13)の解が存在するための必要十分条件は式(18)が成立することである。

$$([I] - [S][S^-])\{D\} = \{0\} \quad (18)$$

ここで、 $[I]$ はN行N列の単位行列である。解が存在するとき、式(13)の解 $\{x\}$ は式(19)の特解 $\{x_p\}$ と式(20)の補解(余解とも呼ばれる) $\{x_c\}$ の和として式(21)で与えられる。式(21)の $\{x\}$ は一般解と呼ばれる。

$$\{x_p\} = [S^-]\{D\} \quad (19)$$

$$\{x_c\} = ([I] - [S^-][S])\{h\} \quad (20)$$

$$\{x\} = \{x_p\} + \{x_c\} \quad (21)$$

式(20)右辺の $[I]$ はL行L列の単位行列である。また、 $\{h\}$ は任意ベクトルでよい。ムーア・ペンローズ一般逆行列を用いていけば、式(19)の特解で解のノルムは最小になる。また、解が存在しないとき、 $\{x\} = [S^-]\{D\}$ に対して誤差 $[S]\{x\} - \{D\}$ の二乗は最小になる。

シフト・シンセシスの設計変数決定方程式(13)をムーア・ペンローズ一般逆行列を用いて解けば設計変数がスラック変数と組になって定められる。スラック変数は非負でなければならないので、設計変数の決定は一筋縄では行かない。式(13)の解が存在するための条件式(18)が成立しているとして ($I < M$ であれば大体成立する)、設計変数の決定法を三段階に分けて以下に述べる。

《第一段階》 まず、式(19)の特解を調べる。そのスラック変数がすべて非負であれば、スラック変数に課せられた条件がすべて満たされるので、この特解の設計変数をシフト・シンセシスの解とする。この場合には、式(13)の求解一回でシフト・シンセシスができる。

《第二段階》 特解のスラック変数に負のものがあれば、スラック変数に課せられた条件が満たされていないので、この特解の設計変数は許容領域外に出る。したがって、これをシフト・シンセシスの解とすることはできない。そこで、式(20)の補解を加えた一般解でスラック変数を非

負にする。この過程を補解補正と呼ぶことにする。補解補正でスラック変数をすべて非負とする仕方は唯一ではない。あまり大きな正のスラック変数にしようすると対応する設計変数が再び許容領域外に出てしまう恐れもある。したがって、スラック変数を非負とするときには慎重に非負値の最小値、すなわち零、にする。今、特解では K 個 ($K < J$) のスラック変数が負である場合を取り上げる。それらを表す既知ベクトルを $\{\beta_p\}$ と書く。補解補正後の一般解のスラック変数を零とするには式(22)が成立すればよい。本式より任意ベクトル $\{h\}$ は $[C]$ のムーア・ペンローズ一般逆行列 $[C^-]$ を用いて得られる特解のみとして式(23)により定めることができる。

$$\{\beta_p\} + [C]\{h\} = \{0\} \quad (22)$$

$$\{h\} = -[C^-]\{\beta_p\} \quad (23)$$

ここで、 K 行 ($M+J$) 列の行列 $[C]$ は $[I] - [S^-][S]$ から特解でそのスラック変数が負である K 行を抽出して得られるものである。

《第三段階》 第二段階の補解補正を行うと、特解で正であったスラック変数が負に変わってしまうときがある。この場合は、第二段階で特解の負のスラック変数のみではなく、すべてのスラック変数を零にするように $K=J$ の行列 $[C]$ を用いて任意ベクトル $\{h\}$ を定める。

以上の手順で不等式制約条件が適切でその個数が設計変数の個数より小さい場合のシフト・シンセシスを成就させることができる。

シフト・シンセシスの問題が等式制約条件のみで設定されている、しかもその個数が設計変数の個数よりも小さい場合はスラック変数を考慮する必要がないので、第一段階だけでシフト・シンセシスが成就する。この場合はスラック変数が存在しないので解 $\{x\}$ のノルムは設計変数 $\{\alpha_m\}$ のノルムと一致している。式(19)の特解で解のノルムは最小になっているので、設計変数のノルムも最小となる。したがって、ムーア・ペンローズ一般逆行列解法で等式制約条件のみのシフト・シンセシスを行うと、ノルム最小の意味で設計変更量が最小とする定式と同等となる [29]。

このように一般逆行列解法は等式および不等式制約条件が混在する場合にも適用可能であるとの利点を有している。一方、正方で正則の N 行 N 列係数行列 $[S]$ による連立一次方程式の求解に際しては行列 $[S]$ の LDU 分解等が行われていても N 行 N 列の逆行列 $[S]^{-1}$ を具体的に計算していない。しかし、一般逆行列解法では N 行 L 列の行列 $[S]$ に対して L 行 N 列のムーア・ペンローズ一般逆行列 $[S^-]$ を具体的に計算して置かなければならない。その計算法として行列の固有値分解による方法や特異値分解による方法があるが、固有値計算が入るので所要演算時間は正方・正則の係数行列に関する求解の演算時間

よりは長くなる。

式(13)による設計変数の決定は構造応答変化の一次近似に基づいている。一方、応答感度は設計変数が小さい範囲でしか有効でない摂動法で求めている。さらに、式(19)による設計変数は、スラック変数をも含めたノルム最小の規範で決定されているので、小さく定められていると見なすことができる。しかし、構造応答変化の一次近似が有効である程度に小さい設計変数が得られているとの保証はない。したがって、この一次近似の精度不足を補償するために、一旦得られた設計変数により設計変更して応答解析を行い式(13)右辺のシフト・ベクトルが零ベクトルになっているかの判別を行う必要がある。もし、なっていなければ感度解析を行って設計変数決定の過程をシフト・ベクトルが零ベクトルになるまで反復しなければならない。この過程を以後精度補償と呼ぶ。補解補正は多くとも 3 回ですむと予想できるが、この精度補償に必要な反復回数は事前には予想できない。

5. 数 値 計 算 例

本章では簡単な構造の設計変更例により 4 章で述べた定式の運用を示す。

5.1 真直梁の曲げ振動の固有モード形の変更

弾性梁の無減衰線形固有振動性状を不等式制約条件のみにより変更する問題を設定する [29]。図 1 は二点で単純支持された全長 20mm の鋼製の梁を模式的に示す。初期設計では断面二次モーメントは $8.33 \times 10^{-2} \text{mm}^4$ で全長にわたり一定とする。このとき一次振動固有値は 4.19 となり、その振動モード形を図中に破線で示す。ここで、梁中の振動エネルギーの分布を変えるために図中の斜線で示す領域に左端点 A と中央点 B のたわみが入るようなモード形変更を行う。この設計変更では固有値が低下するので、固有値についても初期設計の固有値を下回らないとの制約を設けて三不等式制約条件を課する。梁を等長の 10 個の有限要素に分割する。使用する有限要素は節点に断面二次モーメントを割り付け、要素内では断面二次モーメントは線形分布するとして剛性行列を構成した曲げ要素である。したがって設計変数は各節点における 11 個の断面二次モーメントに割り付ける。質量行列には分布質量行列を用いた。設計変更後のモード形を実線で図 1 に示す。図 2 は A 点および B 点のたわみと固有値の変化を精度補償のための反復回数に対して示す。3 回の反復で変更目的が達成されたことが判る。図の縦軸はいずれもその限界値により無次元化している。図 1 と 2 では上付き棒記号は初期設計での値を意味する。この例では目標達成後も反復を続行するとたわみは漸増しているが、固有値は一定になっている。これは、不等式制約条件を満たす構造は唯一ではないので許容領域内での設計変数の漸変により構造応答が漸変している例であ

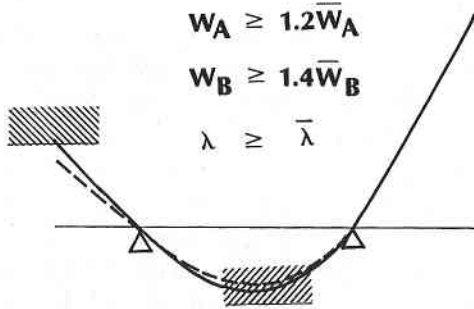


図1 設計変更前後の一次固有振動モード形

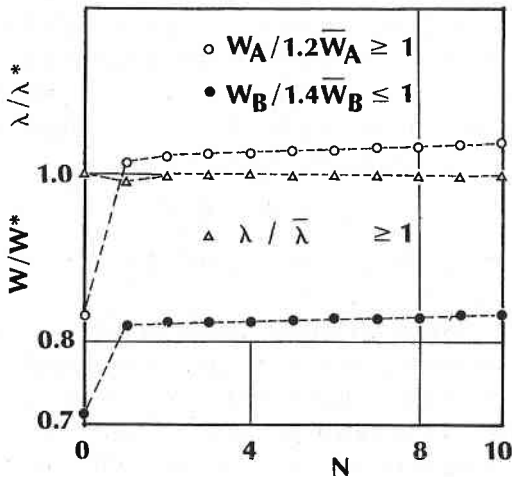


図2 たわみと固有値の反復に対する変化

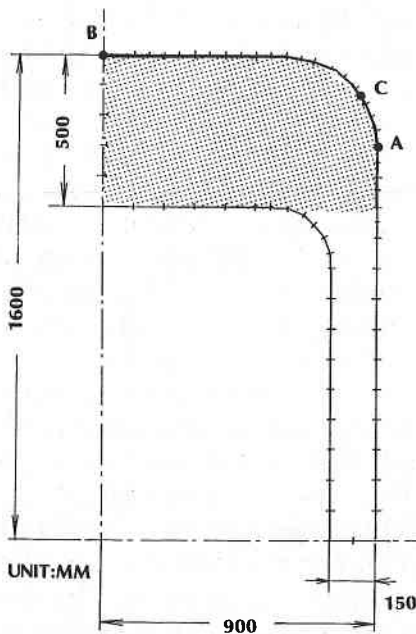


図3 HIP装置ヨーク部の境界要素分割

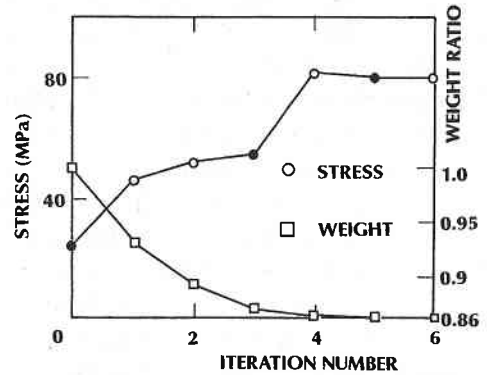


図4 形状変更による重量と応力の目標値への収束

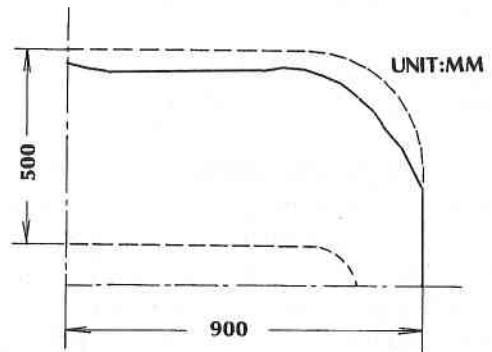


図5 変更前後のヨーク形状の比較

る。本例の設計変数の個数は不等式制約条件の個数より十分大きいので補解補正は第二段階までで十分であった。

5.2 等式および不等式制約条件による設計変更

図3はHIP装置の鋼製ヨーク部を模したものであり、その図形と負荷の対称性を利用して1/4のみを境界要素法で解析する[29]。図は初期設計のヨーク形状と境界要素分割を示す。ヨーク厚さは500mmであり、水平に平行な梁部下面に一樣分布荷重24MPaを上向きに受けるとき平面ひずみ状態として解析する。ヨーク梁部のAC部分は発生応力が小さい。そこで、発生応力のある範囲に限定してヨーク重量の低減を図る。HIP装置は定置型の機械であるので、その重量低減は飛翔体の場合程には切実ではない。この例題では、図3網掛け部分上面のMises相当応力の下限を40MPa、上限を80MPaとして不等式制約条件を構成し、重量低減は図の網掛け部の面積を初期設計の86%にする等式制約条件により行う。設計変数は図のAB間にある節点のx, y座標に割り付ける。図4は精度補償のための反復に対する重量とC点の相当応力の変化を示している。これによれば6回の反復で所望のシフトが得られている。この図の応力変化のプロットで白丸は1回の補解補正でスラック変数がすべて非負となった場合を、黒丸は2回の補解補正を要した

場合を示す。本例は不等式制約条件の個数より設計変数の個数が多いので、2 回目の補解補正ではすべてのスラック変数を零にしている。図 5 は設計変更後のヨーク形状を実線で示す。破線は初期形状である。

6. お わ り に

一般逆行列を用いれば構造応答に所望のシフトを与える設計変数を決定するシフト・シンセシスが可能となる。特に、不等式制約条件の個数が設計変数の個数より少ない場合はシフト・シンセシスは容易である。一般逆行列解法は

1. 等式制約条件と不等式制約条件が混在する場合も統一的に取り扱える
2. ノルム最小（ただしスラック変数の寄与分を含んで）の意味で試設計からの変更は最小となる
3. 1 回の設計変更においては高々 3 回の補解補正で設計変数が定められる

のが特徴である。一方、このシフト・シンセシスの計算プログラムには当然のことながら非正方行列のムーア・ペンローズ一般逆行列の計算サブ・ルーティングが必要である。

制約条件の個数が設計変数の個数より多い場合には、

- a. 無為な不等式制約条件を設定している
- b. 許容領域を狭める不等式制約条件がある
- c. 許容領域がそもそも存在しない

ことがあり、その処理に注意を要することもある [29]。したがって、等式制約条件の目標値または不等式制約条件の限界値を含めて、物理的に合理的な制約条件の設定が必要となり、その個数を必要最小限に限るべきであると考える。

制約条件の設定と同様に、シフトの設定も合理的でなければならない。物理的に実現不可能なシフトを設定すれば、式(18)で与えられる連立一次方程式の解の存在条件は満たされていても、当然のことながらシフト・シンセシスの解は得られない。シフトが小さければ応答変化の一次近似が有効となりシンセシスが可能となる場合が多い。シフトが大きい場合には、そのシフトを多段に設定することによりシフトが可能となる。本稿で述べた定式では一次近似の精度補償のために試設計の変更はいずれにせよ数回は避けられない。したがって、大きいシフトは数段に分けて設定すると一段当たりの小さいシフトに対して有効な一次近似により設計変数が定められる。このような多段設定により大きいシフトに対しても、精度補償のための反復を数十回も繰り返すことなく、所望の設計変更が成就される。末尾にこの一連の研究に協力された一部鈴木敬子技官に謝意を表します。

(1993年 7 月 6 日受理)

参 考 文 献

- [1] Haug, E. J. and Cea, J. (eds.); Optimization of Distributed Parameter Structures, Vols. I and II NATO Advanced Study Institutes Series, Ser. E, No. 49, Sijthoff & Noordhoff International Publishers B. V., 1981.
- [2] Cyras, A. A.; Mathematical Models for the Analysis and Optimization of Elastoplastic Structures, Ellis Horwood Ltd., 1983.
- [3] Vanderplaats, G. N.; Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, McGraw-Hill, Inc., 1984.
- [4] Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V.; Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press, Inc., 1986.
- [5] Soares, C. A. M. (ed.); Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems, NATO Advanced Institutes Series, Ser. F, Vol. 27, Springer-Verlag, 1987.
- [6] Haslinger, J. and Neittaanmaki, P.; Finite Element Approximation for Optimal Shape Design, Theory and Application, John Wiley & Sons Ltd., 1988.
- [7] Brousse, P.; Optimization in Mechanics, Problems and Methods, Elsevier Science Publishers B. V., 1988.
- [8] Rozvany, G. I. N. and Karihaloo, B. L. (eds.); Structural Optimization, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [9] Gajewski, A. and Zyczkowski, M.; Optimal Structural Design under Stability Constraints, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [10] Brebbia, C. A. and Hernandez, S. (eds.); Computer Aided Optimum Design of Structures: Recent Advances, Computational Mechanics Publications / Springer-Verlag, 1989.
- [11] Brebbia, C. A. and Hernandez, S. (eds.); Computer Aided Optimum Design of Structures: Applications Computational Mechanics Publication / Springer-Verlag, 1989.
- [12] Rozvany, G. I. N. (eds.); Shape and Layout Optimization Structural Systems and Optimality Criteria Methods, Springer-Verlag, 1992.
- [13] 尾田十八; 19回連載, 機械の研究, 40巻, 5号, (1988), p. 617から41巻, 11号, (1989), p. 1266まで.
- [14] 山川 宏; 最適化デザイン, 培風館, 1993.
- [15] Schmit, L. A. and Fleury, C.; Structural Synthesis by Combining Approximation Concepts and Dual Methods, AIAA J. Vol. 18, No. 10, (1980), pp. 1252-1260.
- [16] Schmit, L. A. and Fleury, C.; Discrete-Continuous Variable Structural Synthesis Using Dual Methods, AIAA J., Vol. 18, No. 12, (1980), pp. 1515-1524.
- [17] Pappas, M.; Improved Methods for Large Scale Structural Synthesis, AIAA J., Vol. 19, No. 9, (1981), pp. 1227-1233.
- [18] Hale, A. L. and Meirovitch, L.; Procedure for Improving Discrete Structure Representation in Dynamic Synthesis, AIAA J., Vol. 20, No. 8, (1982), pp. 1128-1136.
- [19] Hale, A. L.; Substructure Synthesis and Its Iterative Improvement for Large Nonconservative Vibratory System, AIAA J., Vol. 22, No. 2, (1984), pp. 265-272.
- [20] Prasad, B.; Novel Concepts for Constraint Treatments and Approximations in Efficient Structural Synthesis,

- AIAA J., Vol. 22, No. 7, (1984), pp. 957-966.
- [21] Vanderplaats, G. N.; An Efficient Feasible Directions Algorithm for Design Synthesis, AIAA J., Vol. 22, No. 11, (1984), pp. 1633-1640.
- [22] 中桐滋, 久田俊明; 確率有限要素法入門 不確定構造の解析, 培風館, 1985.
- [23] 伊理正夫, 久保田光一; 高速自動微分法, 応用数理, Vol. 1, No. 1, (1991), pp. 17-35.
- [24] 久田俊明, 野口裕久, 村山修; 動的非線形有限要素法における感度解析手法の開発, 日本機械学会論文集, A 編, 57巻, 536号, (1991), pp. 267-273.
- [25] ラオ=ミトラ著, 渋谷政昭, 田辺国土; 一般逆行列とその応用, 東京図書, 1973.
- [26] 柳井晴夫, 竹内啓; 射影行列・一般逆行列・特異値分解, 東京大学出版会, 1983.
- [27] 中川徹, 小柳義夫; 最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版会, 1989.
- [28] 半谷裕彦, 川口健一; 形態解析, 培風館, 1992.
- [29] 中桐滋; 離散化モデルと構造のシンセシス, 培風館, 1992.