

順応型 Shifted Intergration 法による骨組構造の座屈崩壊解析

Buckling Collapse Analysis of Framed Structures by Using Adaptively Shifted Integration Technique

都井 裕*・磯部 大吾郎*

Yutaka TOI and Daigoro ISOBE

1. 序

通常の3次はり要素による骨組構造の有限要素解析においては、数値積分点の位置あるいは応力評価点の位置が常にガウス積分点にあるために、塑性ヒンジを厳密に部材接合部あるいは集中荷重点に発生させることができず、要素数が少ない場合の塑性崩壊荷重値と変位解の収束性はよくない。

これに対し著者の一人は、応力評価点あるいは塑性ヒンジ発生点の位置が明確な物理モデルである剛体・ばねモデル¹⁾と3次はり要素モデルにおけるひずみエネルギー近似式の等価条件を考察することにより、3次はり要素における数値積分点位置と物理的な応力評価点位置の関係を初めて見出し^{2),3)}、この関係を用いることにより、塑性ヒンジを厳密に部材接合部あるいは集中荷重点に発生させることを可能とした。この方法を Shifted Intergration 法と呼ぶが、筆者らはこの手法を応用し、要素が弾性変形状態にあるときには線形解析における最適位置に数値積分点を配し、要素の一部が降伏した直後にその位置に塑性ヒンジが発生するように数値積分点をシフトさせる手法、いわゆる Adaptively Shifted Integration 法(以下 ASI 法と記す)を提案し、有限要素骨組構造解析プログラムに組み込み、平面骨組および空間骨組の塑性崩壊解析を行ってきた。その結果、崩壊荷重・変位双方に対し、最小限の要素数で実用上十分に正確な解を得ることができた^{4),5)}。

本報告では、ASI 法を有限変形問題にまで拡張し、3次はり要素を用いて柱等に代表される一次元構造の弾塑性座屈問題の有限要素解析を行い、座屈問題における ASI 法の有効性を論じ、座屈問題を解析するのに必要な最小限の要素数について考察した。さらに、1部材1要素で解析をスタートし、座屈の可能性があると判定された部材に対してのみ自動的に要素細分化を行う手法を考察し、平面骨組および空間骨組構造の座屈解析に応用

した。

2. ASI 法の有限変形問題への適用

Bernoulli-Euler の仮定に基づく3次はり要素における2つの数値積分点位置 s_i と塑性ヒンジ発生点(または応力評価点)位置 r_i の関係は、文献2)より

$$r_i = \mp \frac{1}{3s_2} \quad (i=1,2; s_1 = -s_2) \quad (1)$$

と表せる。

要素全体が弾性変形状態にある場合は、ガウス積分点 ($s_i = \mp 1/\sqrt{3}$) が最適な積分点位置であり、従来の有限要素解析では、ガウス積分点に数値積分点を配置した剛性マトリックスを終始用いることになる。一方、ASI 法の場合には、2方向の曲げモーメント、軸力、およびねじりモーメントにより表現された降伏条件を用いて要素両端のどちらか一端(ここでは左端を仮定)の塑性化が判定された瞬間に、数値積分点を(1)式に従ってシフトする。すなわち、以下の式のような剛性マトリックスを用いることになる。

$$[K] = \frac{L}{2} \{ ([B_0(-\frac{1}{3})]' + [B_L(-\frac{1}{3})])' [D_p(-1)] ([B_0(-\frac{1}{3})] + [B_L(-\frac{1}{3})]) + ([B_0(\frac{1}{3})]' + [B_L(\frac{1}{3})])' [D_e(1)] ([B_0(\frac{1}{3})] + [B_L(\frac{1}{3})]) \} \quad (2)$$

$$[K_G] = \frac{L}{2} \{ [G(-\frac{1}{3})]' [S(-1)] [G(-\frac{1}{3})] + [G(\frac{1}{3})]' [S(1)] [G(\frac{1}{3})] \} \quad (3)$$

ここで、 $[B_0]$ 、 $[B_L]$ 、 $[G]$ の括弧内の数値は数値積分点位置、 $[D_e]$ 、 $[D_p]$ 、 $[S]$ の括弧内の数値は物理的な応力評価点位置を示し、要素右端が塑性化すると $[D_e(1)]$ も $[D_p(1)]$ に変化する。

*東京大学生産技術研究所 第2部

3. 梁柱部材の弾塑性座屈解析

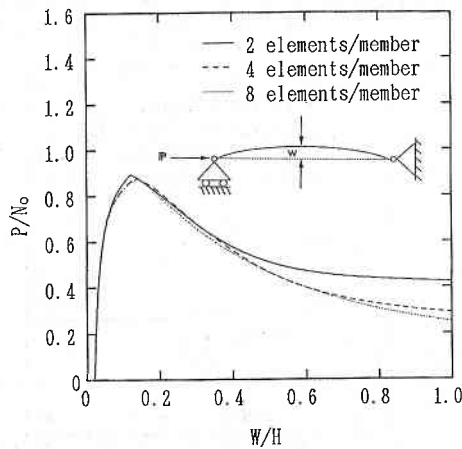
骨組構造の座屈解析に ASI 法を適用する前段階として、両端支持の柱、および一端固定の柱に対してさまざまな組み合わせ荷重を加える弾塑性座屈問題を解析した。ここでは、荷重の加え方によって ASI 法の有効性が損なわれることがないことを立証するために、数種類の負荷荷重パターンに対して解析を行っている。

また、解析において仮定された降伏条件は、次式により表現される。

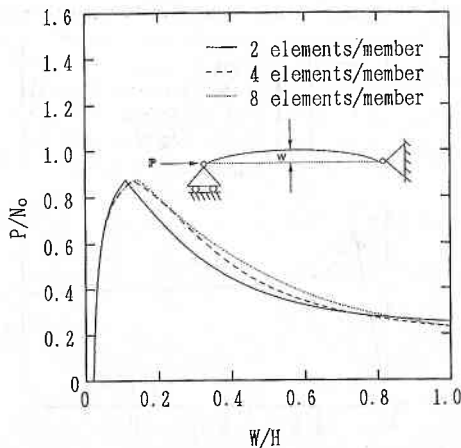
$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right)^2 + \left(\frac{N}{N_0}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{z0}}\right)^2 - 1 = 0 \quad (4)$$

ここに、 M_x , M_y , N および M_z はそれぞれ、2成分の曲げモーメント、軸力およびねじりモーメントである。下添字 '0' は、各断面力成分が単独で部材断面に作用した場合の全断面塑性値を意味する。

Fig. 1 に、両端支持の柱に軸力のみを作用させた場合についての軸荷重-たわみ曲線を示す。ここでは、各要素において数値積分点が常にガウス積分点 ($s_j = \pm 1/\sqrt{3}$) に位置している、通常の有限要素法による解析結果と、前章で有限変形問題に拡張した ASI 法による解析結果とが比較されている。通常法においては比較的塑性崩壊荷重の収束が遅く (図(a)), 一方、図(b)に示されているように、ASI 法は、座屈点付近で多少のばらつきがあるものの、塑性崩壊荷重および座屈後挙動に対し、最小要素数でも実用上十分に良好な解を与えている

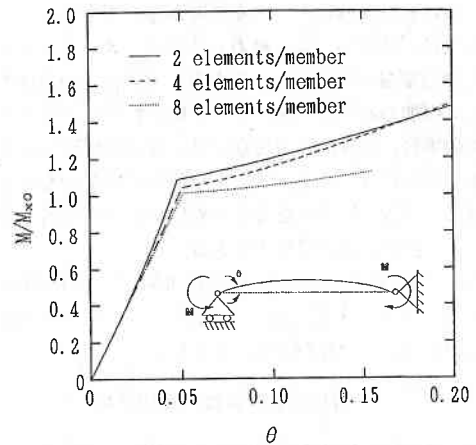


(a) conventional method (Gaussian integration)

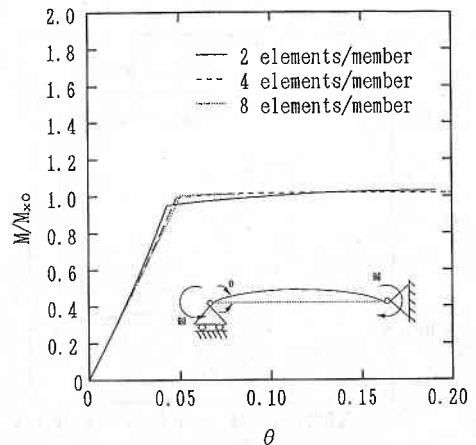


(b) ASI technique

Fig. 1 Simply supported column subjected to axial force



(a) conventional method (Gaussian integration)



(b) ASI technique

Fig. 2 Simply supported column subjected to bending moment

研 究 速 報

ことがわかる。

次に、軸力は加えずに曲げモーメントのみを加えた解析結果を Fig. 2 に示す。この場合も、通常の有限要素に比べ、ASI 法の収束性が良好であることがわかる。特にこのような曲げ支配の問題では、座屈問題とは異なり部材両端に塑性ヒンジが発生するため、要素両端に塑性ヒンジを正確に表現できる ASI 法が圧倒的に有利であることが一目瞭然である。

この他、軸力、2 軸回りの曲げモーメント、およびねじりモーメントをすべて比例増分的に加えて解析した場合にも、ASI 法の収束性は、通常法に比べて十分に維持されていることがわかった。

以上のような問題の場合、部材は 'く' の字 に折れ曲がって中央に塑性ヒンジが発生するが、解析結果から、1 部材当たり 2 要素で塑性ヒンジを正確に表現でき、かつ十分に良好な解析ができることが確認できた。

最後に、部材の一端に軸力と曲げモーメントを加え、一方の固定端に反力として軸力および同符号の曲げモーメントの加わるパターンについて解析した。このような条件の場合、部材内の中央点以外に複数の塑性ヒンジが発生する可能性があり、Fig. 3 の解析結果からもわかるように、十分な収束性を得るためには、1 部材当たり少なくとも 4 要素以上は必要である。

以上の結果から、一般的な骨組構造の座屈問題を ASI 法で解析する際には、1 部材当たり 4 つの 3 次はり要素を用いることが妥当と考えられる。

4. 骨組構造の弾塑性座屈解析

骨組構造の弾塑性座屈解析をする際に、前章の考察に従いすべての部材を 4 要素に分割するときわめて計算効

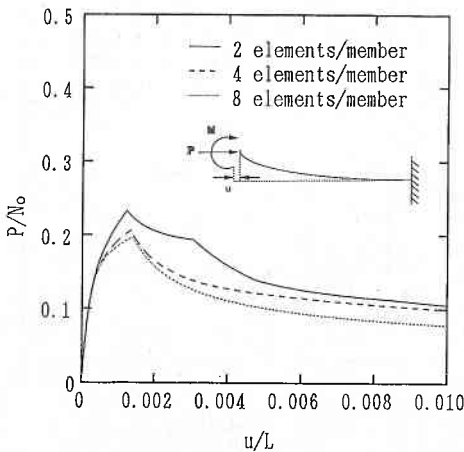
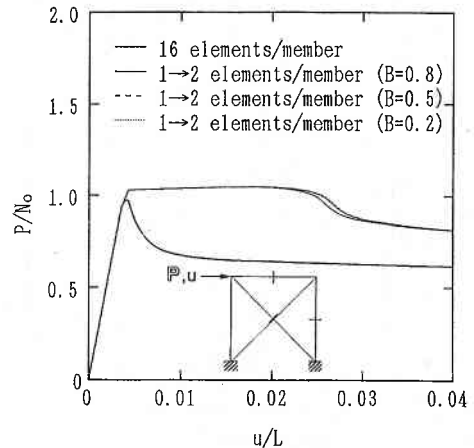


Fig. 3 Cantilever column subjected to axial force and bending moment (ASI technique)

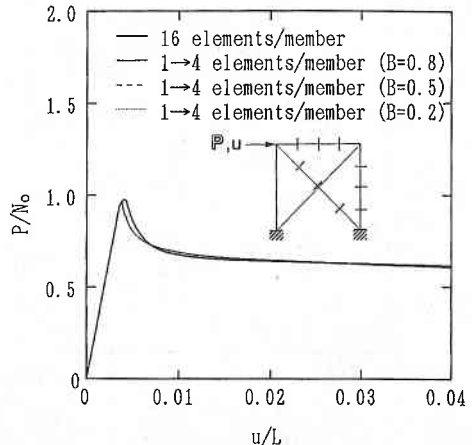
率が悪い。また、座屈を起こさない部材に対しては、1 部材当たり 1 要素で十分に正確な解が得られることがわかっていて、そこで、1 部材当たり 1 要素で解析をスタートし、一般化力成分で与えられる座屈判定曲線で部材の座屈の可能性を判定し、判定された瞬間にその部材のみ 4 要素に分割するという、自動要素細分化アルゴリズムを開発した。解析に用いた座屈判定曲線は、次式のように与えられる⁶⁾。

$$B(M_{x1}, M_{y1}, N, C_{mx}, C_{my}) \equiv \left(\frac{C_{mx}M_{x1}}{(1-\frac{N}{N_c})M_{x0}} \right)^2 + \left(\frac{C_{my}M_{y1}}{(1-\frac{N}{N_c})M_{y0}} \right)^2 + \frac{2N}{N_0} - \left(\frac{N}{N_0} \right)^2 = 1 \quad (5)$$

ただし、 C_{mx} 、 C_{my} はモーメント勾配の修正係数、



(a) ASI technique with automatic resubdivision (1 → 2)



(b) ASI technique with automatic resubdivision (1 → 4)

Fig. 4 Elasto-plastic buckling analysis of a portal frame

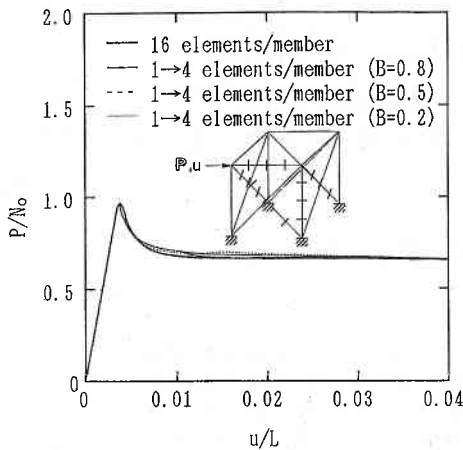


Fig. 5 Elasto-plastic buckling analysis of a space frame using ASI technique with automatic resubdivision (1 → 4)

M_{x1} , M_{y1} は要素両端の曲げモーメント値の絶対値の大きい方の値である。また、 N_x^e , N_y^e は以下の式で表される。

$$N_x^e = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI_x, \quad N_y^e = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI_y \quad (6)$$

この自動要素細分化アルゴリズムを用いて、ブレース付きの平面骨組および空間骨組構造に水平荷重の加わる弾塑性座屈問題を解析した。Fig. 4 に、平面骨組の問題について 1 要素から 2 要素に自動細分化した場合、および 1 要素から 4 要素に自動細分化した場合の結果を示す。図には、最終的な段階での要素細分化の様子が描かれている。特にこのような問題の場合、ブレースにおいて複雑な座屈モードが発生し、前者の場合十分に解析できないが、後者の場合にはかなり正確な収束値を示すことが図からもよくわかる。また、図中の B の値は、自動分割する瞬間の(5)式の左辺の値である。つまり、この値が小さいほど早めに多要素に分割することになり、収束性はよくなるが計算時間が長くなる。Fig. 5 には、空間骨組について 1 要素から 4 要素に自動細分化した場合の結果を示す。

以上の結果からわかるように、一般的な骨組構造の座屈解析をする際に、1 要素から 4 要素に自動細分化し、しかもその際の B の値を 0.8 としても、十分に満足な解析が可能である。

5. 結 論

本報告では、文献4), 5)で提案し、微小変形問題解析に用いた順応型 Shifted Intergration 法 (ASI 法) を座屈問題に適用した。一般的な骨組構造の座屈解析アルゴリズムを構築するのに必要な情報を得るために、3 次はり要素を用いて梁柱部材の弾塑性座屈問題の有限要素解析を行い、座屈問題を解析するのに必要な最小限の要素数を 4 とした。さらに、座屈しそうな部材のみ 4 要素に自動細分化し、その他の部材は、微小変形領域では精度の保証されている 1 部材当たり 1 要素で解析するという、骨組構造に対する計算時間を短縮化するアルゴリズムを開発した。そして、このアルゴリズムを平面および空間骨組構造の弾塑性座屈解析に応用し、満足な解を得ることができた。なお、動的崩壊問題に対する数値的研究は現在進行中である。

(1993年6月11日受理)

参 考 文 献

- 1) 都井：鋼構造の離散化極限解析，コンピュータによる極限解析法シリーズ 3，培風館，(1991)
- 2) 都井：骨組構造および回転対称シェル構造の有限要素解析における Shifted Intergration 法について，日本造船学会論文集，第168号，(1990)，357-369.
- 3) Y. Toi: *Shifted Intergration Technique in One-dimensional Plastic Collapse Analysis Using Linear and Cubic Finite Elements*, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 31, (1991), 1537-1552.
- 4) 都井，磯部：骨組構造の有限要素崩壊解析における順応型 Shifted Intergration 法，日本造船学会論文集，第171号，(1992)，363-371.
- 5) Y. Toi and D. Isobe: *Adaptively Shifted Intergration Technique for Finite Element Collapse Analysis of Framed Structures*, Int. J. Numer. Methods Eng., (1993), in press.
- 6) 日本建築学会：鋼構造塑性設計指針，(1975)，119