

# フーリエ変換による離散構造物の波動伝播解析

Wave Propagation Analysis of Discrete Structures Using Fourier Transform

西田 明美\*・半谷 裕彦\*  
Akemi NISHIDA and Yasuhiko HANGAI

## 1. はじめに

平板や円筒シェルなど連続系空間構造物の波動伝播特性については、すでに多くの研究がなされている。しかし、ラチスドームのような離散構造物についての同研究は、多自由度ゆえに生じる数値解析上の困難さからあまり研究がなされていない。自由度を低減できるひとつの有効な方法に連続体置換法がある<sup>1)</sup>。しかし、波動伝播解析の連続体置換に関する調査・研究は少ない<sup>2)</sup>。このような背景のもと、本研究の目的は、1. 離散構造物の波動伝播特性に対する効果的な解析法を開発し、2. 連続系と離散系の波動伝播特性の相違点を調査すること、そして、3. 離散構造物に対して連続体置換法を適用する際に用いられる有効剛性・有効減衰率等を評価することにある。

ところで、波動伝播を表す波動方程式は偏微分方程式となるため、一般に時間に対して積分変換法(通常ラプラス変換)や差分法が<sup>3)</sup>、空間に対して境界要素法や有限要素法、差分法等が適用されている。しかし、積分変換法としてラプラス変換を用いる場合、その周波数領域における解を解析的に逆変換することは、特別な場合を除いて容易ではない。そのため、近似的に扱う方法が多数提案されている<sup>3)</sup>。一方、計算時間を短縮するためにFFTを利用できるようラプラス逆変換式を変形した解析法も提案され<sup>4)</sup>、この方法を利用して足立らはラプラス変換とマトリクス法を用いた衝撃応答解析<sup>5),6)</sup>を行っている。また、岩崎らは文献<sup>4)</sup>による方法を修正し、さらにラプラス変換と有限要素法を用いた数値解析法を一般的に定式化している<sup>7)</sup>。また、ラプラス変換のかわりにフーリエ変換を用いた方法も利用されている<sup>8)</sup>。この著書でDoyleは半無限に広がる要素の剛性評価を示している。本研究では、Doyleの方法に基づきフーリエ変換とマトリクス法を用いた解析法を用いる<sup>9),10)</sup>。はじめにフレームのスペクトル解析について述べる。次に、

\*東京大学生産技術研究所 第5部

離散構造物の波動伝播解析の二つの数値計算例を示す。一方はトラスで構成される単層ラチスドーム、他方はフレームで構成される放射状の二次元構造物(以下、離散系円板と称する)である。

## 2. フレームのスペクトル解析

### 2.1 基礎方程式

等方性、均質な弾性体の細長いフレーム材を考える。図1のように材軸方向にx軸を定め、これと右手系をなすようなy,z軸を節点1を通るように定める。また、y,z軸は断面の主軸にとる。x,y,z軸方向の変位を $u_l$ 、合力を $P_l$ 、x,y,z軸まわりの回転角を $\theta_l$ 、モーメントを $M_l(l=x,y,z)$ と表す。軸方向変形およびねじれ変形に関しては一次元波動方程式を用い、曲げ変形に関してはベルヌーイ・オイラー理論による横振動方程式を用いるとする。このとき、フレーム要素の基礎方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^4 u_l}{\partial x^4} + \frac{1}{C_{bl}^2} \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} = 0 \quad (l=y,z) \end{aligned} \right\} (1)$$

ここで、

$$C_0^2 = \frac{E}{\rho}, \quad C_2^2 = \frac{G}{\rho}, \quad C_{by}^2 = \frac{EI_x}{\rho A}, \quad C_{bz}^2 = \frac{EI_y}{\rho A}$$

であり、Eは縦弾性係数、Gはせん断弾性係数、ρは密度、 $I_y$ および $I_x$ はそれぞれyおよびz軸に関する断面2次モーメントである。また、それぞれの合力およびモーメント成分は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P_x = EA \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad P_y = -\frac{\partial M_x}{\partial x}, \quad P_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} \\ M_x = GJ \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad M_y = -EI_y \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \quad M_z = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} (2)$$

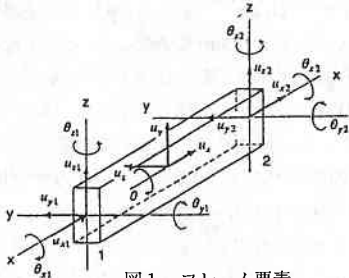


図1 フレーム要素

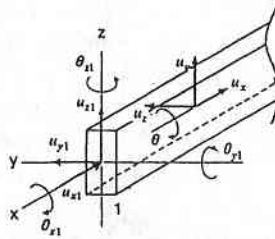


図2 半無限フレーム要素

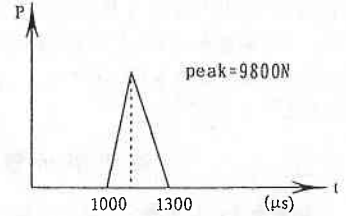


図3 作用させた衝撃力の時刻歴

ここで、 $J$ は  $x$  軸に関する断面極二次モーメントである。(1)式をフーリエ変換した後、次の一般解がそれぞれ求められる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_x(x, \omega) &= \sum_{j=1}^2 A_j \exp[\lambda_j x], & \hat{\theta}_x(x, \omega) &= \sum_{j=1}^2 B_j \exp[\xi_j x] \\ \hat{u}_y(x, \omega) &= \sum_{j=1}^4 C_j \exp[\eta_{y_j} x], & \hat{u}_z(x, \omega) &= \sum_{j=1}^4 D_j \exp[\eta_{z_j} x] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \lambda_j^2 + k_0^2 &= 0, & k_0^2 &= \omega / C_0 \\ \xi_j^2 + k_2^2 &= 0, & k_2^2 &= \omega / C_2 \\ \eta_{ij}^4 - k_{bl}^4 &= 0, & k_{bl}^4 &= (\omega / C_{bl})^2 \quad (l=y, z) \end{aligned}$$

である<sup>6)</sup>。式中の  $\cdot$  は時間領域から周波数領域へフーリエ変換された変数を表すものとする。

2.2 フレーム要素の要素剛性マトリクス

前節で求められた一般解を利用して、部材座標系における要素剛性マトリクスを作成する。(3)式より、フレーム要素の  $x, y, z$  軸方向の変位およびねじれ角の周波数領域における変位関数はそれぞれ次式のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_{xn}(x, \omega_n) &= A_{1n} \exp[-ik_0n x] + A_{2n} \exp[-ik_0n(L-x)] \\ \hat{\theta}_{xn}(x, \omega_n) &= B_{1n} \exp[-ik_2n x] + B_{2n} \exp[-ik_2n(L-x)] \\ \hat{u}_l(x, \omega_n) &= C_{1n} \exp[-ik_{bln} x] + C_{2n} \exp[-ik_{bln} x] \\ &\quad + C_{3n} \exp[-ik_{bln}(L-x)] + C_{4n} \exp[-ik_{bln}(L-x)] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ただし、 $l=z$  のときは係数  $C$  を  $D$  に変えて表す。

節点1 ( $x=0$ ) および節点2 ( $x=L$ ) における節点変位および節点力を下付き添字1および2によって表す。節点1, 2における変位および力がそれぞれ節点変位および節点力と等しくなる条件を考慮し、上式より未定係数  $A, B, C, D$  を消去する。このとき、軸力、ねじれモーメント、2方向の曲げモーメントおよびせん断力に関する剛性方程式はそれぞれ次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{P}_{x1} \\ \hat{P}_{x2} \end{Bmatrix}_n &= [K_0]_n \begin{Bmatrix} \hat{u}_{x1} \\ \hat{u}_{x2} \end{Bmatrix}_n, & \begin{Bmatrix} \hat{M}_{x1} \\ \hat{M}_{x2} \end{Bmatrix}_n &= [K_2]_n \begin{Bmatrix} \hat{\theta}_{x1} \\ \hat{\theta}_{x2} \end{Bmatrix}_n \\ \begin{Bmatrix} \hat{P}_l \\ \hat{M}_l \end{Bmatrix} &= [K_{bl}]_n \begin{Bmatrix} \hat{u}_l \\ \hat{\theta}_l \end{Bmatrix} & (l=y, z) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、

$$[K_0]_n = \frac{EA}{L} \frac{ik_0nL}{1 - \exp[-2ik_0nL]} \begin{bmatrix} 1 + \exp[-2ik_0nL] & -2\exp[-ik_0nL] \\ -2\exp[-ik_0nL] & 1 + \exp[-2ik_0nL] \end{bmatrix}$$

$$[K_2]_n = \frac{GJ}{L} \frac{ik_2nL}{1 - \exp[-2ik_2nL]} \begin{bmatrix} 1 + \exp[-2ik_2nL] & -2\exp[-ik_2nL] \\ -2\exp[-ik_2nL] & 1 + \exp[-2ik_2nL] \end{bmatrix}$$

$$[K_{bl}]_n = \frac{EI_s}{L^3} \begin{bmatrix} \alpha & \xi\bar{\gamma} & -\bar{\alpha} & \xi\gamma L \\ & \beta L^2 & -\xi\gamma L & \beta L^2 \\ & & \alpha & -\xi\bar{\gamma} L \\ sym. & & & \beta L^2 \end{bmatrix}_n \quad \left( \begin{aligned} l=y \rightarrow s=z \\ l=z \rightarrow s=y \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= i(1+i)(z_{11}z_{22} + iz_{12}z_{21})(k_{bln}L)^3/\Delta \\ \bar{\alpha} &= i(1+i)(z_{11}z_{21} + iz_{12}z_{22})(k_{bln}L)^3/\Delta \\ \beta &= (1+i)(z_{11}z_{22} - iz_{12}z_{21})(k_{bln}L)/\Delta \\ \bar{\beta} &= -(1+i)(z_{11}z_{21} - iz_{12}z_{22})(k_{bln}L)/\Delta \\ \gamma &= -2z_{11}z_{12}(k_{bln}L)^2/\Delta \\ \bar{\gamma} &= i(z_{11}^2 - z_{12}^2)(k_{bln}L)^2/\Delta \\ \Delta &= z_{11}^2 + z_{12}^2 \\ z_{11} &= 1 - \exp[-ik_{bln}L] \exp[-k_{bln}L] \\ z_{22} &= 1 + \exp[-ik_{bln}L] \exp[-k_{bln}L] \\ z_{12} &= \exp[-ik_{bln}L] - \exp[-k_{bln}L] \\ z_{21} &= \exp[-ik_{bln}L] + \exp[-k_{bln}L] \end{aligned}$$

であり<sup>8)</sup>、式中の  $\xi$  は  $l=y$  のとき +1,  $l=z$  のとき -1 の値をとる。全要素について上述の係数マトリクスで表される要素剛性マトリクスを求める。ついで、通常マトリクス法と同様の手順で解を求めることができる。異なる点は、すべての計算を周波数領域で行うことと、す

研究速報  
 べての  $n$  について計算を行う必要があることである。  
 なお、半無限要素(図2)の要素剛性マトリクスは要素内の変位を進行波のみで仮定することによって同様に求められる<sup>8)</sup>。

3. 数値解析例

3.1 衝撃を受ける単層ラチスドーム

ライズ・スパン比0.05の単層ラチスドームの中央点に鉛直方向の衝撃力を作用させ、変位応答および軸力応答を解析した。作用させた衝撃力を図3に示す。解析モデルとして部材配置の異なる3種類のモデル(Type1~Type3:図4)を設定した。部材材料はスチールを仮

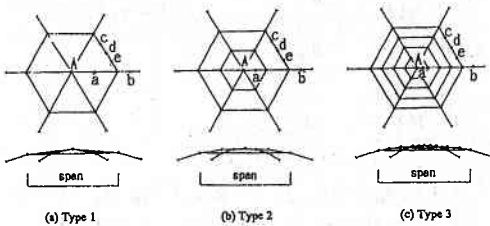


図4 単層ラチスドーム

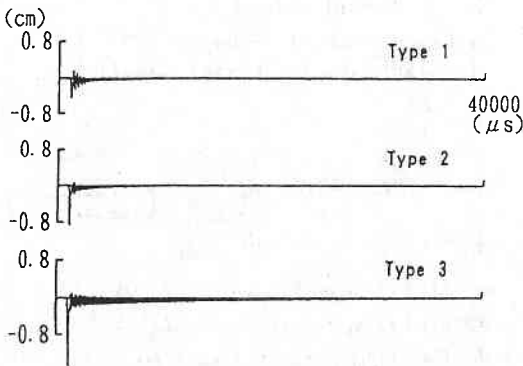


図5 鉛直方向変位の時刻歴応答 (A点, 0~40000 μs)

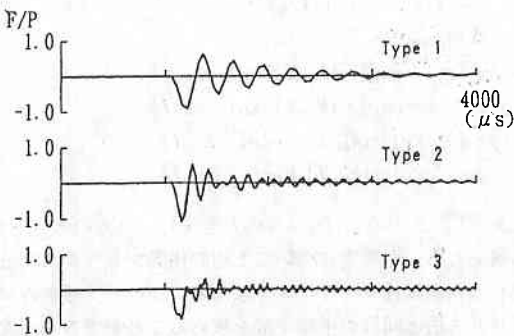


図6 軸力の時刻歴応答 (b点)

定し、 $E=2.06 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$ ,  $A=1 \text{ cm}^2$ ,  $\rho=7.85 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3$ , スパンは51.0cmである。また、Type1とType2はフーリエ変換の周期  $T=10240\mu\text{s}$ , サンプル数  $N=1024$ , Type3は  $T=40960\mu\text{s}$ ,  $N=4096$ として計算を行った。A点の変位の時刻歴応答を図5に、b点の軸力の時刻歴応答を図6に、c点の軸方向変位の時刻歴応答を図7に示す。また、Type1のc, d, e点の軸方向変位の時刻歴応答を図8に、b点を通過するエネルギーの累積の外力仕事に対する比を図9に示す。

3.2 衝撃を受ける離散系円板

離散系円板の中央点に鉛直方向の面外衝撃力を作用させ、モーメントの時刻歴応答を解析した。解析モデルとして部材配置の異なる3種類のモデル(Type1~Type3:図10)を設定した。部材材料はスチールを仮定し、部材の幅  $b=0.6\text{cm}$ , 高さ  $h=0.2\text{cm}$ , 直径は50.0cmである。作用させた衝撃力は前節と同様である。ただし、衝撃力の peak 値は9.8Nとした。また、Type1, 2, 3ともに  $T=163840\mu\text{s}$ ,  $N=16384$ として計算を行った。

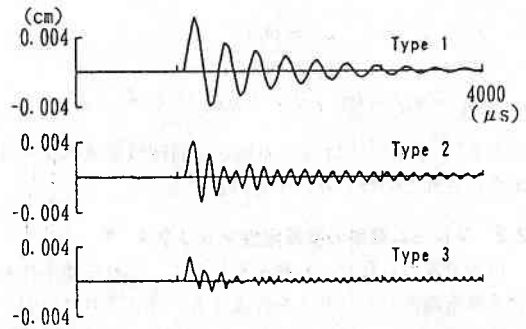


図7 軸方向変位の時刻歴応答 (c点)

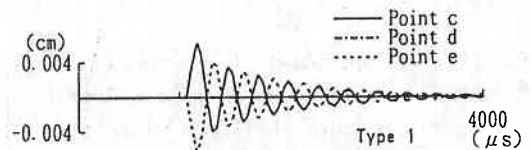


図8 軸方向変位の時刻歴応答 (Type1)

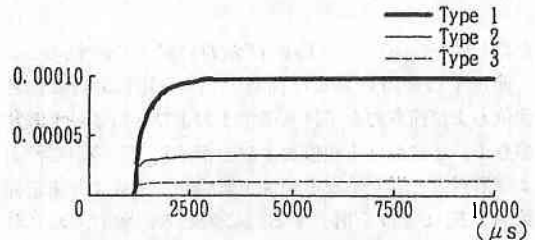


図9 b点における通過エネルギーの外力仕事に対する比

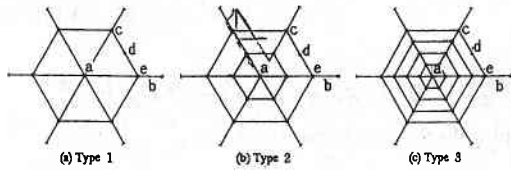


図10 離散系円板

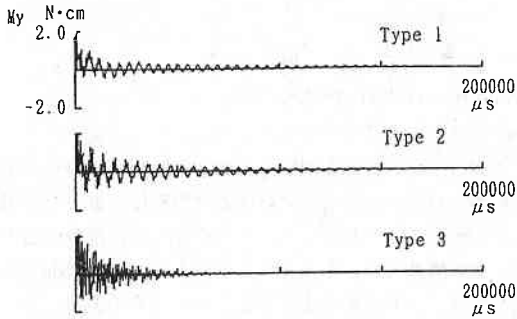


図11 モーメントの時刻歴応答(a点, 0~200000 μs)

なお、解析の安定性を向上させるために0.5%の減衰を加えた。a点のモーメントの時刻歴応答を図11に、b点およびd点のモーメントの時刻歴応答をそれぞれ図12および図13に示す。

4. 結 論

単層ラチスドーム頂点および離散系円板中央点に衝撃力を作用させ、構造物内の波動伝播性状を調べた。その結果、以下のことがわかった。

1. 同一入射外力に対する最大応答値は構造物の部材配置の密度によって異なる。単層ラチスドームおよび離散系円板の双方において、部材配置が密になるほど内部における経線方向部材の最大応答値は大きくなり、緯線方向部材の最大応答値は小さくなっている。
2. 最大応答値到達以降の減衰性状も、構造物の部材配置の密度によって異なる。単層ラチスドームの場合、部材配置が密になるほどその減衰率は小さくなり、離散系円板の場合、減衰率は大きくなっている。
3. 単層ラチスドームの外部への散逸エネルギーは、構造物の部材配置の密度が高いほど少ない。

(1993年5月19日受理)

参 考 文 献

- 1) 日置興一朗他：スペースフレームの設計・解析・施行，1983。
- 2) 尾田十八他：多孔質体を伝ばする衝撃応力波の減衰効果，日本機械学会論文集(A編)，58巻551号，pp. 1055-1059, 1992. 7。

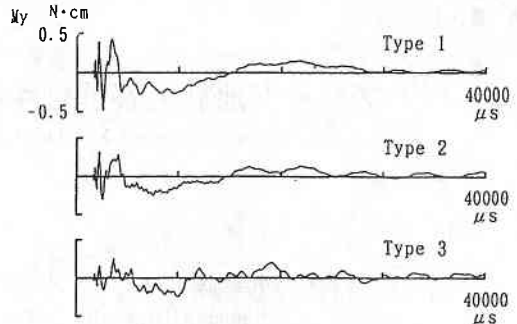


図12 モーメントの時刻歴応答(b点)

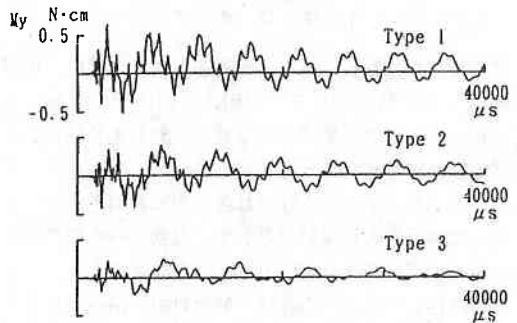


図13 モーメントの時刻歴応答(d点)

- 3) 細野敏夫：数値ラプラス変換，電気学会論文誌A，99巻64号，pp. 44-50, 1979。
- 4) Krings, W. and Waller, H.: Contribution to Numerical Treatment of Partial Differential Equations with the Laplace Transformation-An Application of the Algorithm of the Fast Fourier Transformation, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 14, pp. 1183-1196, 1979。
- 5) 足立忠晴他：水撃をうける有限長円筒殻の衝撃応答の解析，日本機械学会論文集(A編)，51巻467号，pp. 1886-1892, 1985。
- 6) 足立忠晴他：数値ラプラス変換を利用したマトリクス法による骨組構造の衝撃応答解析，日本機械学会論文集(A編)，56巻524号，pp. 237-243, 1990。
- 7) 岩崎英治他：ラプラス変換法を用いた骨組構造の過渡応答解析，土木学会構造工学論文集，Vol. 38A, pp. 1445-1454, 1992。
- 8) Doyle, J. F.: Wave Propagation in Structure-An FFT-Based Spectral Analysis Methodology, Springer-Verlag, 1989。
- 9) 西田明美，半谷裕彦：フーリエ変換を用いた単層ラチスドームの波動伝播解析，日本鋼構造協会論文報告集，Vol. 1, 1993. (投稿中)
- 10) 西田明美，半谷裕彦：フーリエ変換を用いた離散系円板の波動伝播解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，Vol. 14, 1993. (投稿中)
- 11) Achenbach, J. D.: Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland, 1990。