研究速報
特集 9
UDC 699.841/.842：624.131.53/.55

信頼性理論に基づく最適設計
——構造物の最適層せん断力係数について——

Optimum Design Based on Structural Reliability Theory
——Decision Making of the Optimum Shear Force Coefficient of Structures——

洪　起*・高梨晃一*
Ki KOH and Koichi TAKANASHI

1．はじめに

地震入力波を定常ランダム過程でモデル化し，地震入力波による荷重効果と構造物の抵抗として，それぞれ累積塑性ひずみによって吸収される構造物系へのエネルギー入力とあらかじめ設定された構造物系の限界塑性エネルギー吸収能力を用いた場合の信頼度関数を構造物の降伏震度の関数として求め，災害による損失と建設費の和の期待値で表される目的関数を最小にすることによって得られる最適降伏震度について若干の理論的考察を加える．

2．耐震安全性規範

構造物の累積塑性ひずみによって吸収される構造物系へのエネルギー入力を $\tilde{w}_p$ とし，構造物の許容累積塑性ひずみを表す限界塑性エネルギー吸収能力を $\tilde{w}_r$ とすれば，$\tilde{w}_r > \tilde{w}_p$ のとき構造物は作用した地震荷重に対して安全であるとすることができ[5]．履歴構造物の耐震安全規範は次式になる．

$$\tilde{w}_r > \tilde{w}_p \tag{2-1}$$

$\tilde{w}_r$ と $\tilde{w}_p$ が確率変数で表される信頼性解析においては，$\tilde{w}_r$ は構造物の抵抗であり，$\tilde{w}_p$ は地震入力波による荷重効果と見なすことができ，(2-1)式を満たす事象が生じる確率は構造物の安全の確率になる．以下，$\tilde{w}_r$，$\tilde{w}_p$ が確率変数の場合は大文字で表す．

3．累積塑性ひずみによって吸収されるエネルギー入力の統計量

地震波によって履歴振動系に入力されるエネルギーのうちで，地震終了時の弾性振動によって吸収されるエネルギー入力を無視すれば，総エネルギー入力 $\tilde{w}_t$ は次式で表される[5]．

$$\tilde{w}_t = \frac{1}{2} M \tilde{V}_e^2 \tag{3-1}$$

ただし　M：構造物の総質量，$\tilde{V}_e$：弾性ひずみと累積塑性ひずみによって吸収されるエネルギー入力に対する換算速度応答スペクトル

$\tilde{V}_e$ のうちで累積塑性ひずみによって吸収されるエネルギー入力 $\tilde{w}_p$ は次式で表される．

$$\tilde{w}_p = \frac{1}{2} M \tilde{V}_p^2 \tag{3-2}$$

ただし　$\tilde{V}_p$：累積塑性ひずみによって吸収されるエネルギー入力の換算速度応答スペクトル

上式の $\tilde{V}_p$ は，地震波による構造物系への総エネルギー入力および構造物の減衰常数等に依存する値であるが，構造物の塑性変形能力を表す構造特性係数 D_s 値を用いると，弾性応答と弾塑性応答のエネルギー一定の関係から，$\tilde{V}_e$ と $\tilde{V}_p$ の関係式が得られる．この関係式と $\tilde{V}_e$ は h（系の減衰定数）＝0.1の弾性系のエネルギースペクトルの短周期領域を若干修正した2直線で近似できるという秋山の結論[5]を用いると，地震入力波が確定値の場合の $\tilde{w}_t$ と $\tilde{w}_p$ の関係式は次式になる．

$$\tilde{w}_p = (1 - D_s^2)\xi \tilde{w}_t \tag{3-3}$$

ただし　$\xi = 1$　　$T_1 > Tg$
　　　　$\xi = (T_1/Tg)^2$　　$T_1 < Tg$

上式の T_1 は構造物の1次周期である．一方，金井・多治見によって得られた周波数特性を持つ地盤上の構造物に入力波として定常ランダム過程が作用したときの上記のそれぞれのエネルギー入力は確率変数で表され，弾性振動系への総エネルギー入力の統計値は次式になる[3]．

$$E[\tilde{W}_t] = S_y(\omega_1)\pi S_0 M T_d \tag{3-4}$$
$$V[\tilde{W}_t] = S_y(\omega_1) 2\pi S_0 \sigma_{\dot{x}}^2 M^2 T_d$$

ただし，$S_y(\omega_1) = \dfrac{\omega_g^4 + 4h_g^2\omega_g^2\omega_1^2}{(\omega_g^2 - \omega_1^2)^2 + 4h_g^2\omega_g^2\omega_1^2}$

$E[\tilde{W}_t]$，$V[\tilde{W}_t]$：$\tilde{W}_t$ の期待値と分散，T_d：入力

*東京大学生産技術研究所　第5部

継続時間，S_0：地震波のパワースペクトルで確率変数，$\sigma_{\dot{x}}^2$：弾性振動形の定常速度応答の分散，ωg, hg：地盤特性の卓越振動数と減衰常数，ω_1：構造物の1次振動数

上式は，減衰常数 h を持つ1自由度弾性振動系への総エネルギー入力の統計値であるが，1次振動モードによるエネルギー入力が支配的であると考え，近似的に多自由度系へのエネルギーも(3-4)式で表されるものとする[6]．勿論，その場合の(3-4)式のパラメータ $\sigma_{\dot{x}}^2$ は1次振動モードを対象としたものでなければならない．$\widetilde{W}_t$ の統計量は(3-4)式で表されるから，$\widetilde{W}_p$ の統計量は(3-3)式から次のように得られる．

$$E[\widetilde{W}_p]=(1-D_s^2)\xi S_y(\omega_1)\pi S_0 MT_d \qquad (3\text{-}5)$$
$$V[\widetilde{W}_p]=(1-D_s^2)^2\xi^2 S_y(\omega_1)2\pi S_0\sigma_{\dot{x}}^2 M^2 T_d$$

このエネルギー入力 $\widetilde{W}_p$ は1次振動モードに等しい水平分布荷重の繰返しによって生じる累積塑性ひずみにより消費されるものと仮定する．

(3-5)式の $\widetilde{W}_p$ を無次元累積塑性エネルギー量 $W_p=\widetilde{W}_p/(Q_y x_y)$ (Q_y：降伏強度，x_y：降伏変位) に変換したときの W_p の統計量は，パワースペクトル S_0 をある値に固定したときの統計量になるから，S_0 を条件付けにしたときの W_p の期待値と2乗平均値は次式になる．

$$E[W_p \mid S_0=s_0]=(1-D_s^2)\xi S_y(\omega_1)\frac{\pi s_o T_d\omega_1^2}{g^2C_y^2} \qquad (3\text{-}6)$$

$$E[W_p^2 \mid S_0=s_0]=(1-D_s^2)\xi^2 S_y(\omega_1)\cdot\left(\frac{1}{h}+\omega_1 T_d S_y(\omega_1)\right)\frac{\pi^2 s_0^2 T_d\omega_1^3}{g^4C_y^4}$$

ただし，C_y：降伏震度，g：重力加速度

(3-6)式から s_0 を確率論的に消去すれば，W_p の期待値と変動係数は次式になる．

$$E[W_p]=(1-D_s^2)\xi S_y(\omega_1)\frac{\pi \mathrm{E}[S_0]\,T_d\omega_1^2}{g^2C_y^2} \qquad (3\text{-}7)$$

$$V_{W_p}=\sqrt{\frac{1}{\omega_1 T_d h S_y(\omega_1)}(V_{S_0}^2+1)+V_{S_0}^2}$$

ただし，V_{W_p}：W_p の変動係数，V_{S_o}：S_0 の変動係数

(3-7)式の変動係数の第1項の分母に入力継続時間 T_d と固有振動数の積の項が含まれているので，T_d がある程度大きいと，h＝0.1程度の粘性減衰に対して，第1項は十分小さくなる．さらに，$S_y(\omega_1)$ の変動が V_{W_p} に及ぼす影響は，第2項に比べて十分小さく，h_g＝0.5の場合，$S_y(\omega_1)$ は2以下の範囲にあるから，その平均的な値として $S_y(\omega_1)=1$ とすれば，(3-7)式は次式になる．

$$V_{W_p}=\sqrt{\frac{1}{\omega_1 T_d h}(V_{S_0}^2+1)+V_{S_0}^2} \qquad (3\text{-}8)$$

(3-8)式の変動係数は，T_d がある程度大きい場合，入力レベルの変動係数に近い値を示し，また，C_y に依存しない表現式になっている．

4．t 年後の構造物の安全の確率

地震事象の発生をポアソン過程によって表されるものと仮定すれば，t 年後の構造物の安全の確率は，近似的に次式で表される[6]．

$$R(t)=\exp\left\{-\int_0^t\lambda(\tau)\,d\tau\right\} \qquad (4\text{-}1)$$

ただし，$R(t)$：t 年後の構造物の安全の確率，$\lambda(\tau)$：τ 年間で構造物は安全，すなわち構造物は残存しているという条件下で，引き続く単位年間に初めて W_r より大きい W_p を生じさせる地震事象の単位年間当たりの平均的生起回数で，危険率とも言う．

構造物の破壊事象は極く稀な事象とすれば，危険率は

$$\lambda(\tau)=\lambda_0 P_f \qquad (4\text{-}2)$$

ただし，λ_0：構造物に塑性ひずみを引き起こすようなあるレベル以上のパワースペクトルをもつ地震事象が生じる単位年間あたりの平均的回数，P_f：地震事象が一度が生じたときの構造物の破壊確率

で近似され，破壊確率 P_f は次式になる．

$$P_f=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{F}_{W_p}(w)\,p_{W_r}(w)\,dw \qquad (4\text{-}3)$$

ただし，$\overline{F}_{W_p}(w)=1-F_{W_p}(w)$　($F_{W_p}(w)$：W_p の確率分布関数)，$p_{W_r}(w)$：W_r の密度関数

一般に，W_p の確率密度関数はガンマ分布で表され，その分布関数は積分から得られる[3]．積分表示は式を複雑にするので，確率分布関数の漸近分布を考えることにする．一般に，W_p の大きい値が構造物の崩壊を引き起こすと思われるので，まず，ガンマ分布の右裾部分に注目する．この部分を対象にした分布関数は W_p の最大値の分布関数と見なすことができ，漸近的にⅠ型極値分布に近づく．詳細の理由は6)に述べられている．それゆえ，W_p の分布関数は次式のような2重指数分布で表されるものと仮定する．

研　究　速　報

$$F_{W_p}(w)=\exp\left\{-\exp\left(-\alpha_1\frac{w}{\overline{W}_p}+\alpha_2\right)\right\} \tag{4-4}$$

ただし，$\alpha_1=\dfrac{\pi}{\sqrt{6}\,V_{w_p}}$，$\alpha_2=\alpha_1\left(1-\dfrac{\tilde{\gamma}\sqrt{6}}{\pi}V_{w_p}\right)$，

$\tilde{\gamma}=0.5772$，$\overline{W}_p=E[W_p]$

(4-4)式の分布関数は降伏震度 C_y の関数として表されている．破壊確率としてある程度小さい領域を対象とし，W_r の密度関数として正規分布を仮定すれば，破壊確率 P_f は(4-3)式から求まり，(4-1)式の安全の確率は次式になる．

$$R(t)=\exp(-\lambda_0 P_f t) \tag{4-5}$$

ただし，

$$P_f=\exp\left\{-\alpha_1\overline{W}\left(1-\frac{1}{2}\alpha_1\overline{W}V_{W_r}^2\right)+\alpha_2\right\}$$

$$\overline{W}=\frac{\overline{W}_r}{\overline{W}_p}=\frac{\overline{W}_r g^2 C_y^2}{(1-D_s^2)\xi S_y(\omega_1)\pi E[S_0]\,T_d\omega_1^2}$$

V_{W_r}：W_r の変動係数

上式中の $\overline{W}_r$ と $\overline{W}_p$ は W_r と W_p のそれぞれの期待値を表す．それゆえ，$\overline{W}$ は安全性規範として(2-1)式を用いたときの中央安全率である．

5．履歴構造物の最適降伏震度

信頼性理論においては，構造物の安全性を表す尺度として一般に確率が用いられているが，最適な安全の確率を定める決定的な手法はない．それゆえ，本論では，(5-1)式で定義される目的関数を履歴構造物の降伏震度の関数として求め，この目的関数を最小にする降伏震度を最適降伏震度とする[1),6)]．

$$E[D]=\int_0^{t_u}W_D(t)\left[-\frac{\partial R(t)}{\partial t}\right]dt+C_s(C_y)$$

$$W_D(t)=\int_t^{\infty}pe^{-\gamma\tau}d\tau \tag{5-1}$$

ただし，$E[D]$：構造物の崩壊による損失の期待値
$W_D(t)$：構造物が t 年後に崩壊したときの損失，$C_s(C_y)$：構造物の建設費（C_y の増加関数），p：構造物に期待される年間利益，γ：年利率，t_u：構造物の使用予定年限

(5-1)式に(4-5)式を代入し，微小項を無視すると次式が得られる．

$$E[D]=\frac{W_D(0)\,\lambda_0 P_f}{\gamma}+C_s(C_y) \tag{5-2}$$

建設費は次式で表されるものとする[6)]．

$$C_s(C_y)=C_1+C_2C_y^2 \tag{5-3}$$

ただし，C_1，C_2：常数

(5-3)式は一般には構造材の費用を表すが，非構造材の費用は C_1 に含ませることができる．破壊確率 P_f は(4-5)式で示したように，C_y の関数になっているから，最適降伏震度 C_{yopt} は(5-3)式を(5-2)式に代入し，C_y^2 で微分することから次のように得られる．

$$\frac{\partial E[D]}{\partial C_y^2}=\frac{W_D(0)\,\lambda_0\alpha_1}{\gamma}(\alpha_1\overline{W}_{opt}V_{W_r}^2-1)\frac{\overline{W}_{opt}}{C_{yopt}^2}\cdot$$

$$\exp\{-\alpha_1\overline{W}_{opt}(1-\frac{1}{2}\alpha_1\overline{W}_{opt}V_{W_r}^2)+\alpha_2\}+C_2=0 \tag{5-4}$$

ただし，C_{yopt}：最適降伏震度，

$$\frac{\overline{W}_{opt}}{C_{yopt}^2}=\frac{\overline{W}_r g^2}{(1-D_s^2)\xi S_y(\omega_1)\pi E[S_0]\,T_d\omega_1^2}$$

特別な場合として，W_r に変動がなければ，$V_{W_r}=0$ であるから，最適降伏震度は次のようになる．

$$C_{yopt}^2=\frac{W_D(0)\,\lambda_0\alpha_1\overline{W}_{opt}}{\gamma C_2}\exp(-\alpha_1\overline{W}_{opt}+\alpha_2) \tag{5-5}$$

(5-5)式を(4-5)式に代入すれば，$V_{W_r}=0$ の時の構造物の安全の確率の最適値を次のように求めることができる．

$$P_r[W_r>W_p(C_y=C_{yopt})]=$$

$$\exp\left(\frac{\sqrt{6}\,\gamma V_{W_r}C_{yopt}^2C_2t}{\pi W_D(0)\,\overline{W}_{opt}}\right) \tag{5-6}$$

(5-6)式から地震事象の平均的生起回数を表す λ_0 は最適値に無関係であることがわかる．

次に，ある地域に建設される標準的構造物の最適降伏震度とそうでない構造物の最適降伏震度の関係式を求めるために，次のような5つの式を導入する．

$$1-\tilde{D}_s^2=\alpha_D(1-D_s^2),\qquad \frac{\tilde{W}_D(0)}{\gamma}=I\frac{W_D(0)}{\gamma}$$

$$\tilde{\lambda}_0=Z\lambda_0\qquad \tilde{S}_y(\omega_1)=R\,S_y(\omega_1),$$

$$\tilde{C}_{yopt}^2=C^2C_{yopt}^2 \tag{5-7}$$

ただし，α_p：標準構造物に対する対象構造物の靱性度を表す係数で，耐震設計法の構造特性係数に対応，D_s は標準構造物の値，I：標準構造物に対する対象構造物の重要度を表す係数で，耐震設計法の用途係数に対応，$W_D(0)/\gamma$ は標準構造物の値，Z：標準地域に対する対象地域の地震危険度を表す係数で，耐震設計法

の地震地域係数に対応，λ_0 は標準地域の値，R：標準地盤に対する対象地盤の地盤特性を表す係数で，耐震設計法の振動特性係数に対応，$S_y(\omega_1)$ は標準地盤の値，C：標準構造物に対する対象構造物の最適降伏震度の倍率を表す係数

双方の構造物は最適状態にあると考え，(5-5)式と(5-7)式を(5-5)式に代入した2式から，次式を得る．

$$C=\sqrt{\alpha_D R[1+\beta(\ln I+\ln Z-\ln\alpha_D-\ln R]} \quad (5\text{-}8)$$

ただし，$\beta=\dfrac{\sqrt{6}}{\pi}\,\dfrac{V_{W_P}}{\overline{W}_{opt}}$

表される．入力レベルの変動係数 V_{S_0} は0.3から0.4程度の値であるから[4]，入力継続時間，固有周期および減衰常数にも依存するが，仮に，$T_d=10\mathrm{sec}$，$h=0.1$，$\overline{W}_{opt}=2$ とすれば，(5-8)式の β は概ね0.2以下の値になり，β と $\ln\alpha_D$ と $\ln R$ のそれぞれの積は1に比べて十分小さくなるのでこの項を無視する．

$\beta=0$，すなわち，累積塑性ひずみによるエネルギー入力の変動係数 V_{W_P} が0であれば，構造物の崩壊の重大性と安全性に関する係数は，構造物の最適降伏震度に無関係になる．この場合 $V_{W_P}=0$ であるから，t 年間に予想される入力地震波は確定値になり，この確定入力波によって生じる W_p も確定値になる．W_p と W_r が確定値であるから，(2-1)式に従い，W_p より大きい W_r に対して構造物の安全性が100％保障される．このように，構造物の信頼度が確定的事象として評価されるような場合には，上記の2つの要因は無関係になるという直感的判断を裏付けるものである．それゆえ，構造物の崩壊に対する重要性および安全性に関する係数は，構造物の崩壊事象が確率的事象と見なされる場合にのみ考慮されなければならない要因になる．

(5-8)式の右辺の C_{yopt} は，標準構造物に対するある特殊構造物の降伏震度の倍率を表す係数であるが，弾性最大層せん断力係数分布に対してもこの倍率が適用されるものとして，この係数に Ai 分布と標準層せん断力係数 C_0 の積を掛けると，信頼性理論に基づく最適層せん断力係数の表現式は次式になる．

$$C_i=\sqrt{\alpha_D R(1+\beta\ln I+\beta\ln Z)}\,AiC_0 \quad (5\text{-}9)$$

ただし，C_i：i 層の最適層せん断力係数

現在，耐震設計法で規定されている層せん断力係数は，構造特性係数，用途係数，さらに地震地域係数等のそれぞれの係数の積で表現されているが，(5-9)式はかなり異なった表現式になっている．(5-9)式の右辺の第2項は構造物の崩壊の重大性に関する係数によって要求されるせん断力係数の割り増し部分であり，第3項は，構造物の崩壊に対する安全性に関する係数から要求されるせん断力係数の割り増し部分である．標準構造物の取り扱い方によっては割り引き部分になる場合もある．(5-9)式で示される最適層せん断力係数は，それらの両者の和に対して，構造特性係数と振動特性係数を掛けるような表現式を示している．構造物の崩壊確率および最適建設費の評価において，かなり乱暴な仮定や近似を含んでいるが，(5-9)式は，信頼性理論に基づく最適設計のもとでは，現在耐震設計法で規定されている評価式より合理的であることを示している．勿論，このような表現式を用いる場合には，これらの係数の再評価が必要である．

6．結　　論

地震時の強震部分を定常ランダム過程でモデル化し，荷重効果として累積塑性ひずみによって消費される構造物系へのエネルギー入力を用い，構造物の限界塑性エネルギー吸収能力を抵抗としたときの t 年後の構造物の安全の確率を評価し，次に災害による損失の期待値と建設費とからなる目的関数を最小にすることによって，履歴構造物の最適降伏震度および最適層せん断力係数を推定する一手法について述べた．

(1993年5月10日受理)

参 考 文 献

1) Masami Hanai: Assessment of Load Factor by Means of Structural Riliability Theory, Trans. of A. I. J. NO. 231, May, 1975
2) 青木義次：重要度係数の最適化，その2，日本建築学会論文報告集，第267号，昭和53年5月
3) 洪　起，田中　尚：ホワイトノイズを受ける1自由度系の履歴吸収エネルギー，日本建築学会論文報告集，第270号，1978年8月
4) 洪　起：確率論手法による構造物の必要塑性応答量解析，日本建築学会論文報告集，第1報，第289号，1980年3月，第2報，第293号，1980年7月
5) 秋山　宏：構造物の耐震極限設計，東京大学出版会
6) K. Koh and K. Takanashi: Optimum Design Based on Structural Reliability Theory-Decision Making of the Optimum Shear Force Coefficient of Structures, Bulletin of Earthquake Resistant Structure Research Center, Institute of Industrial Science, Univ. of Tokyo, No. 26, March, 1993