

磁場中の量子細線

Quantum Wires in Magnetic Fields

安藤 恒也*
Tsuneya ANDO

磁場中の量子細線の電気伝導においては、マクロな系で重要であるホール電場を考える必要がない。したがって、電流は端に局在した端状態によってのみ運ばれる。

1. はじめに

通常のマクロな系での電流磁気効果においては、ホール電場とホール伝導率が重要な役割を担っている。一方、量子細線のコンダクタンスはランダウアーの公式を用いて理解される。このランダウアーの公式は透過反射確率のみで表されるために、伝導率の対角成分である σ_{xx} や σ_{yy} とのみ関係し、ホール伝導率 σ_{xy} と σ_{yx} などの情報はまるで入ってこない。磁場中の量子細線における電気伝導でのホール電場の役割は非常に重大な原理的な問題である。この小論では、この問題に対する一つの理論的考察について述べたい。

2. ホール電場とホール伝導率

2.1 電流磁気効果

図1に示すように、 y 方向に幅 W の線に定電流を流した場合を考えよう。伝導率 ($\sigma_{\mu\nu}$) のマクロな系ではゼロ磁場でのオームの法則に対応し、

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma_{xx} E_x + \sigma_{xy} E_y; \\ j_y &= \sigma_{yx} E_x + \sigma_{yy} E_y, \end{aligned} \quad (2.1)$$

により、電流密度 (j_x, j_y) と電場 (E_x, E_y) が関係している。通常の等方的な媒質の場合には、 $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ と $\sigma_{yx} = -\sigma_{xy}$ の関係が成り立っており、 σ_{xx} は磁場の偶関数、 σ_{xy} は磁場の奇関数である。普通の教科書の教えるところによれば、 y 方向には電流がゼロであるため、(2.1)の2番目の式で $j_y = 0$ と置いて

$$E_y = -\frac{\sigma_{yx}}{\sigma_{yy}} E_x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} E_x, \quad (2.2)$$

を得る。これをさらに(2.1)の1番目の式に代入して、

$$j_x = \left(\sigma_{xx} + \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}} \right) E_x = \sigma_{xx}^{-1} E_x, \quad \sigma_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad (2.3)$$

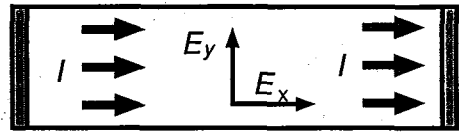


図1 幅 W の線に電流 I を流したときの電流磁気効果

を得る。この式の第2項である $\sigma_{xy}^2 E_x / \sigma_{xx}$ がホール電場の電流への寄与である。通常の表式

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2}, \quad \sigma_{xy} = \frac{\omega_c \tau \sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2}, \quad \sigma_0 = \frac{ne^2 \tau}{m}, \quad (2.4)$$

を用いると $\rho_{xx} = 1/\sigma_0$ となる。すなわち、磁気抵抗が現れない。強磁場で $\omega_c \tau \gg 1$ の場合には $\rho_{xx}^{-1} \gg \sigma_{xx}$ であるから、このホール電場の寄与は非常に大きい。

2.2 ランダウアーの公式

量子細線のコンダクタンスを議論する場合には通常ランダウアーの公式¹⁾を用いる。

$$G = \frac{e^2}{\pi \hbar} \sum_{ij} T_{ij}, \quad (2.5)$$

ここで、 T_{ij} はチャンネル j からチャンネル i への透過確率である。この公式は系の透過反射係数によって表されるが、透過確率は厳密に σ_{xx} と関係していることがこれまでの研究の結果²⁾明らかになっている。すなわち、ランダウアーの公式には磁場中でもホール電場の寄与がまったく入っていない。したがって、このランダウアーの公式が磁場中でも使えるのかどうか、原理的な問題となる。なお厳密に言うと、このランダウアーの公式では系全体が一つの量子力学的な系であることを仮定しており、量子細線の長さが位相コヒーレンス長よりも長くなると使えなくなる。

これをホール効果などの電流磁気効果測定用の多端子

*東京大学物性研究所

系に拡張したのが次の Büttiker-Landauer の公式である³⁾.

$$I_i = \frac{-e}{\pi \hbar} \left[(1 - R_{ii}) \mu_i - \sum_{j \neq i} T_{ij} \mu_j \right], \quad (2.6)$$

ここで、 μ_i は端子 i の化学ポテンシャル、 I_i は端子 i から流れ込む電流、 R_{ii} は i から入射し i へ反射される確率、 T_{ij} は端子 j から i への透過確率である。入射および透過のチャンネルがいくつか存在する場合には、この透過反射確率はチャンネルについての和となる。また、端子間の電位差は

$$(-e) V_{ij} = \mu_i - \mu_j, \quad (2.7)$$

である。

この公式は、量子細線、量子ポイントコンタクトなどメソスコピック系における伝導現象の説明で大きな成功をおさめてきた⁴⁾。また、マクロな量子ホール効果においても、端状態とバルク状態との非平衡分布などの問題でも威力を発揮してきた。

多端子構造をもつ量子構造における磁場中の電気伝導に関して、線形応答理論からこれを導出する試みもある。例えば、Baranger-Stone は各端子に理想的導線をつけ、系から十分に離れた導線の先で一定のポテンシャルとなる外場での電流応答を計算し、それが各端子間のポテンシャル差と透過・反射係数で決まることを示した⁵⁾。しかし、得られたものは、仮想的な理想的導線を介して電極とつながった系全体のコンダクタンスであり、理想的導線を除いた系のコンダクタンスではない。また、理想的導線ではホール電場がない事をもともと仮定しているので、ホール電場が効かないのも当然である。むしろ、ホール電場を消すように理想的導線を含んだ系では、マクロな場合でも 2 端子抵抗にホール電場が効かないこと、すなわち大きな磁気抵抗が観測され得ることを示している。

2.3 線形応答理論

x 方向に一様な電場 E_x の下での量子細線を考えよう。線形応答理論⁶⁾によれば

$$j_x(y) = \int \sigma_{xx}(y, y') E_x dy' + \int \sigma_{xy}(y, y') E_y(y') dy'; \quad (2.8)$$

$$j_y(y) = \int \sigma_{yx}(y, y') E_x dy' + \int \sigma_{yy}(y, y') E_y(y') dy',$$

となる。ここで、 $\sigma_{\mu\nu}(y, y')$ は電場に対する応答係数であり、電場がゼロの場合の電流密度の相関関数で表される。前述の伝導率は

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{W} \int dy' \int dy'' \sigma_{\mu\nu}(y, y'), \quad (2.9)$$

で与えられる。マクロな場合との類推で、ホール電場を取り入れて電流密度を計算するためには、この方程式で y 方向の電流がゼロであるとの条件で $E_y(y)$ を決め、それから電流密度 $j_x(y)$ を求めればよいと考えられる。残念ながら、このようなやり方はまったくうまくいかないのである。

有限幅の系では幅方向の伝導率 $\sigma_{yy}(y, y')$ はゼロとならなければならない。それを見るには、系にゆっくりと弱いポテンシャル

$$V(y) = E_y(y') \theta(y, y'), \quad \theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.10)$$

を加えた場合を考えればよい。これは、 $y=y'$ に δ 関数型の電場 $E_y = E_y(y') \delta(y, y')$ が加わったことに相当する。この場合、当然 y 方向に分極するが y 方向の電流はゼロである。一方、通常 $\sigma_{yx}(y, y')$ はゼロではない。その結果、(2.8) 式は y 方向に電流が流れるとの非常に不合理な結果を与えることになってしまうのである。

ホール伝導率 σ_{yx} がゼロでないことを見るために、図 2 に示すように、 x 方向に周期境界条件、すなわち x 方向に長さ L のリング状の系を考える。 x 方向の電場はリングの中心に通った磁束 Φ の時間変化で与えられる (Faraday の電磁誘導の法則)。すなわち、

$$E_x = - \frac{1}{cL} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2.11)$$

この磁束は電子の波動関数に対する境界条件を周期境界条件から一般化された周期条件に変化する。すなわち

$$\psi(x+L) = \psi(x) \Leftrightarrow \psi(x+L) = \psi(x) \exp\left(-2\pi i \frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (2.12)$$

ただし、 $\Phi_0 = ch/e$ は磁束量子である。磁束が Φ_0 の整数倍の場合には、境界条件が $\Phi = 0$ の場合とまったく同じになる。磁場中では、この境界条件は電子のサイクロトロ軌道の中心座標を y 方向に平行移動することに対

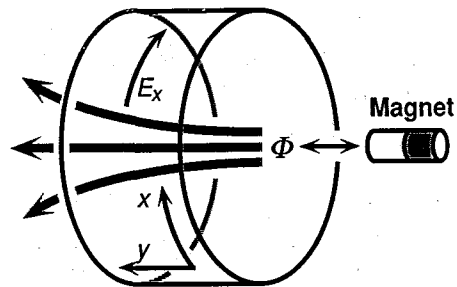


図 2 幅 W , 長さ L のリング状の系に磁束 Φ を通し、磁束をゆっくりと時間変化させて、 x 方向に電場 E_x を発生させる

応し、これが y 方向の電流に対応する。たとえば磁場 H の下で、散乱体の存在しない理想的な場合には、すべての電子の中心座標が

$$Y \rightarrow Y + \frac{2\pi l^2}{L} \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (2.13)$$

と変化する。ここで、 l は $l = \sqrt{ch/eH}$ で定義される基底ランダウ準位の軌道半径である。したがって、単位面積あたりの電子濃度を n とすると、 y 方向の電流密度は

$$j_y = n(-e) \dot{Y} = n(-e) \frac{2\pi l^2}{L} \frac{1}{\Phi_0} \frac{d\Phi}{dt} = 2\pi l^2 n \frac{e^2}{h} E_x, \quad (2.14)$$

となる。これは普通のホール伝導率を与える。もちろん、 $2\pi l^2 n$ が整数、すなわちランダウ準位が完全に満ちた場合には、ホール伝導率が e^2/h の整数倍になる。

線形応答理論では、微小に磁束が変化したときの系の応答を計算するために、 σ_{yx} はこの微小な平行移動による電流を表し、ゼロではなくなるのである。ところが、実際に観測されるのは、ある一定の割合で磁束をゆっくりと変化させているときの電流である。磁束を変化させる場合には磁束ごとに系はもとにもどるので、端が熱浴と接して電子のやりとりがある場合を除けば、電子は往復運動するだけで、電流はゼロとなってしまう。すなわち、線形応答理論はそのままでは量子細線のようなミクロな系に適用してはならないのである。

この問題を回避する一つの便法が磁束平均である。すなわち、線形応答の式で応答係数 $\sigma_{\mu\nu}(\Phi)$ を磁束 Φ ごとに計算し、それを平均する。

$$\sigma_{\mu\nu} = \langle \sigma_{\mu\nu}(\Phi) \rangle_{\Phi} \equiv \frac{1}{\Phi_0} \int_0^{\Phi_0} \sigma_{\mu\nu}(\Phi) d\Phi. \quad (2.15)$$

すなわち、この磁束平均が、磁束が一定の割合で変化する現実の電場への応答と考えるのである。こうすると、

$$\langle \sigma_{yx}(y, y', \Phi) \rangle_{\Phi} = 0 \quad (2.16)$$

であることが示されれば、めでたく $j_y(y) = 0$ となり、一応、線形応答理論の不合理性を解消できるのである。これまでの研究で、(2.16) はまだ証明されていないが、

$$\frac{1}{W} \int dy \int dy' \langle \sigma_{xy}(y, y', \Phi) \rangle_{\Phi} d\Phi \propto \left\langle \frac{dY(\Phi)}{d\Phi} \right\rangle_{\Phi} = 0, \quad (2.17)$$

が示されている⁷⁾。ここで、 $Y(\Phi)$ は y 方向の電子の平均位置である。これでも

$$\bar{j}_x = \frac{1}{W} \int j_x(y) dy = 0, \quad (2.18)$$

を示すには十分である。

ここで、磁場 H 下での Onsager の関係式

$$\sigma_{xy}(y, y', H) = \sigma_{yx}(y', y, -H), \quad (2.19)$$

に注意しよう。この関係式は、トレースでの演算子の取りかえのみで得られるもので、 xy 方向での対称性などをいっさい仮定していない。これを用いると、一様な y 方向の電場による x 方向のホール電流は、磁束平均すればゼロになることが示せる。すなわち、

$$\frac{1}{W} \int dy \int dy' \langle \sigma_{xy}(y, y', \Phi) \rangle_{\Phi} = 0. \quad (2.20)$$

したがって、量子細線の磁場中の抵抗には、一様なホール電場があったとしてもまったく効かず、 σ_{xx} だけで決まることになる。すなわち、磁場中での量子細線の伝導には、ランダウアーの公式の示すように、ホール電場がまったく効かないことが結論できる。

この磁束平均は Laughlin⁸⁾ の量子ホール効果の説明と密接に関係している。その場合には、同様に磁束量子ごとに電子状態がもとにもどることを仮定するが、その場合に端での電子のやりとりをゆるす。このやりとりされる電子は磁束量子ごとに一定の数 p と考えられるので、ホール伝導率が pe^2/h に量子化される。このような系の端での電子のやりとりがないと、磁束量子だけ変化する間に、左右の端状態間で必ず電子が移動し、系がもとの状態にもどりホール伝導率の磁束平均がゼロになる。

3. おわりに

以上、線形応答理論から出発し、磁場中の量子細線の伝導におけるホール電場の役割について考察した。磁場中でもホール電場を考慮する必要はないというのが、上の議論で得られた結論である。もちろん、この結論は最終的なものではなく、まだまだ考察の余地が多く残されている。たとえ磁束平均した量が観測量だということが正しくとも、ホール電場の中で一様な電場で置き換えられない部分が残る、 $\sigma_{xy}(y, y', \Phi)$ と組み合わせた磁束平均がゼロでない可能性もある。すなわち、

$$\frac{1}{W} \int dy \int dy' \langle \sigma_{xy}(y, y', \Phi) E_y(y', \Phi) \rangle_{\Phi} \neq 0. \quad (3.1)$$

その場合には、別に何かの方法で $E_y(y, \Phi)$ を決定して、 x 方向の電流を (2.8) に基づいて計算する必要がある。それには、外場 E_x に対応して y 方向の分極を与える応答係数を求め、それから電場を計算するののも一つの方法である。すなわち、

$$E_y(y, \Phi) = \chi_{yx}(y, \Phi) E_x \quad (3.2)$$

また、上の議論の中にはいくつかの conjecture も残っており、さらに重大な考え落としがある可能性もある。

最も大きな問題はメソ領域とマクロ領域がどのようにして移り変わるかであろう。このクロスオーバを特徴づける長さのスケールとして第一に考えられるのは位相コヒーレンス長 L_ϕ であろう。線幅 W が位相コヒーレンス長より十分大きな場合には、局所的な伝導率 σ_{yy} はゼロではなく、また $\langle \sigma_{yx}(\Phi) \rangle_\Phi$ も電子の出し入れを許す熱浴と接した系での量となってしまう、必ずしもゼロではない。したがって、(2.8)式からホール電場 E_y がマクロな場合と同じように、 $j_y = 0$ の条件から決まるようになるはずである。本当にメソとマクロのクロスオーバを特徴づける長さが L_ϕ なのか、あるいは他に存在するかが大きな問題である。

もちろん、この問題は量子ホール効果とも密接に結びついている。量子ホール効果はマクロな系の現象と考えられているが、フェルミエネルギーがバルクのランダウ準位の局在状態にあるときの位相コヒーレンス長は非常に長く、実際の系の幅よりも長い可能性もある。その場合には、量子ホール効果もホール電場によるバルク状態

の運ぶ電流による説明、すなわち σ_{xy} による理解は正しくなく、端状態だけが電流を運ぶと考えなければならなくなるのである。実は、このような理解の仕方に関係なくホール抵抗が量子化されるからこそ、量子ホール効果が抵抗標準として使えるのである。その意味でも、量子ホール効果は実に不思議な現象なのである。

(1992年12月1日受理)

参 考 文 献

- 1) R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1** (1975) 223; Philos. Mag. **21** (1970) 863.
- 2) D. S. Fisher and P. A. Lee, Phys. Rev. B **23** (1981) 6851.
- 3) M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 1961.
- 4) 例えば、C. W. J. Beenakker and H. van Houten, Solid State Phys. **44** (1991) 1.
- 5) H. U. Baranger and A. D. Stone, Phys. Rev. B **40** (1989) 8169.
- 6) R. Kubo, J. Phys. Soc. Jpn. **12** (1957) 570.
- 7) T. Ando and H. Aoki, in *Proceedings of Yamada Conference XXXIII on the Application of High Magnetic Fields in Semiconductor Physics, Chiba, 1992*.
- 8) R. B. Laughlin, Phys. Rev. B **23** (1981) 5632.