研 究 速 報
特 集 5
UDC 532.517.4

ヘリシティを用いた3方程式乱流モデル

Three-Equation Turbulent Model with Helicity Incorporated as a Measure of Turbulent Structures

横 井 喜 充*・西 島 勝 一*・吉 澤 徴*
Nobumitsu YOKOI, Shoiti NISIZIMA, and Akira YOSHIZAWA

1. は じ め に

乱流現象の本質は，それが散逸系であり，大きなスケールの運動から小さなスケールの運動に向かうエネルギー・カスケード過程が非常に広範囲のスケールにわたって起こる点にある．運動のスケールが広範囲であるため，航空工学や機械工学に深く関係した現実の乱流の研究および特に多くのスケールの現象を扱わねばならない地球物理学的・宇宙物理学的現象の研究にあっては，その全スケールにわたる運動を同時に扱うには大きな困難を伴う．

通常われわれの関心は大きなスケールの運動の記述・予言にあるので，アンサンブル平均の概念を導入し，場の量を平均量とそれからのゆらぎに分けて考えるいわゆるレイノルズ分解の考え方が有用である．この手法に従えば，平均場に対するゆらぎ場の影響はゆらぎ速度場間の相関であるレイノルズ応力を通して作用することになる．したがってレイノルズ応力をどのように表現するかが乱流理論の最も大きな課題となる．

理学・工学上の興味をひく実際の流れに対して定量的に調べようとする場合には乱流モデリング，特に小さなスケールの運動を大きなスケールの運動と場の各点の物理量によって表す1点モデリングの考え方はきわめて強力な手法である．なかでも乱流のエネルギー・カスケード過程を渦粘性という輸送係数の概念を通して説明する渦粘性近似型のモデルは多くの工学分野で用いられ，一定の成果を挙げている．その代表的なモデルが K-ε モデルであり，1点物理量として乱流エネルギー K とその散逸率 ε を用いることにその名前の由来がある．K-ε モデルは，その構造が簡単であることから，最も広く用いられているモデルであるが，一方で平均流が3次元性あるいはクロス流の構造を持つ現実の乱流に適用された場合にうまく働かないことも指摘されてきている[1]．この欠点はレイノルズ応力の渦粘性近似そのものに由来するものであると考えられる．そもそも物性物理などで広く行われている輸送係数へのくりこみの考え方は，小さなスケール（たとえば分子レベル）の運動と大きなスケールの（巨視的）運動との間にスケールの分離がはっきりしている場合にきわめて精度の高い近似となるものである．しかし上述のごとく，散逸系で大きなスケールの運動から小さなスケールの運動へとエネルギーがカスケードすることにその本質がある乱流現象では，そのようなスケール分離は望みえない．この意味で渦粘性近似の考え方を分子粘性などの輸送係数の考え方と同じ地歩をもって語ることはできない．渦粘性近似の欠点が顕著になるのは乱流中の大きな構造の存在が小さなスケールでの散逸に影響を与える場合であり，そのことを以下に見ていく．

従来，乱流のエネルギー・カスケード過程は渦粘性等の輸送係数の概念を通して良く理解されてきた．この性質は，大きなスケールの流体運動からエネルギーを引き出して乱流中の構造を破壊する働きをもつ．一方，乱流中に準定常的に大規模な構造が存在するということはエネルギー散逸を抑制する何らかの機構が存在することを示唆する．それはいわば大きなスケールから小さなスケールへ向かうエネルギー輸送を「絞り込む」機構である．これまでの乱流モデリングでは小さなスケールの効果を大きなスケールの運動に結び付けることに努力が集中され，大規模な乱流構造が考えに入れられていないことに問題があることがよく知られている．もしエネルギー・カスケードを絞り込む機構において，大規模な運動が中心的な役割を果たしているのだとしたら，そのような構造による乱流抑制の機構を乱流モデリングに組み込むことが重要であろう．したがって，乱流中の大規模構造の生成・維持を記述するのに渦粘性の考え方だけでは不十分である．このことはレイノルズ応力を渦粘性で近似すると，乱流中の大規模構造を捉えられないという事実に現われている．

*東京大学生産技術研究所　第1部

2. 3方程式乱流モデル

2.1 ヘリシティ

吉澤と横井[2),3)]は，速度と渦度の内積で定義されるヘリシティが以下の重要な性質：

(A) ヘリシティはエネルギー・カスケード過程の弱さの尺度に関わっている．

(B) ヘリシティは擬スカラー量であり，座標系の反転に対してその符号が変わる．

(C) 総ヘリシティは分子粘性 ν がゼロの時に保存量である．

をもつことに着目し，回転系の非一様乱流に対して統計理論 TSDIA の手法を適用することでレイノルズ応力に乱流ヘリシティを組み込んだ解析的表現を得た．総ヘリシティあるいは平均流のヘリシティと違い，乱流ヘリシティはガリレイ不変性を備えており，乱流構造を表す量として期待される．また，レイノルズ応力は空間反転に対して不変であるため，レイノルズ応力の表式中，乱流ヘリシティはその空間微分の形で現われる．つまりヘリシティはその非一様性を通してのみレイノルズ応力に寄与しうるのである．このことは，大きなスケールの運動が非一様であることが構造の維持機構にとって不可欠であることを示唆している．

2.2 *K*-*ε*-*H* モデル

平均流の3次元性はヘリシティ効果の増大をもたらすため，レイノルズ応力の渦粘性近似に基づいたこれまでの乱流モデルではこの平均流の3次元性をうまく取り扱うことができない．その欠点を取り除くため，レイノルズ応力に対する解析的表現を用いてヘリシティ効果を取り入れた乱流モデルが提案されている[3)]．そのモデルは，レイノルズ応力の表現に従来の渦粘性表現に加えてヘリシティに関係する項を含み，また乱流エネルギーとその散逸率の二つの発展方程式に加えてヘリシティの発展方程式を含む三つの方程式から構成されている．

速度 $\mathbf{u}$，圧力 p，渦度 ω などの場の量をアンサンブル平均 $\langle\cdot\rangle$ を用いて平均場の部分 F とゆらぎ部分 f' とに分けるレイノルズ分解

$$f=F+f',\quad F=\langle f\rangle. \tag{1}$$

$$f=(\mathbf{u},\ p,\ \omega), \tag{2a}$$

$$F=(\mathbf{U},\ P,\ \Omega), \tag{2b}$$

$$f'=(\mathbf{u}',\ p',\ \omega'), \tag{2c}$$

および，乱流エネルギー K，乱流エネルギーの散逸率 ε，乱流ヘリシティ H の定義

$$K=\left\langle\frac{1}{2}\mathbf{u}'^2\right\rangle \tag{3}$$

$$\varepsilon=\nu\left\langle\frac{\partial u'^b}{\partial x^a}\frac{\partial u'^b}{\partial x^a}\right\rangle \tag{4}$$

$$H=\langle \mathbf{u}'\cdot\omega'\rangle \tag{5}$$

のもとで，3方程式乱流（K-ε-H）モデルの具体的な表式は以下のようになる．

レイノルズ応力

$$R^{\alpha\beta}\equiv\left\langle u'^{\alpha}u'^{\beta}\right\rangle=-\frac{2}{3}K\delta^{\alpha\beta}+\nu_T\left(\frac{\partial U^\beta}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$$
$$-\eta\left[\Omega^\alpha\frac{\partial H}{\partial x^\beta}+\Omega^\beta\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}-\frac{2}{3}(\Omega\cdot\nabla H)\delta^{\alpha\beta}\right]. \tag{6}$$

乱流粘性

$$\nu_T=C_\nu\frac{K^2}{\varepsilon}. \tag{7}$$

比例係数

$$\eta=C_\eta\frac{K^4}{\varepsilon^3}. \tag{8}$$

K 方程式

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{U}K)=R^{ab}\frac{\partial U^b}{\partial x^a}-\varepsilon+\nabla\cdot\left(\frac{\nu_T}{\sigma_K}\nabla K\right), \tag{9}$$

ε 方程式

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{U}\varepsilon)=C_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{K}P_K-C_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon^2}{K}$$
$$-C_{\varepsilon3}\frac{K^2}{\varepsilon}\Omega\cdot\nabla H+\nabla\cdot\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\nabla\varepsilon\right), \tag{10}$$

H 方程式

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{U}H)=R^{ab}\frac{\partial\Omega^b}{\partial x^a}-\Omega^a\frac{\partial}{\partial x^b}R^{ab}-C_H\frac{\varepsilon}{K}H$$
$$+\nabla\cdot\left(K\Omega+\frac{\nu_T}{\sigma_H}\nabla H\right), \tag{11}$$

ここで C_ν, C_η, σ_K, $C_{\varepsilon n}(n=1-3)$, σ_ε, C_H, σ_H は正のモデル定数である．また P_K は(9)式第1項で定義される．

この3方程式モデルにおいてヘリシティがゼロの極限をとると通常の K-ε モデルが得られ，それについては定数系

$$C_\nu\cong0.09,\quad \sigma_K\cong1,$$
$$C_{\varepsilon1}\cong1.5,\quad C_{\varepsilon2}\cong1.9,\quad \sigma_\varepsilon\cong1.3 \tag{12}$$

がわかっている．したがって未定の定数は C_η, $C_{\varepsilon3}$, C_H, σ_H というヘリシティに関係した4個である．$R^{\alpha\beta}$ 中の乱流ヘリシティ H に関係した項がその非一様性を通して乱流を抑制し，渦粘性の仮想的減少が導かれる．

3. モデルの検証

上述したように乱流モデリングの方法はさまざまな工学および理学現象の研究に強力な道具だてを供給する．上のモデルを比較的簡単な幾何学的形状の流れに適用し，モデル定数の最適化などモデルの整備を行うことは，将

来このモデルを地球物理学および宇宙物理学上の複雑な問題に適用する基礎としてきわめて重要なことである．本節の目的はこの3方程式（K-ε-H）モデルを典型的なヘリカル非一様乱流に適用し，モデルの妥当性を確かめることにある．

3.1　円管旋回乱流

工学の分野でヘリシティの関係する典型的な流れのひとつが円管内の旋回乱流である．ここでは図1に示されるような円筒座標系（r, θ, z）を用いてこの旋回乱流を考えていく．その顕著な特徴は，第一に接線方向の速度あるいは旋回が持続している間は軸方向速度が最大になる位置が管の中心軸からずれて壁の方に移っているということであり，第二に

$$W \equiv 2\pi \int_0^{r_0} U^z U^\theta r^2 dr / \pi r_0^3 U_m^2 \qquad (13)$$

で定義される旋回の強さ W が軸方向に沿って指数関数的に減衰するということである[4]．ただしここで r_0 は円管の半径，また U_m は

$$U_m \equiv 2\pi \int_0^{r_0} U^z r dr / \pi r_0^2 \qquad (14)$$

で定義される速度（bulk velocity）である．上記特徴のうち第一点は旋回によって起きる遠心力の効果であるが，乱流によるエネルギー・カスケード効果のみに注意を払っている従来の渦粘性型乱流モデルでは，旋回が実験に比べてずっと早く減衰してしまうため，この中心軸付近での軸方向速度の凹みをまったく説明できない．また第二点の W（旋回の強さ）と接線方向速度との関係は W が軸方向速度にも依存していることからかならずしも簡単ではないが，W の指数関数的減衰は実験的に確かめられている事実である．後に見るようにこの減衰を渦粘性型乱流モデルでは再現できない．

渦粘性近似では旋回乱流の諸性質を再現できないという上の事情はヘリシティの役割を考慮してみればすぐにわかることである．軸方向の速度と接線方向の速度からくる渦度とによって作られるヘリシティはエネルギー・カスケードを絞り込み，秩序だった大規模な旋回流の構造を持続させる．この効果は実際の旋回乱流中で渦粘性の仮想的減少をもたらすはずであり，この機構を渦粘性近似で捉えることは不可能である．

3.2　モデル定数の最適化

前述したようにこの K-ε-H モデルは，従来の K-ε モデルに加えてヘリシティに関係した四つの未定定数 C_η, C_H, σ_H, $C_{\varepsilon 3}$ を含んでいる．これらの値の最適化の過程で，C_H, σ_H, $C_{\varepsilon 3}$ の値の変化に対して数値計算の結果は敏感ではないことが判明した．ここでは，C_H = 1.5，σ_H = 1.6，$C_{\varepsilon 3}$ = 1.3を用いた．一方，レイノルズ

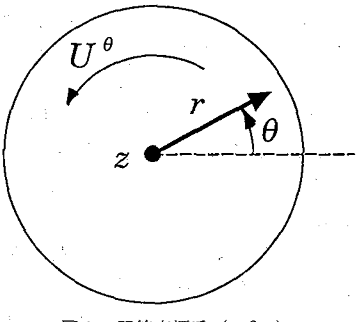

図1　円筒座標系（r, θ, z）

応力の表式(6)中のモデル定数である C_η の変化は結果に大きく影響を与えた．本研究ではモデル定数として C_η ＝0.003を用いている．さらなる最適化は今後の課題である．

3.3　数値計算の結果

ここでは数値計算の結果について簡単に触れる．流れのレイノルズ数は50000であり，軸対称性（$\partial/\partial\theta = 0$）を仮定している．数値計算法や格子点の選び方といった詳細については文献5を参照されたい．

図2は軸方向流速の動径方向に対する分布を示している．従来の K-ε モデルでは再現できなかった中心軸付近での U^z 分布の凹みをこの K-ε-H モデルはよく再現していることがわかる．

図3は旋回の強さ W の軸方向への減衰の仕方を W については対数目盛を用いて表したものである．K-ε モデルによる計算ではグラフは下向きに曲がって直線状にはなっていないのに対して，K-ε-H モデルでは非常

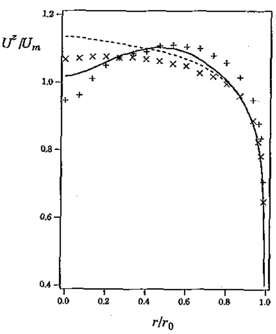

図2

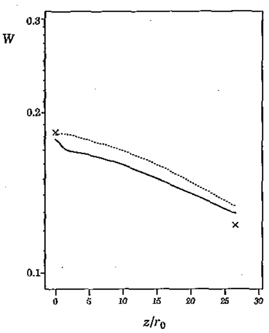

図3

図2　軸方向流速 U^z の動径方向への分布（U_m は bulk 速度）：＋，計算領域入口でのプロファイル（実験）；×，計算領域出口でのプロファイル（実験）；出口でのプロファイル K-ε モデルによる計算（----），K-ε-H モデルによる計算（—）

図3　旋回の強さ W の軸に沿った減衰：×，実験；----，K-ε-H モデル（計算領域入口での W は約0.18）

研究速報

によい直線性を示している．このことから，K-ε-Hモデルによって旋回の強さの指数函数的減衰がよく再現されることがわかる．

図4は乱流ヘリシティのrz平面での空間的分布を示したものである．この分布は乱流ヘリシティの生成率[(11)式の右辺第1項と第2項]の分布と結びついていると考えられる．

これら数値計算の結果から，定量的な見地からは特に壁近傍の低レイノルズ数の効果の扱いなどに改善の余地を残してはいるものの，K-ε-Hモデルは直円管中の旋回乱流の本質的特徴をよく再現しているといえる．

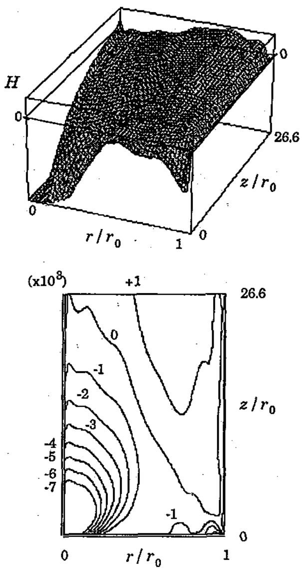

図4　U_m^2/r_0で規格化された乱流ヘリシティHのrz平面上の空間分布

4. 結　論

ヘリシティを通して乱流中の大規模構造の効果を取り入れ，渦粘性近似を補足するという点で2方程式(K-ε)モデルを拡張した3方程式(K-ε-H)モデルが典型的な非一様乱流である円管旋回乱流に適用され，数値的に解かれた．その結果，従来のK-εモデルでは再現できなかった旋回乱流の特徴を再現することに成功し，モデルの妥当性が確かめられた．モデル定数の最適化や壁近傍の低レイノルズ数効果の扱いの改善などにより，このモデルは3次元的構造をもつ理学・工学上の流れの研究において有効なモデルになるものと期待される．

謝　辞

鬼頭修己博士にその詳細な実験データを提供していただいたことをここに記して謝意を表する．

(1992年10月15日受理)

参考文献

1) T. Kobayashi and M. Yoda, "Modified k-ε model for turbulent swirling flow in a straight pipe," JSME Intl. J. 30, 66 (1987).
2) A. Yoshizawa and N. Yokoi, "Vortex dynamo and large-scale turbulent structures in a rotating system, "J. Phys. Soc. Jpn. 60, 2500 (1991).
3) N. Yokoi and A. Yoshizawa, "Statistical analysis of the effects of helicity in inhomogeneous turbulence,"Phys. Fluids A, 5, No. 2 (1993).
4) O. Kitoh, "Experimental study of turbulent swirling flow in a straight pipe," J. Fluid Mech. 225, 445 (1991).
5) 西島勝一・横井喜充，「ヘリシティによる構造効果を組み入れた3方程式乱流モデルの研究（直円管旋回乱流への適用）」，機論B58, 2714 (1992).