

一般化された $k-\varepsilon$ モデルによる回転する溝乱流の数値解析A Numerical Study of Rotating Channel Flow by the $k-\varepsilon$ Model Based on a Generalized Eddy-Viscosity Representation西島 勝一*
Shoiti NISIZIMA

1. はじめに

工学的研究分野での乱流数値解析にあたっては、構造が比較的簡単で計算時間が少なくすむ等の理由から、 $k-\varepsilon$ モデルが最も多用されている¹⁾。しかし、このモデルは、レイノルズ応力の等方的渦粘性表現を基礎としているため、工学上重要な乱流の数値解析において的確な予測ができない場合が少なくない。たとえば、

1) 矩形管内乱流においては、二次流やその影響で変化する各統計量の特性を再現できない、

2) 直円管内旋回流においては、軸方向流速の管中心部分での落ち込み・減少(旋回の無い流れでは管中心部分で流速が最大となる)等を評価できない、

3) 系全体が回転している溝乱流(回転溝乱流)においては、静止溝乱流と異なる軸中心線に対して非対称な流速やレイノルズ応力等の分布を再現できない、

等が上げられる。これらの欠点を克服する渦粘性型($k-\varepsilon$)モデルの改良・一般化も行われてきている。1)を是正する一つの方法として非等方 $k-\varepsilon$ モデルが提案され^{2)~4)}、2)に対しては渦粘性係数を非等方化⁵⁾ないし補正⁶⁾する方法の他にヘリシティを含む三方方程式モデル⁷⁾が提案されている。

本論文では、前記の3)の欠点を改善する一般化 $k-\varepsilon$ モデルを提案する。系全体が回転している溝乱流においてはコリオリの力が作用して、圧力側では乱れを増大させ不安定領域を形成し、負圧側では乱れは抑制され安定化される事が明らかにされている。その結果、静止している溝乱流と異なり流速や諸統計量が、溝軸中心線に対してゆがみ、非対称になる特性が生じる。実験的には Johnston-Halleen-Lezius⁸⁾らによって、数値解析的には Launder-Tselepidakis-Younis⁹⁾による応力モデル、三宅・梶島¹⁰⁾による Large Eddy Simulation (LES) 等によって、さらに鬼頭・中林¹¹⁾による次元解析などがあ

下村は統計理論的結果から $k-\varepsilon$ モデルの改良を提起し、回転溝乱流の数値解析を行っている¹²⁾。その結果、平均流速や乱流エネルギー等の非対称性を再現できることを示した。しかし、レイノルズ応力の非対称な振る舞いは十分再現できていないという欠点を有していた。吉澤は統計理論より非等方 $k-\varepsilon$ モデルを先に提起したが¹³⁾、そのモデルを発展させコリオリの力がレイノルズ応力に反映される新たなモデルを提案した¹⁴⁾。

本論文では、下村と吉澤の結果を結合し、一般化 $k-\varepsilon$ モデルを提起する。さらに、このモデルを回転溝乱流の数値解析に適用する。得られた結果を実験値と比較検討して、モデルの妥当性を論議する。特に、コリオリの力の影響を受けて、流速やレイノルズ応力等の統計量が実験結果と同様に非対称となる事が示される。

2. $k-\varepsilon$ モデル

速度、圧力(密度で割ったもの)のアンサンブル平均部分とそれからのずれを示す擾乱部分をそれぞれ (\bar{u}, \bar{p}) と (u', p') で表すと、三次元非圧縮・粘性流体に対する平均部分の基本方程式は、

$$\frac{D\bar{u}_\alpha}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_a \frac{\partial}{\partial x_a} \right) \bar{u}_\alpha = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(R_{\alpha a} + \nu \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_a} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_a} = 0 \quad (2)$$

で与えられる(アルファベットの下つき添字については1から3まで和をとることにする)。ここで、 ν は動粘性率、 $R_{\alpha a}$ はいわゆるレイノルズ応力で、擾乱場の基本的統計量として乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ε を選び、次の通り表わす:

$$R_{\alpha\beta} \equiv \langle u'_\alpha u'_\beta \rangle = - \frac{2}{3} k \delta_{\alpha\beta} + \nu_\varepsilon \left(\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (3)$$

$$\nu_\varepsilon = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (4)$$

ここで $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表わし、 $\delta_{\alpha\beta}$ はクロ

*東京大学生産技術研究所 第1部

研 究 速 報
 ネッカーのデルタ記号, ν_e は渦粘性率, C_v は定数である。
 この式は次の k および ϵ 方程式と連立させる事により
 解く事ができる。

$$\frac{Dk}{Dt} = R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(\frac{\nu_e}{C_k} \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_a^2} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} = & C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(\frac{\nu_e}{C_{\epsilon 3}} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_a} \right) \\ & + \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_a^2} \end{aligned} \quad (6)$$

モデル定数は, 極一般的に使用されている次の値を用い
 る¹⁾。

$$\begin{aligned} C_v = 0.09, \quad C_k = 1.0, \quad C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad C_{\epsilon 2} = 1.9, \\ C_{\epsilon 3} = 1.3 \end{aligned} \quad (7)$$

3. 一般化 k - ϵ モデル

回転している溝流路内乱流におけるコリオリの力を評価するために, 下村は統計理論から, (6) の ϵ 方程式に回転の効果が反映される一つの項を追加するよう提案した¹²⁾, 吉澤は, 非等方 k - ϵ モデル^{2), 13)} を発展させて, 回転の効果がレイノルズ応力に反映されるモデルを最近提起した¹⁴⁾。ここで, 下村と吉澤の成果を k - ϵ モデルに組み込みモデルを一般化する。その結果, (3) のレイノルズ応力表現が,

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} = & -\frac{2}{3} k \delta_{\alpha\beta} + \nu_e \left(\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + (B_{\alpha\beta})_n \\ & + \frac{2}{C_b} \frac{k}{\epsilon} \left\{ \epsilon_{\alpha bc} \omega_c (B_{t\beta})_n + \epsilon_{\beta bc} \omega_c (B_{t\alpha})_n \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$(B_{\alpha\beta})_n = -\sum_{m=1}^3 \frac{\nu_e}{C_m} \frac{k}{\epsilon} \left(S_m^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} S_m^{aa} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (9)$$

$$S_{1\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_a} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_a} \quad (10)$$

$$S_{2\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_a} \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_a} \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_\alpha} \right) \quad (11)$$

$$S_{3\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_\beta} \quad (12)$$

となり, (6) が,

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} = & C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(\frac{\nu_e}{C_{\epsilon 3}} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_a} \right) \\ & + \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_a^2} + C_w \frac{\partial \nu_a}{\partial x_b} \epsilon_{abc} \omega_c k \end{aligned} \quad (13)$$

と変わる。ここで, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ は交代テンソルで, ω_α は流路の回点角速度である。また(8)の右辺第3項, すなわち(9)はすでに非等方 k - ϵ モデルで扱われている項であり, 右辺第4項が(13)の右辺最終項とともに今回新しく付加されたものである。

以上の式(1), (2), (5), (8), (13)を連立させることにより

解が得られる。

新たに加えられ定数の内で非等方項(9)に現われる2つは溝乱流や矩形管内乱流の数値解析ですでに最適化されており¹⁵⁾, 残りの未定定数は統計理論的に $C_b \sim -9.1$, $C_w \sim 0.074$ と予測されているが, 本数値解析で次のように最適化した。

$$\begin{aligned} C_{\epsilon 1} = 1.58, \quad C_{\epsilon 3} = -13.4, \quad C_b = -10. \\ C_w = -3 \end{aligned} \quad (14)$$

なお, (14)の C_w は, 下村により回転溝乱流の数値解析を通して $C_w = -0.8$ と最適化されており, ここでの値と食い違っている。これはクロスディフュージョン項を含むモデルであるか否かや, レイノルズ応力表現の違いによるものと推定される。

4. 壁上での滑り無し境界条件の適用

k - ϵ モデルでは式(4)の ν_e がモデルの重要な基礎となっているが, そのままでは壁上で滑り無し境界条件を課することはできないので壁減衰関数を導入してこの困難を回避する^{2), 15)}。

壁座標を y^+ とし, 渦粘性に関わる項のみに次の関数を導入する事とした。

$$f_d = 1 - \exp(-y^+/A), \quad y = u^* x_2' / \nu,$$

$$u^* = \sqrt{\nu \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)_{x_2 = \text{wall}}}, \quad A = 9.4 \quad (15)$$

ここで, u^* は摩擦速度, x_2' は壁からの距離である。さらに定数 $A = 9.4$ は静止溝乱流の数値解析で最適化された値である。以上の壁減衰関数導入により変更を要するのは式(4)で, 以下のように変形される。

$$\nu_e = C_v f_d \frac{k^2}{\epsilon} \quad (16)$$

なお, 式(13)に対しては減衰関数を全く導入しなかった^{15), 16)}。

壁減衰関数の導入により境界条件は壁上で滑り無しとなり, 次のように定義される。

$$\bar{v}_a = k = 0, \quad \epsilon = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_a^2} \quad (17)$$

5. 回転溝乱流への適用

5.1 無次元化

このモデルを図1で表わされる回転溝乱流の解析に適用してみる。流れ方向 x_1 と壁に垂直な x_2 の両方に直行する x_3 方向は無有限長であると仮定すると, 次の条件が成り立つ。

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} = 0, \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} = \text{constant}, \quad (18)$$

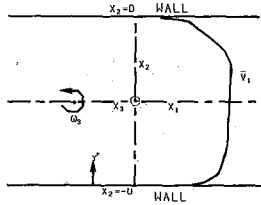


図 1 回転溝乱流の座標

さらに、壁間の半分の長さ D と、 D および平均圧力勾配 $-(dp/dx_1)$ で表わされる速度 $(-D(dp/dx_1))^{1/2}$ を用いて各式を無次元化して整理する¹⁷⁾ と次のようになる。

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = 1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(R_{12} + v_e \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right) \quad (19)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = R_{12} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{v_e}{C_k} \frac{\partial k}{\partial x_2} + v_e \frac{\partial k}{\partial x_2} \right) \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{12} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{v_e}{C_{\varepsilon 3}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} + v_e \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \right) + C_{\varepsilon 0} R_o k \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \quad (21)$$

$$R_{12} = v_e \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} - 2 \frac{v_e}{C_b} \left(\frac{v_e}{C_{r1}} - \frac{v_e}{C_{r3}} \right) \frac{\omega_3}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right)^2 \quad (22)$$

$$R_{12}^e = v_e^e \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} - 2 \frac{v_e^e}{C_b} \left(\frac{v_e^e}{C_{r1}} - \frac{v_e^e}{C_{r3}} \right) \frac{\omega_3}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right)^2 \quad (23)$$

$$v_e^e = C_v \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (24)$$

$$R_o = 2D\omega_3/\bar{v}_{1,ave} \quad (25)$$

$$\bar{v}_{1,ave} = \frac{1}{2D} \int_{-D}^{+D} \bar{u}_1 dx_2 \quad (26)$$

(25)の R_o は回転数、(26)は断面平均流速である。なお回転溝乱流解析においては、(8)の右辺第4項、すなわち(2)の右辺第2項はレイノルズ応力 R_{12} には寄与するが、乱流強度 R_{aa} には作用しない。逆に(8)の右辺第3項は乱流強度に影響を及ぼすがレイノルズ応力には作用しない。

境界条件は(17)であるが、 ε に関しては(20)を壁上で適用すると得られ、数値安定性から1回微分に置き換え¹⁸⁾ て適用した。

5.2 数値計算法

差分方法は、空間に関しては、2次精度不等間隔スキーム²⁾を用いた。時間差分については、計算安定性を重視してCrank-Nicolsonの陰解法を用いている。格子点の配置は、壁近くに多くの点を集中した不等間隔配置(壁間60分割)²⁾とした。

6. 結 果

モデルの検証対象として選んだ回転溝乱流は、John-

stonらの実験値⁸⁾であるレイノルズ数

$$R_e = 2D\bar{v}_{1,ave}/\nu \doteq 11500 \quad (27)$$

と $R_o \doteq 35000$ の流れとした。(25)の回転数 R_o は 0, 0.068, 0.2近辺の値をそれぞれのレイノルズ数で計算した。図中の実験値は、すべてJohnston-Halleen-Leziusの結果⁸⁾を表示した。

図2は流速分布を表している。回転数 R_o が大きくなるにつれ、最大値の位置が負圧側にずれ、溝中央部分の流速勾配の一定値領域が長くなる等実験結果を再現していることがわかる。図3は壁近くの流速分布図であるが、 R_o が零のときに再現されている対数速度則から、回転が加わることによりずれていくようすがわかる。

図4はの乱流エネルギーの分布を、図5, 6はその乱流強度の2成分を表示している。回転により圧力側の k の値が増大するようすが示されている。また k - ε モデルでは解析不可能な乱流強度の非等方向性が再現される。なお、 u_o^* は回転数零、すなわち静止した溝乱流時の壁面摩擦速度である。

図7, 8にレイノルズ応力の実験値との比較を行っている。回転数が大きくなるにつれて、零点が不圧側に移動し、圧力側の値が大きくなるようすがよく表現されている。またレイノルズ数が小さい場合の方が、より回転の影響を受けやすいことが伺える。

図9に渦粘性率の値を実験値と比べている。圧力側と負圧側の非対称的な変化がよく観察され、値自身も実験値とよい対応を示している。しかし、実験で得られている負の値が再現されないのは R_{12} の零点と dv_1/dx_2 の零点の位置関係が一致していないためである。

7. 結 論

統計理論の結果を用いて ε 輸送方程式とレイノルズ応力表現を一般化した k - ε モデルによる本研究は、溝乱流や矩形管内乱流の数値解析で最適化された非等方 k - ε モデルの定数を変化させることなく、系全体が回転している溝乱流をシミュレートできることを示した。特にコリオリ力の影響により平均流速やレイノルズ応力等の諸統計量が、実験上明らかにされている様に変化することを再現できた。

さらに、数値解析結果が定性的に妥当であることから、統計理論的結論、すなわち、回転の効果が ε 方程式とレイノルズ応力に反映されるであろうとの示唆が妥当であったことが示された。この事実は、回転溝乱流を解析しようとする乱流モデルには、この関連項が必要であることを示している。

(1992年10月12日受理)

研究速報

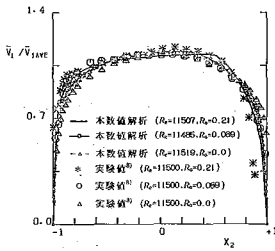


図2 平均流速 $\bar{v}_1 / \bar{v}_{1,ave}$
($Re \approx 11500$)

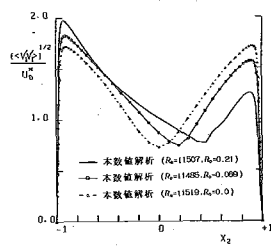


図5 乱流強度 $\langle v_1' v_1' \rangle^{1/2} / u_*^*$
($Re \approx 11500$)

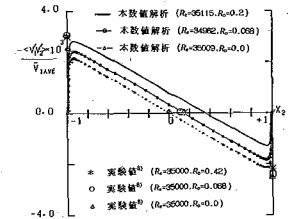


図8 レイノルズ応力
 $-\langle v_1' v_2' \rangle \times 10^3 / \bar{v}_1^2_{ave}$
($Re \approx 35000$)

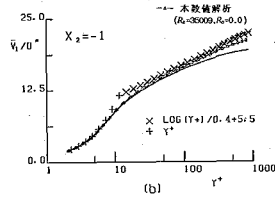
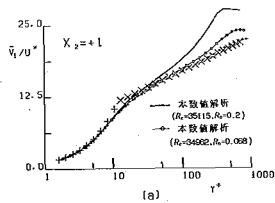


図3 壁近傍の平均流速 \bar{v}_1 / u_*^*
($Re \approx 35000$)

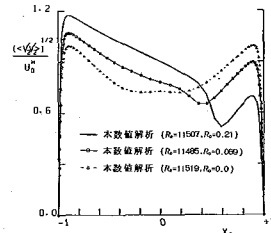


図6 乱流強度 $\langle v_2' v_2' \rangle^{1/2} / u_*^*$
($Re \approx 11500$)

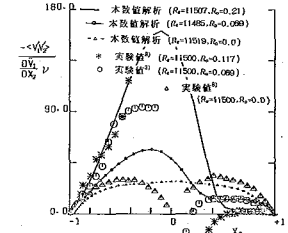


図9 渦粘性率 $R_{12} / (d\bar{v}_1 / dx_2) / \nu$
($Re \approx 11500$)

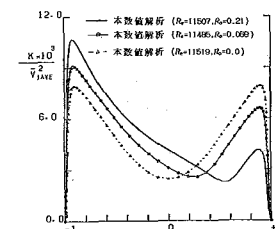


図4 乱流エネルギー $k \times 10^3 / \bar{v}_1^2_{ave}$
($Re \approx 11500$)

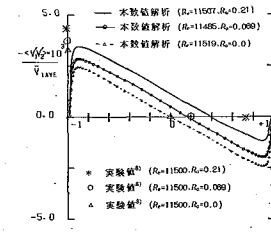


図7 レイノルズ応力
 $-\langle v_1' v_2' \rangle \times 10^3 / \bar{v}_1^2_{ave}$
($Re \approx 11500$)

参考文献

- 1) Bradshaw, P.C.T. and Whitelaw, T.H., Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow, Academic Press (1981).
- 2) Nisizima, S. and Yoshizawa, A., AIAA J., 25 (1987), 414.
- 3) Speziale, C.G., J. Fluid Mech., 178(1987), 459.
- 4) 明・笠木, 機論B, 56-531(1990), 3292.
- 5) 小林・依田, 機論B, 52-481(1986), 3230.
- 6) 河村・三島, 機論B, 57-536(1991), 1251.
- 7) 西島・横井, 機論B, 58-553(1992), 2714.

- 8) Johnston, J.P., Halleen, R.M. and Lezius, D.K., J. Fluid Mech., 56(1972), 533.
- 9) Launder, B.E., Tselepidakis, D.P. and Younis, B.A., J. Fluid Mech., 183(1987), 63.
- 10) 三宅・梶島, 機論B, 52-474(1986), 758・765.
- 11) 鬼頭・中林, 機論B, 58-551(1992), 2138.
- 12) Shimomura, Y., J. Phys. Soc. Jap., 58(1989), 352.
- 13) Yoshizawa, A., J. Phys. Fluids, 27(1984), 1377.
- 14) Yoshizawa, A., Bridging between eddy-viscosity/type and second-order turbulence models through a two-scale turbulence theory, Physical Review E (投稿予定)
- 15) Nisizima, S., Theoret. Comput. Fluid Dynamics, 2(1990), 61.
- 16) Mansour, N.N., Kim, J. and Moin, P., AIAA J., 27(1989), 1068.
- 17) 今井功, 流体力学 (前編), 裳華房 (1977).
- 18) Hanjalic, K. and Launder, B.E., J. Fluid Mech., 74(1976), 593.