

一般座標系における対流項の差分スキームについて

On the Effects of Various Finite Difference Schemes of the Convective Term
Using the General Curvilinear Coordinate System

李 蓮 源*・小 林 敏 雄*
Yeon Won LEE and Toshio KOBAYASHI

1. はじめに

多くの実在の工学上の問題は 3 次元的、かつ、複雑な形状に対して完全な Navier-Stokes 方程式の解を必要とする。しかし、3 次元 Navier-Stokes 方程式の解は大容量の計算機および多大の CPU 時間を必要とする。利用可能な計算機の容量と妥当な CPU 時間は 2 次元の場合それ程問題とならないが、3 次元流れ場の場合、考慮の対象となる。したがって、より妥当な代替方法是对流項に対してより精確な高次差分スキームを使用することである。より精確な高次風上差分スキームの必要性は従来の計算結果 (たとえば, Humphrey et al., 1977 [5]) から明らかに知られている。

ここではふたつの高次スキーム, Leonard (1979) [7] の QUICK スキームと 2 次精度の風上スキームを評価する。多くの流れ場に対して QUICK スキームは大規模な格子を使わず、1 次風上やハイブリッドスキームに比べて精確な結果を与える (Leschziner, 1980 [6]; Han et al., 1981 [4])。しかし現在, QUICK スキームを 3 次元流れ場に適用した文献は多くはない (Freitas et al., 1985 [2]; Yeo et al., 1991 [10])。

本計算の目的はすべての従属変数を同じ点に定義するノン・スタガード格子系を持つ一般曲線座標系層流計算への高次差分スキームを適用する手法を開発, 評価することである。ノン・スタガード格子系に起こる数値振動を防ぐため, 格子面の flux を計算する時特殊な運動量補間法 (Peric et al., 1988 [8]) を使用する。計算の対象として 2 次元計算としては Fuchs & Tillmark (1985) [3] の Polar Cavity を, 3 次元計算では Humphrey et al. (1977) [5] によって実験的に, また, 数値計算的に研究された 90 度曲がり短形管を選択した。後者の計算の結果は実験結果と妥当な一致が得られているが, しかし, 曲がり管の入口から 60 度および 90 度断面での実験と数値計算の差は必ずしも小さくはなく, その原因について検

討した。

2. 支配方程式および計算モデル

定常, 非圧縮性の方程式をカーテシアンテンソル形式で書くと, 次のようになる。

連続の式:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \tag{1}$$

運動方程式 (u_i):

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) - \frac{\partial P}{\partial x_i} \tag{2}$$

ただし, u_i は平均速度, P は圧力, μ は粘性係数, ρ は密度である。

カーテシアン座標系の方程式を非直交一般曲線座標系への変換は chain rule による。また, 強い保存系の式として書くため, 次のような基本的な metric identity を使用する。

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_m}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_m} (J \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j}) \equiv 0 \tag{3}$$

ここで, J はヤコビアンである; $J = |\partial(\xi, \eta) / \partial(x, y)|$ 。上の変換式を使って一般式を書くと, 次のようになる (Aris, 1962 [1])。連続式:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} (\rho J U_m) = 0 \tag{4}$$

運動方程式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_m} (\rho J U_m u_i) &= \frac{\partial}{\partial \xi_m} (\mu J g_{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi_m} (\mu J \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_n}) - J \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial P}{\partial \xi_m} \end{aligned} \tag{5}$$

ここで, $U_m = u_j \partial \xi_m / \partial x_j$ は反変速度であり, $g_{mn} = \partial \xi_m / \partial x_j \partial \xi_n / \partial x_j$ は反変 metric tensor である。

*東京大学生産技術研究所 第 2 部

3. 数値計算

3.1 スタガード格子およびノン・スタガード

一般的に従来の数値計算はスタガード格子系が多く使用されて来た。直角直交座標系では境界の半積分格子の省略のため運動方程式の離散化式には境界の圧力が現れないこと。また、境界に垂直な速度成分は一般にすでにわかってるから、勾配0の境界条件が圧力方程式に適用でき、explicitな境界圧力が要らない。などの利点が多い。しかし、一般座標系を導入すると、図1で示すように上記の利点のいくつかは無くなる。すなわち、 ξ, η が x, y と直交すると、積分体積面の速度は面を横切るの質量流速との関連性が無くなり、速度 node 左右の圧力はその速度を駆動しない。一般的な非直交格子を用いる有限体積法では、カーテシアン速度成分を使ったノン・スタガード格子配列が他の可能性 (たとえば、カーテシアンを速度成分を使ったスタガード格子配列や反変速度成分を使った格子配列) より利点が多い (Rodi, 1988 [9])。

3.2 対流項の離散化

対流速度の差分スキームに対しては図2を利用して簡単に説明する。

$$\int_{\xi}^{\xi'} \int_{\eta}^{\eta'} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho J U \phi) d\xi d\eta d\xi = [(\rho J U \phi)_e - (\rho J U \phi)_w] \Delta \eta \Delta \xi \quad (6)$$

反変速度 U を求めるために特殊な運動量補間が使われる。一次風上差分は $\phi_w = \phi_w$ にする。これは ϕ_w の値として上流側の値をそのまま使うことを意味する。ハイブリッドスキームは Peclet 数 ($Pe_w = \rho U_w \Delta \xi / \Gamma_w$) が2以下の場合是对流項を中心差分にし、 Pe 数が2以上になると、一次風上差分に切り換えるスキームである。 Pe 数が2以上の場合、拡散項は無視する。二次風上差分は上流側の二つの点の値を用いて線形的に補間値を決

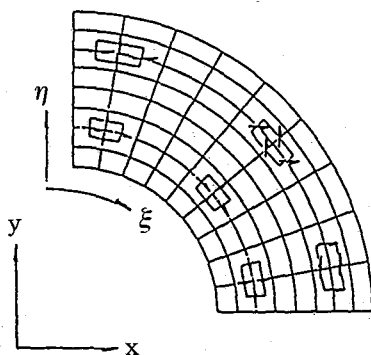


Fig. 1 Grid System

める方法である。すなわち、 $\phi_w = C_{q1} + C_{q2} \xi$ になる。また、QUICKスキームの場合は二つの上流側の値と一つの下流側の値を結ぶ二次曲線上の値として決める。 $\phi_w = C_{q1} + C_{q2} \xi + C_{q3} \xi^2$ になる。ここで C_{qi} 等の係数は幾何学的に定まる。

3.3 境界条件

境界条件としては Polar Cavity の場合すべての固体壁では定義された値を使う。しかし、境界上の微分には2次精度を得るため Taylor 級数展開による次のような式を使う。

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e = -\frac{1}{3\Delta x} (9\phi_P - \phi_w - 8\phi_{wall}) + \Theta(\Delta x^2) \quad (7)$$

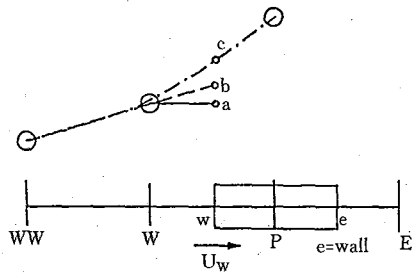


Fig. 2 Discretization Scheme: (a) 1st Upwinding, (b) 2nd Upwinding, (c) QUICK

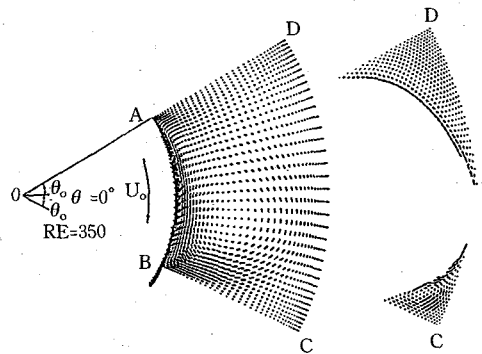


Fig. 3a Flow in a polar cavity. ($AB=BC=0.0475\text{m}$ and $\theta=0.5$ radian)

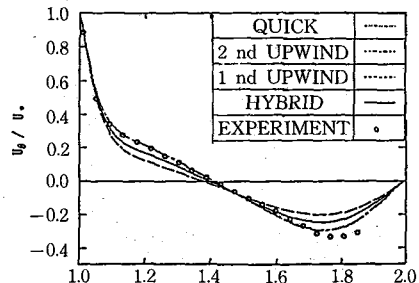


Fig. 3b Velocity Distributions at $\theta=0$ Degree Position

研究 速 報
 90度曲がり管の場合は、入口では数値的に発達させた値を、出口では勾配0、また、対象面ではu, vに対しては勾配0、wに対しては0の境界条件を使った。固体壁ではPolar Cavityの場合と同じである。

4. 計算結果と考察

4.1 Polar Cavity

図3aはPolar Cavityの計算領域とReynolds数350 ($Re = \rho U_0 L_{BC} / \mu$)、格子数40×40の時の数値計算結果の速度ベクトル図である。Polar Cavity内部に囲まれている流体は内部シリンダを時計方向に定角速度に回転させることによって運動が始まる。流れの特性は正方形Cavityと類似であり、中心部に大きい渦が発生する反面、C, Dの各々コーナでは中心と反対向きの二次渦が生成される。これはFuchs & Tillmark (1985) [3]の実験結果とよく一致する。図3bは4種類の差分スキームに対する $\theta = 0$ の断面の速度分布の計算結果である。QUICKスキームと2次の風上差分スキームの結果と比較して、1次精度のハイブリッドスキームと1次風上差分スキームは実験結果と差が大きいことが示された。QUICKスキームの結果でも完全な一致が得られなかったのはFuchs & Tillmark (1985) [3]が指摘したように実験装置の3次元性に起因するものと思われる。

4.2 90度曲がり管の層流計算

図4は90度曲がり管の計算領域と格子系である。Yeoら(1991)は61×21×17の格子でほぼ格子依存性がないと報告してある。この種の3次元、対流支配の流れ場の計算では格子依存性を十分に小さくすることは難しい。表1は90度曲がり管の計算に管する最近の研究論文をまとめたものである。十分に発達した曲がり管では、平均的には外向きの遠心力に対抗し、外側で高く内側で低い圧力勾配が生じて均衡するが、主流速度分布に応じて遠

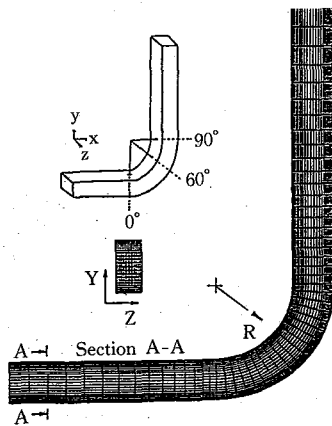


Fig. 4 Grid System and Coordinate

心力にも分布ができることにより二次流れが発生する。

梶島ら(1985)は風上差分による数値粘性を除くため中心差分を使っているが、実験結果との比較はない。山田ら(1989)はPatankarのべき乗スキームを使って、Humphreyらの計算および本計算の1次精度の計算結果とほとんど一致する計算結果を得ている。図5は遠心力と半径方向の圧力勾配の差による2次流れのようすの予測結果を比較しており、1次精度の結果は一つの大きい渦を生成するのに対して、2次精度の計算は二つの渦を生成している。この差は流れ方向の速度分布にも大きく影響をおよぼす。図6は $z = 0.0, 0.25$ のおおの位置における60度および90度断面での流れ方向の速度分布の計算結果と実験値を示している。QUICKスキームおよび2次風上差分の方がハイブリッドスキームおよび1次風上差分より実験値と比べて比較的に予測誤差が小さいと思われる。しかし、高次差分スキームを使った計算結果でも実験との差は必ずしも小さくはない。これは格子の数やその配置または数値粘性の問題、あるいは、梶島らの計算でも指摘されたように上下流側の直管部の長さが十分ではない等の問題に起因すると思われる。最適な格子数やその配置探索および計算の収束性については今後の課題である。

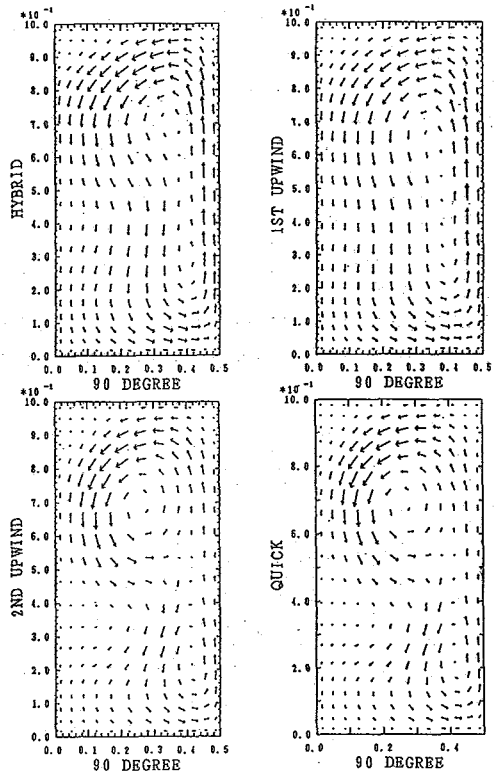


Fig. 5 Secondary Velocity Patterns at 90 Degree Section

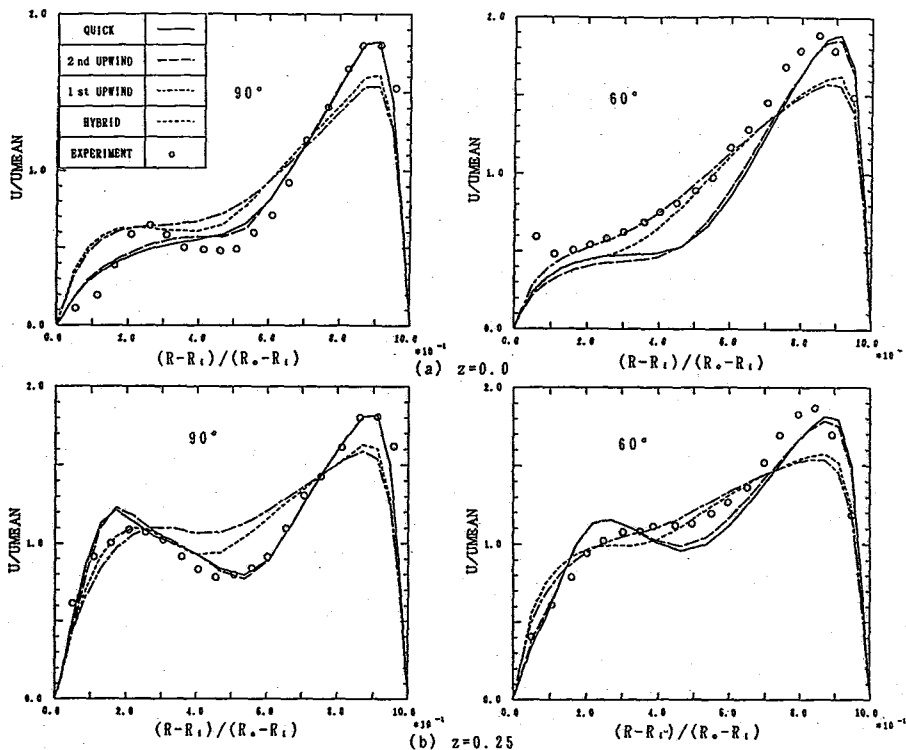


Fig. 6 Comparison of Velocities at $z=0$ and 0.25 sections

Table. 1 Previous Studies in a Square Duct of Strong Curvature

Author	Discretization scheme et al	Des.
Humphrey, H. A. et al	Re=790, De=368, Grid: $60 \times 15 \times 10$ Cal. Domain: $-10d \sim +10d$, Hybrid Scheme	JFM (1977)
Vanka, S. P.	Re=790, De=368, Grid: $58 \times 15 \times 11$ Cal. Domain: $-5d \sim +10d$, Hybrid Scheme	AIAA J. (1985)
Kajishima, T. et al	Re=200, De=J41, Grid: $161 \times 20 \times 10$ Cal. Domain: $-10d \sim +50d$, Central Diff.	JSME (1985)
Yamada, H. et al.	Re=790, De=368, Grid: $89 \times 20 \times 15$ Cal. Domain: ?, Power Law Scheme	CFD Sym. (1990)
Yeo, R. W. et al.	Re=790, De=368, Grid: $40 \times 17 \times 11, 61 \times 23 \times 17, 70 \times 25 \times 19$ Cal. Domain: $-5d \sim +10d$, QUICK Scheme et al.	T. ASME (1991)
Present	Re=790, De=368, Grid: $62 \times 22 \times 14$ Cal. Domain: $-5d \sim +10d$, QUICK Scheme et al.	

5. 結 論

ノン・スタガード格子系の一般座標系に高次差分スキームを適用する手法を二つの計算対象に適用して、そ

の計算精度等を検討した。高次差分スキームを使うことで従来の低次差分スキームより比較的实验値に近い予測ができた。利用可能な計算機の範囲で十分な格子が得られない場合、特に3次元流れ場の場合には、妥当な計算結果を得るためには高次差分スキームを使用して予測精度を保つことが必要である。(1992年11月5日受理)

参 考 文 献

- 1) Aris, R., 1962, Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics, Prentice-Hall, Inc.
- 2) Freitas, C.J. et al., 1985, Int J. Num. Meth. Eng., Vol.5, pp.561-575.
- 3) Fuchs, L. and Tillmark, N., (1985) Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol.5, pp.311-329.
- 4) Han, T. et al., 1981, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol.29, pp.81-95.
- 5) Humphrey, J.A.C., et al., 1977, JFM, Vol.83, pp.509-527.
- 6) Leschziner, M.A., 1980, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol.23, pp.293-312.
- 7) Leonard, B.P., 1979, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol.19, pp.59-98.
- 8) Peric, M., et al., 1988, Comp. Fluids, Vol.16, pp.389-403.
- 9) Rodi, W., 1988, 12nd NST open seminar.
- 10) Yeo, R.W., et al., 1991, J. Fluids Eng., Vol.113, pp.563-568.