

動的計画法による予測制御系の設計

Design of Predictive Control using Dynamic Programming

今野 雄 介*・橋 本 秀 紀*・富 塚 誠 義**

Yusuke KONNO Hideki HASHIMOTO and Masayoshi TOMIZUKA

1. はじめに

予見制御は目標軌道追従問題における目標軌道の未来値又はレギュレーション問題における外乱の未来値を最適に利用して機能の改善を図ることを目的としている。この制御法は特に機械システムの制御において有効性が確認されている。

一方、GPC (Generalized Predictive Control) に代表される予測制御において目標値や外乱の未来値が制御項に現れる¹⁾。この点に着目し、予見制御と予測制御の相互関係について検討が加えられている²⁾。予見制御は線系 2 次形式 (LQ) 最適制御理論をベースにしているため全体システムの安定性や予見時間の効果等について検討を行うことが容易である。一方、予測制御では通常は最適制御理論に頼らずに制御則を導出している¹⁾。予測制御では、現在から未来にわたる有限区間で 2 次形式評価関数を最適化する現時点での入力を求め、次のステップでは同じ操作を繰り返すことが特徴である。この方式の欠点は、最適化の繰り返しシステムの安定性はもとより長い時間に渡っての最適性を意味しないことである。

本論文では、状態空間モデルに基づき予見制御も予測制御も動的計画法 (Dynamic Programming, DP) によって同一の立場から論じることができることを示す。この点についてはすでに文献 2) においても検討が加えられている。同一の立場から予測制御と予見制御を論じる利点は、

- (1) 予測制御における安定性の問題が明確になる。
- (2) 予測制御においては 2 乗誤差を加算する項の上限 (N_2) と 2 乗入力を加算する項の上限 (N_u) とに違った値を用いるが、この効果を定量的に論じることができる。

- (3) 予測制御と予見制御が互いに等価になる場合を明確にすることができる。

等々、いくつかのことを論じることができる。

2. 未来値を用いる 2 次形式最適化

2.1 問題の定式化と最適解

予見制御は状態空間モデルに基づく評価関数を取る。本論文では文献 3) に沿って問題を定式化する。プラントは線形時不変とし、次のように状態空間表現されるものとする。

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_w w(k), y(k) = Cx(k) \\ x(k): n \times 1, A: n \times n, u(k): m \times 1, y(k): l \times 1 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $w(k)$ は外乱項であり、外乱の未来値がわかる場合には外乱除去問題となる。次のような拡大系を考えると、入力側に積分器が現れ適切なサーボ系とすることができる³⁾。

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}\Delta u(k) + \bar{D}\Delta w^*(k) \quad (2)$$

$$e(k) = y(k) - r(k) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ & C \end{bmatrix} \bar{x}(k) \quad (3)$$

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} e(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & CA \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} CB \\ B \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} -1 & CB_w \\ 0 & B_w \end{bmatrix} \quad (7)$$

* 東京大学生産技術研究所 第 3 部

** カリフォルニア大学

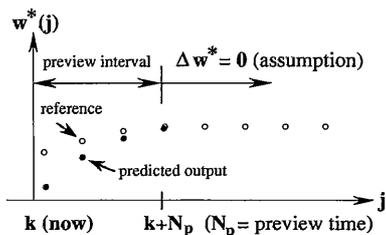


図1 Future value of $w^*(j)$ (k : now)

$$\Delta w^*(k) = \begin{bmatrix} \Delta r(k+1) \\ \Delta w(k) \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここで、 $\Delta = 1 - z^{-1}$, $r(k)$ は目標値、 $e(k)$ は目標値と出力の偏差である。評価関数として一般的な次式の2次形式を最小化することを目的とする。

$$J(k) = \bar{x}^T(N) S \bar{x}(N) + \sum_{i=k}^{N-1} [\bar{x}^T(i) \bar{Q} \bar{x}(i) + \Delta u^T(i) R \Delta u(i)] \quad (9)$$

ただし、 $S \geq 0$, $Q \geq 0$, $R > 0$ 。ここで、 $\bar{Q} = \tilde{C}^T \tilde{C}$ と選べば和記号中の第一項は $e^T(k) e(k)$ となることに注意しておく。

(9)式で和の下端を j とおいた評価関数を $J(j)$ とおき、その最適値 $J^{opt}(j)$ は時刻 j での状態 $x(j)$ の2次形式で表されるものと仮定する。

$$J^{opt}(j) = \bar{x}^T(j) K(j) \bar{x}(j) + 2\bar{x}^T(j) L(j) + M(j) \quad (10)$$

$J^{opt}(j)$ を与える入力 $\Delta u(j)$ は DP を用いて、漸化式の形で容易に求められる。

$$\Delta u(j-1) = -[R + \tilde{B}^T K(j) \tilde{B}]^{-1} \{ \tilde{B}^T K(j) \tilde{A} \bar{x}(j-1) + \tilde{B}^T K(j) \tilde{D} \Delta w^*(j-1) + \tilde{B}^T L(j) \} \quad (11)$$

$$K(j-1) = \tilde{Q} + \tilde{A}^T K(j) \tilde{A} - \tilde{A}^T K(j) \tilde{B} [R + \tilde{B}^T K(j) \tilde{B}]^{-1} \tilde{B}^T K(j) \tilde{A} \quad (12)$$

ただし、 $L(j)$, $M(j)$ についても $K(j)$ と同様に漸化式が得られる。

したがって、(10)式を最小にする時刻 k での制御入力は、(11)式で $j-1=k$ とすることにより求められる。次節では、この解に基づいて、 N_p ステップ先までの $\Delta w^*(j)$ が実際に利用できるとした時の予見制御システムの構成を示す。

2.2 予見制御解について

リカッチ方程式(12)は、 $(\tilde{Q}^{1/2}, \tilde{A})$ が可観測、 (\tilde{A}, \tilde{B}) が可制御ならば j によらない定常解 K を持つ。これは、

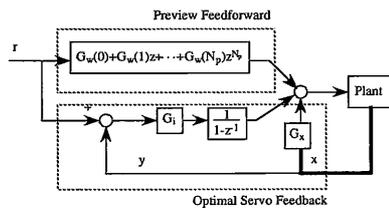


図2 Block diagram of preview control

最適化区間を無限に長くとしたことに対応し、予見制御の評価関数と一致する。この場合において、未来の目標値が現在の時刻 k から、 N_p ステップ先まで利用可能(すなわち「予見」できる)でその先の目標値は一定、すなわち $\Delta w^*(j) = 0$ for $j > k + N_p$ と仮定すれば制御則は次のようになる(図1参照)。

$$\Delta u(k) = -[R + \tilde{B}^T K \tilde{B}]^{-1} \{ [\tilde{B}^T K \tilde{A} \bar{x}(k) + \tilde{B}^T K \tilde{D} \Delta w^*(k) + \tilde{B}^T \sum_{j=1}^{N_p} (\tilde{A}^T)^j K \tilde{D} \Delta w^*(k+j)] \} \quad (13)$$

ここで、 \tilde{A} は閉ループ系のシステム行列である。

(13)式の右辺第3項が未来値のフィードフォワード項(予見制御項)に相当する。定常解 K が得られる場合は、 \tilde{A} は安定になるもので現在から離れた時点の目標値の入力に対する寄与は $(\tilde{A}^T)^j$ がかかる分小さくなることがわかる。

この制御系のブロックを図2に示す。フィードバック部分と未来値のフィードフォワード部分に分けられる。この構造は以下の予測制御系にも共通である。ただし、ここで示した予見制御の場合にはフィードバックの部分で通常の最適サーボ系になっていることが特徴となる。

3. 予測制御アルゴリズム

一般化予測制御(GPC)は、次の評価関数を最小にするものである。

$$J = \sum_{j=k+N_1}^{k+N_2} e^T(j) e(j) + \sum_{j=k}^{k+N_u} \Delta u^T(j) R \Delta u(j) \quad (14)$$

(14)式において、 N_1 は最小評価ホライズン(minimum costing horizon)、 N_2 は最大評価ホライズン(maximum costing horizon)と呼ばれ、予見制御と違い N_2 は有限の値を取る。また、GPCの大きな特徴として時刻 $k + N_u$ 以降の入力変化がないものと仮定して最適化を行う。この N_u を制御ホライズン(control horizon)という。図3に示したように、この仮定のため最適化で決定される入力は $u(k) \sim u(k + N_u)$ の $N_u + 1$ 個となる。このうち、実際に制御に用いるのは $u(k)$

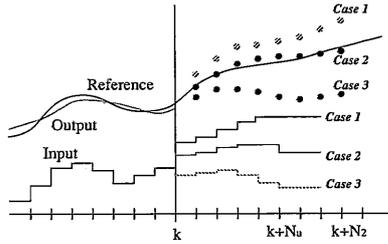


図3 Decision of control input

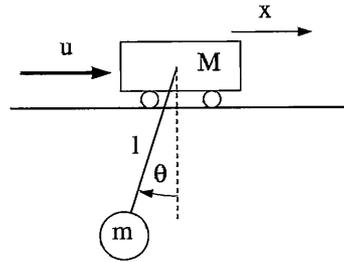


図5 Simulation model

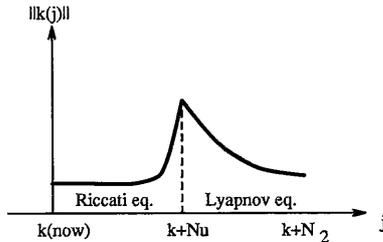


図4 Solution of Riccati and Lyapunov equation

$K(j)$ は大きくなる。 $K(j)$ の挙動を概念的に表したのが図4である。

さて、(15)式第1項から出るリカッチ方程式は(12)式にはかならないが、 $K(k+1)$ を求めれば、現時刻 k における $\Delta u(k)$ が(11)式より与えられる。現時刻が1つ進み、 $k+1$ となった段階では上記の最適化を再び繰り返すことになるが、フィードバックゲインおよびフィードフォワードゲインが k 時点で求めたものと同じになることは明らかである。

このように、GPC の評価関数を用いた最適化ではリカッチ方程式の定常解を使うことができないので、DP から計算されたゲインによるフィードバック(11)を施した結果が安定になる、すなわち $\bar{A}_c(k)$ が安定になるという保証は無い。しかし、 N_u が十分に大きい場合には、フィードバックゲインは定常解に漸近するので $\bar{A}_c(k)$ は安定になる。

リカッチ方程式の収束の速さは、 R が小さいほど速いので、 N_u を短くとっても R が小さければ定常解に近い特性が得られると考えられるが、 R が小さいということはシステムの応答を早めることであり、本来予測制御系が目指していたロバスト性が損なわれる原因となる。そのため R は小さくできないことに留意すべきである。

従来の研究でも指摘されていたが、 N_2 、 N_u を小さく取ると応答が振動的になりロバスト性に欠けることなども、以上の考察から納得できる。

また、 N_u を大きくとった時には、 $N_u < N_2$ とする意味がなくなることが(15)式第1項のリカッチ方程式の性質より明らかである。

4. 例 題

例題として図5に示すようなクレーンを考える。制御入力とは車に加える力であり、出力は荷物の位置である。平衡点での線形化を行うと、モデルは4次となる。

振動周期は1.42 [s] となるようにパラメータを選び、さらにサンプルタイム0.1 [s] で離散化したモデルを設計に使用した。

のみで、次の制御ステップでは再び最適化を行い次の入力を求める。すなわち、大域的な最適性は言えない上に必ずしもシステムが安定化されるわけではない。

ここでは、 $N_1 = 1$ の場合の考察を行う。対象とするプラントは同様に拡大系(2)式である。

3. 動的計画法による導入

(9)式の評価関数に基づく制御則で、時刻 $k+N_u$ 以降の入力が一定となるような入力を与えるためには、 Δu にかかる重みを無限に大きくとれば良い。

$$J = \sum_{j=k}^{k+N_u} \{ \bar{x}^T(j) \bar{Q} \bar{x}(j) + \Delta u^T(j) R \Delta u(j) \} + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sum_{j=k+N_u+1}^{k+N_2} \{ \bar{x}^T(j) \bar{Q} \bar{x}(j) + \rho \Delta u^T(j) R \Delta u(j) \} \quad (15)$$

ここでは特に、 $\bar{Q} = [I_l \ 0 \ \dots \ 0]^T [I_l \ 0 \ \dots \ 0]$ と置く。

この評価関数を最小にするような入力は、まず(15)式第2項に対するDPを解き、時刻 $k+N_u+1$ において、新たに第1項の終端条件として接続すれば良い。第2項に対するリカッチ方程式は、(12)式において $R \rightarrow \infty$ とすれば良い。このようにすると、次のリアプノフ方程式がリカッチ方程式の代わりに与えられる。

$$K(j) = \bar{Q} + \bar{A}^T K(j+1) \bar{A} \quad (16) \\ K(k+N_2) = \bar{Q}$$

拡大系は積分器を含むので、 \bar{A} は少なくとも $z=1$ に不安定固有値を持ち安定でない。すなわちリアプノフ方程式(16)は、定常解を持たない。よって時刻 $k+N_u+1$ での第一の評価関数の終端条件は $N_2 - N_u$ を長くともほど、

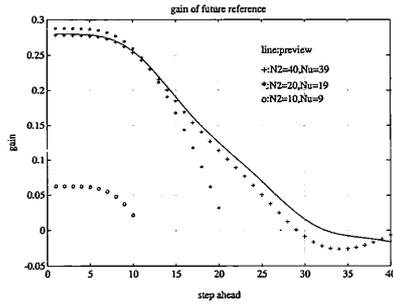


図6 Preview or predictive gain

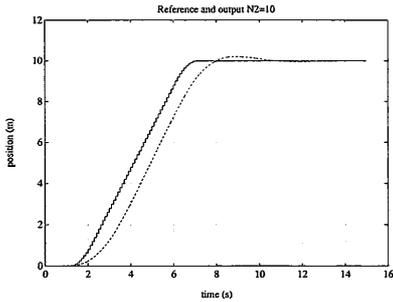


図7 Simulation result (Preview: $N_p=10$)

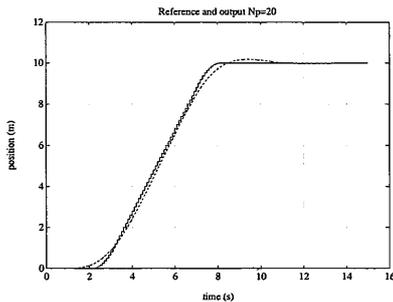


図8 Simulation result (Preview: $N_p=20$)

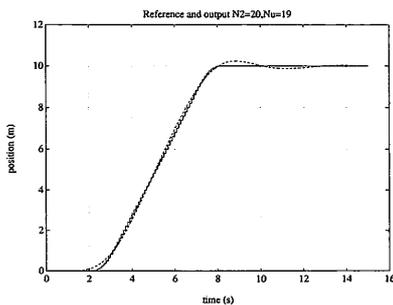


図9 Simulation result (Predictive: $N_p=20, N_u=19$)

表1: Feedback gain

N_2	$[G; G_x]$				
preview	-0.2799	-4.9376	-4.6022	2.2906	2.3036
40	-0.2781	-4.7500	-4.4634	2.3055	2.2902
20	-0.2881	-4.3095	-3.6444	2.1588	1.8899
10	-0.0627	-0.5323	-0.2604	0.2061	0.1539

予測制御の導出においてここで述べた動的計画法を用いたものと、従来の偏微分を用いた方法¹⁾は数値的に一致しているため、両者を区別する必要はない。証明が必要であるが、両者の導出法は等価であると予想される。

制御入力 u の重み $R=10$ としたときの未来値に対するゲインを図6に示す。予測制御の場合には、(13)式から分かるように、予測ステップ数 N_p が変化しても、フィードバックおよびある未来値に対するゲインは変わらない。それに対して、予測制御においては N_2 の変化はすべてのゲインに対して影響を及ぼす。

またこの時のフィードバックゲイン $[G; G_x]$ は表1のようになり、 N_2 が小さい時にはゲインが小さくなり、かつ $N_2=10$ の時にシステムは不安定になっている。

予測制御系の時間応答を図7, 8に示す。実線があらかじめ与えられた目標軌道である。予測ステップ数 N_p が増えるに従って、トラッキングエラーが小さくなるのがわかる。一方、予測制御系では先に述べたように、 $N_2=10, N_u=9$ の時には不安定である。しかし、 N_2 を増やすことによって予測制御と同様に良好な特性が得られる(図9)。

5. ま と め

予測制御を動的計画法に基づいて解き、これを用いて N_2, N_u などのパラメータの選定指針を与えることを可能にした。リカッチ方程式を解くことにより、システムの安定性のみならずどの程度まで未来の値を使えば良いかということが予測制御系と同様に評価できる。この導出法は、従来のGPCに用いられていた導出法と等価であることが数値的に検証された。(1992年9月30日受理)

参 考 文 献

- 1) Clark, D. W., Mohtadi, C. and Tuffs, P. S., Generalized Predictive Control-Part-I and II, Automatica, 23-2 (1987)
- 2) 江上正, 土谷武士, 愛田一雄, 北森俊行, ARXモデルに対する予測制御(GPC)について, SICE北海道支部学術講演会, pp. 37-40 (1991)
- 3) Tomizuka, M. and Rosenthal, D. E., On the Optimal Digital State Vector Feedback Controller with Integral and Preview Actions, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 101-2 (1979), 172