研究速報
UDC 621.791.05：621.792.4：620.17

異材接合材の界面端応力特異性の解析

Analysis of Stress Singularity at Interface Edge in Dissimilar Materials

結城良治*・許　金泉*・劉　金橋*
Ryoji YUUKI, Jin-Quan XU and Jin-Qiao LIU

1. はじめに

最近，異材を接合した界面の強度評価が重要となり，界面の力学・破壊力学に関する研究[1)~5)]が活発になってきた．力学的観点から界面の一つの特徴として，界面と表面と交差する点（以下界面端と呼ぶ）で弾性学上の特異点となり，その点で応力が無限大となり，破壊の起点となる点が挙げられる．この応力特異性については古くから知られているもののその解釈や強度評価への適用に関しては多くの混乱が見られ，検討すべき課題が残されているのが現状である[6)~13)]．

本研究では，界面と自由境界が交差する2次元モデルについて，形状および材料組み合わせを自由に与えて，その応力特異性オーダーを複数根・複素根も考慮して求めるパーソナルコンピュータープログラムを界面強度評価のツールの一つとして開発した．またいくつかの具体例について本プログラムの解析結果と境界要素法(BEM)による数値解析結果との比較・検証を行うとともに，特に複素根・複数根となる応力特異性の場合の解釈・評価について考察した．

2. 界面端の応力特異性解析法

2.1 異材切欠モデル

本研究では図1に示す2次元2相の異材切欠モデルを対象とする[6)]．他にも各種モデルも考えられるが，最も応用範囲が広いモデルである．たとえば，各材料のなす角度θ_1，θ_2を，$\theta_1=-\theta_2=\pi/2$とすると直線境界と界面が直交する実際良く使われるモデル（フリーエッジモデル）となり[8)]，$\theta_1=-\theta_2=\pi$とすると界面き裂モデルとなり[9)]，両材料を同一材料とするといわゆるV切欠モデルとなる[10)]．この界面端での応力特異性のオーダーをここでは取り扱う．このオーダーは形状・材料の組み合わせにより，変化するばかりではなく，時には消失したり[11)]，複数生じたり，複素数となったり複雑である．界面を設計・評価するに際し，まずこの特異性を把握する必要がある．

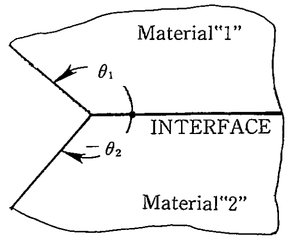

図1　異材継手モデル

2.2 Dundersパラメータ

2つの等方性材料の弾性定数として，ヤング率E_1，E_2，ポアソン比ν_1，ν_2の4つの定数があるが，2次元弾性学上でこの特異性を支配するパラメータは以下で定義される2つのDundersパラメータα，βで十分であることが知られている[12),13)]．

$$\alpha=\frac{\mu_1(\kappa_2+1)-\mu_2(\kappa_1+1)}{\mu_1(\kappa_2+1)+\mu_2(\kappa_1+1)},$$

$$\beta=\frac{\mu_1(\kappa_2-1)-\mu_2(\kappa_1-1)}{\mu_1(\kappa_2+1)+\mu_2(\kappa_1+1)} \tag{1}$$

$$\kappa_1=\begin{cases}3-4\nu_1 & \text{(plane strain)}\\ \dfrac{3-\nu_1}{1+\nu_1} & \text{(plane stress)}\end{cases} \tag{2}$$

表1は代表的な材料のヤング率とポアソン比を示す．これらの材料の各種組み合わせについて，αとβを平面歪条件で計算し，図2にプロットしている．通常応力特異性はこのようなα-β線図上で表わされる．また図2の平行四辺形内が実在の材料の存在域を示す（ただし，逆対称性のため，右の半分だけ示している）．さらに図の斜線部は$\theta_1=-\theta_2=\pi/2$の場合の特異性消失域（good pair）および応力特異性のオーダーλの等高線も併せて示す．この場合は簡単な判別式により，後述の特性方程式を解かなくても特異性の有無が判定できる[14)]．

*東京大学生産技術研究所　第1部

表1　各種材料のヤング率とポアソン比の例

分類	No.	材　料	ヤング率 (GPa)	ポアソン比
A	1	鉄鋼 (Fe)	206	0.30
	2	アルミ (Al)	70.3	0.345
	3	チタン (Ti)	115.7	0.321
	4	銅 (Cu)	129.8	0.343
	5	亜鉛 (Zn)	108.4	0.249
	6	けい素 (Si)	200	0.3
B	7	アルミナ (Al_2O_3)	359	0.20
	8	炭化けい素 (SiC)	440	0.16
	9	窒化けい素 (Si_3N_4)	304	0.27
	10	酸化マグネシウム (MgO)	303	0.175
C	11	石英ガラス	73.1	0.17
	12	エポキシ樹脂	4.93	0.33
	13	ポリエステル樹脂	3	0.38

2.3　特性方程式

このモデルについて応力特異性を決める特性方程式はBogy[15]により導かれている．すなわち，2次元弾性論・応力関数法に基づき，界面での完全接合条件および$\theta=\theta_1, -\theta_2$境界での応力自由条件を課すことにより，(5)式の特性方程式が得られる．すなわち，界面端からの距離rとして，界面端近傍の応力場σ_{ij}は次式のような特異性を有する応力場となることが知られている．

$$\sigma_{ij}\propto\frac{1}{r^{1-p}}=\frac{1}{r^{\lambda}} \tag{3}$$

もちろん，$p>1$となって特異性が消失することもある．またpが複素数となることもあり，その場合は次式のような振動特異性の応力場となる．

$$p=\xi+i\eta$$

$$\sigma_{ij}\propto\frac{1}{r^{1-\xi}}\{C_1\cos(\eta\ln r)+C_2\sin(\eta\ln r)\} \tag{4}$$

この特異性のオーダーpは次式の特性方程式の根として求められる．

$$A\beta^2+2B\alpha\beta+C\alpha^2-2D\beta-2E\alpha+F=0 \tag{5}$$

上式のα，βは前述のDundersパラメータである．ここで，簡便のため次式の関数$K(p,x)$を導入する．

$$K(p,x)=\sin^2(px)-p^2\sin^2x \tag{6}$$

(5)式の各係数A～Fは次式で表せる．

$$A=4K(p,\theta_1)K(p,\theta_2)$$
$$B=2p^2\sin\theta_1K(p,\theta_2)+2p^2\sin\theta_2K(p,\theta_1)$$
$$C=4p^2(p^2-1)\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2+K(p,\theta_1-\theta_2)$$
$$D=2p^2[\sin^2\theta_1\sin^2(p\theta_2)-\sin^2\theta_2\sin^2(p\theta_1)]$$
$$E=-D+K(p,\theta_2)-K(p,\theta_1)$$
$$F=K(p,\theta_1+\theta_2) \tag{7}$$

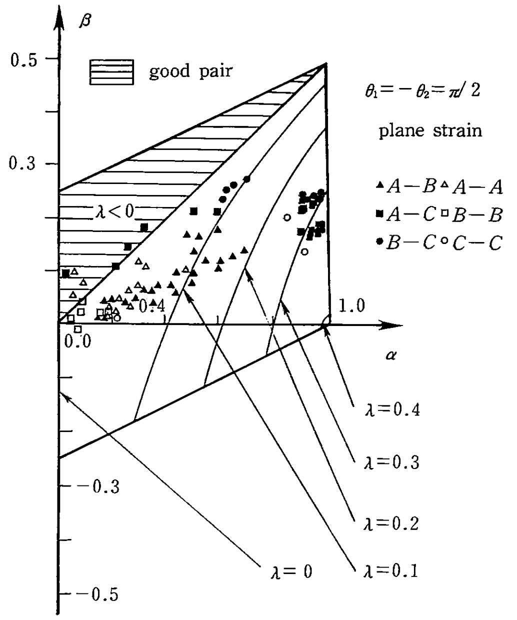

図2　各種材料組み合わせのDundersパラメータα，β
(平面歪，図中の記号は表1の材料の組み合わせを示す)

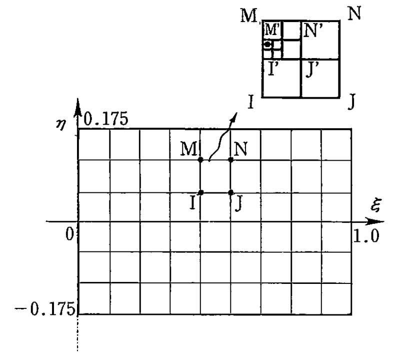

図3　複数型応力特異性の特性方程式の解法

2.4　特性方程式の解法

この特性方程式はpに関して非線形方程式となるので，挟み込み法で根を求めた．pが実数となる場合は，$0<p<1$の範囲でこの区間を100等分して根の存在範囲を見いだし，さらにこの操作を要求される精度まで繰り返すことにより根が得られる．ただし，単一根ではなく，複数となることに注意する必要がある．

またpが複素根となる場合は，本プログラムでは特性方程式を$p=\xi+i\eta$の実数部・虚数部に分離し，ξ，ηに関する2元非線形方程式に書き直し，図3に示すような2次元の挟み込み法により求めた．すなわち，ξ-η図上($0<\xi<1$，$0<\eta<0.175$，$\eta<0$の範囲は共役複素数

根として求められるので，ここで考える必要がない）で，根の存在範囲（たとえば四角形MNIJ）を見いだし，さらにその内部で存在範囲M'N'I'J'にしぼりこみ，この操作を根の要求精度を満たすまで繰り返す．このような方法により，もれることなく，また複素根も含めて最大4個の根が求められるようにした．

3．特性方程式の解析プログラムと解析例

界面の強度評価・設計のツールとして，この特性方程式の解析のためのパーソナルコンピュータプログラムを作成した．本プログラムはQuick Basicで書かれ，PC-9800系のコンピュータで手軽に利用できる．入力は以下のようになっている．

材料定数：2つの材料のヤング率E_1，E_2，ポアソン比ν_1，ν_2（ヤング率の単位GPaとしているが，E_1/E_2の比できいてくるので，単位系に依存しない）

形　状：2つの材料の角度θ_1，θ_2（方向は反時計まわりとする）

平面応力・歪：平面応力(1)，平面歪(2)を指定（界面問題では平面応力近似は成立しない）

以上の入力により，特性方程式が作成され，特異根の数，実数型ないし複素数型の特異根pおよび応力特異性のオーダーλ（$\lambda=1-p$，$\sigma_{ij}\propto 1/r^{\lambda}$）が求められる．本プログラムのフローを図4に示す．

次に2～3の解析例を示す．以下ではすべて平面歪として解析した．図5は鉄鋼（S45C）とエポキシ樹脂の組み合わせの$\theta_1=180°$，$\theta_2=-90°$の場合の解析結果である．この場合単一実根が得られ，応力の特異性は$\lambda=0.318$となる．図6は同一材料組み合わせの界面き裂の場合の解析例である．この場合の応力特異性は複素型となり，$\lambda=0.5\pm i\varepsilon$となることが知られている．また，$\varepsilon$は次式により与えられることも良く知られている．

$$\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta} \tag{8}$$

図7，8は銅（Cu）とセラミックス（Si_3N_4）の材料組み合わせを例とし，複数（この場合は2個）の特異性が生じる例を示す．比較的近いオーダーの2つの特異性が生

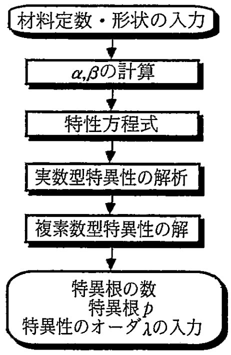

図4　解析のフローチャート

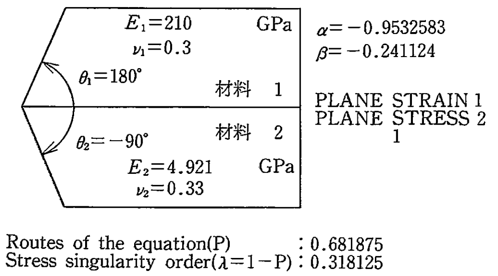

図5　金属／エポキシ異材継手の特異性オーダーの解析例

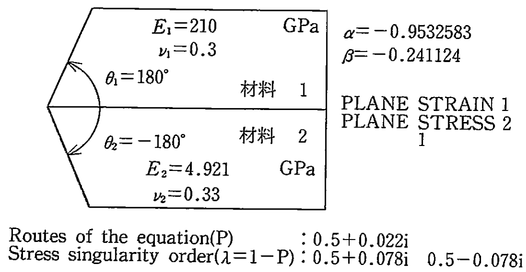

図6　金属／エポキシ界面き裂の特異性オーダーの解析例

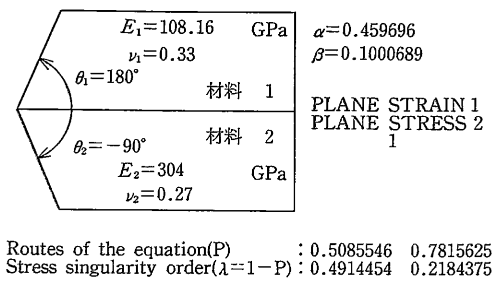

図7　Cuセラミックス異材継手の特異性オーダーの解析例

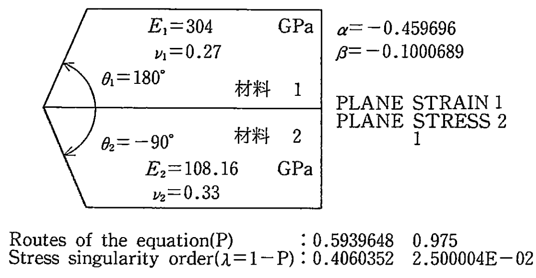

図8　セラミックス／Cu異材継手の特異性オーダーの解析例

じる場合もあり，後述のようにその解釈・評価に当たって注意が必要となる．

4．BEMによる数値検証

図9に示す具体例（$\theta_1=90°$，$\theta_2=-90°$となる2相継手の引張問題）について境界要素法2次元弾性解析（BEM2D-EWSにより）[16]を行い，前述の特性方程式から得られる理論解と比較した．図10はBEM解析から得られた界面上（$\theta=0$）の応力を界面端からの距離 r に対して両対数図上で表示したものである．これから最小自乗法で求めた傾きλは表2に示すように理論解と良く一致することを確認した．この場合はすべて単一実根となる例であり，この場合はBEMなどの数値解析でも特異性のオーダーを求めることができる．また応力特異性の係数C（$\sigma_{ij}=C/r^{\lambda}$）が強度評価のパラメータとなりうる．

次に図7の複数根となる具体例として図11に示すモデルをBEM解析し，その界面上の応力をA点に着目して図12に示す．2つの特異性が重なった応力分布となるため，直線性がなくなり，応力特異性のオーダーを数値的に求められないばかりか，この応力場を規定するためには特異性のオーダーのみならず，その分布形（θの関数）および複数の係数も明らかにしなければならない[13]．複素根の場合も同様である[16]．従来は複数根・複素根が生じる場合でも，そのうち特異性の一番強い実数根ないし実数部のみに着目した評価・研究が多く[7]，大きな混乱が生じているのが現状であり，今後の検討が望まれる．

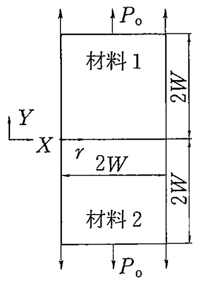

図9　2相異材継手のBEM解析モデル（$\theta_1=-\theta_2=\pi/2$の例）

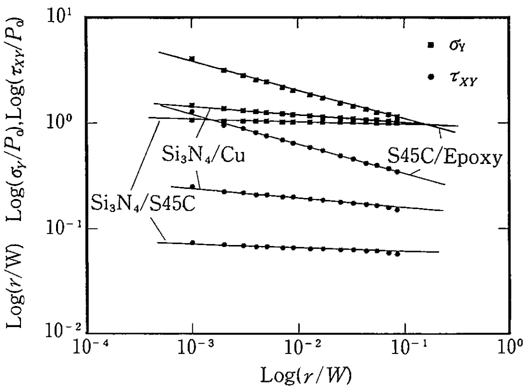

図10　界面端近傍の応力分布と特異性のBEM解析例

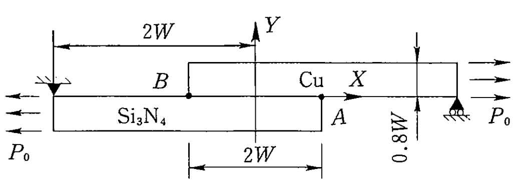

図11　複数特異オーダーを持つ異材継手モデル

5．ま と め

異材の強度評価のツールとして界面端の応力特異性を求めるプログラムを開発した．本プログラムにより材料組み合わせ，形状を与えると界面端の応力特異性のオーダーが複数でも，複素数でも漏れなく簡便に求められる．また異材継手の具体例につき，BEM解析も行い，その数値解からも特異性のオーダーを求め，本プログラムによる理論解と良い一致を見た．ただし，これは特異性が単一実根となる限られた場合のみであり，一般に特異性は複数ないし複素数となる場合が多く，このような場合に

表2　特異性オーダの理論解と数値解

Meterial	E(GPa)	ν	α，β	λ
Si_3N_4	304	0.27	−0.4603	Theory：0.0853
Cu	108	0.33	−0.1002	BEMσ：0.085 BEMτ：0.086
Si_3N_4	304	0.27	−0.1832	Theory：0.0150
S45C	206	0.30	−0.0403	BEMσ：0.015 BEMτ：0.016
S45C	206	0.30	−0.9523	Theory：0.2823
Epoxy	4.93	0.33	−0.2409	BEMσ：0.280 BEMτ：0.282

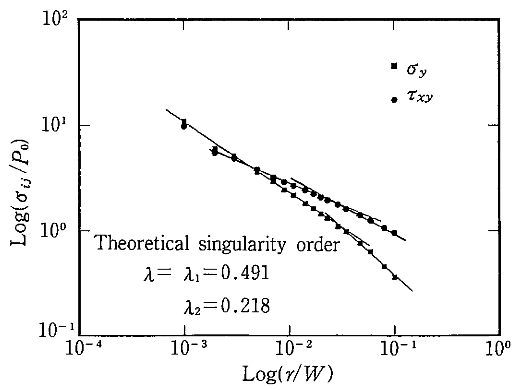

図12　界面端A近傍の応力分布と特異性

研究速報

は数値解析から特異性オーダーを決めることはできず，そのパラメータや強度評価法についてはまだ不明なのが現状である．

（1991年12月6日受理）

参考文献

1) 結城，機械学会誌，93-861（1990），645-647.
2) Rice, J.R., J. Appl. Mech., 55 (1988), 98-104.
3) 結城・許，生産研究，42-8（1990），508-514.
4) He, M.T. and Hutchinson, J.W., J. Appl. Mech., 56 (1989), 56-60.
5) 結城・許，機論A，56-529（1990），1945-1952.
6) Bogy, D.B., J. Appl. Mech., 35 (1968), 146-154.
7) 服部，機論A，56-523（1990），618-623.
8) Bogy, D.B., Int. J. Solids and struct., 6 (1970), 1287.
9) England, A.H., J. Appl. Mech., 31 (1964), 477-483.
10) 岡村，強度解析学，オーム社，1985.
11) 久保・大路，機論A，57-539（1991），632-636.
12) Dunders, J., J. Appl. Mech., 36 (1969), 650.
13) 陳・西谷，機論A，56-540（1991），129-135.
14) 結城・許，機論A，56-527（1990），1517-1523.
15) Bogy, D.B., J. Appl. Mech., 38 (1971), 377-386.
16) 結城・許，生産研究，43-7（1991），306-309.