研　究　速　報

UDC 624.07：539.42

骨組構造の塑性崩壊解析のための Shifted Integration法におけるアダプティブ手法

Adaptive Procedures in the Shifted Integration Techniquesfor Plastic Collapse Analysis of Framed Structures

都　井　　　裕*・磯　部　大吾郎*

Yutaka TOI and Daigoro ISOBE

1　序

骨組構造の有限要素解析においては，せん断変形を考慮する場合は線形チモシェンコはり要素，無視する場合はBernoulli-Eulerの仮定に基づく3次はり要素が用いられる．有限要素の剛性マトリックスは通常，数値積分により評価され，線形チモシェンコはり要素では1点積分，3次はり要素では2点積分公式が使われる．これらの数値積分点の位置と物理的な応力評価点の位置，あるいは弾塑性崩壊解析における塑性ヒンジ発生点の位置との間の関係は，計算の実際において重要な問題である．

著者の一人は，応力評価点あるいは塑性ヒンジ発生点の位置が明確な物理モデルである剛体・ばねモデル[1]とこれらの有限要素モデルにおけるひずみエネルギー近似式の等価条件を考察することにより，有限要素における数値積分点位置と物理的な応力評価点位置の関係を初めて見いだした[2]．この関係を用いると，有限要素における応力評価点を精密にホットスポットに合わせたり，塑性ヒンジを厳密に部材結合部あるいは集中荷重点に発生させることが可能となり，骨組構造の塑性崩壊解析の合理化および効率化につながる．この方法は，文献2)において，Shifted Integration法[2]と命名された．

Shifted Integration法の塑性崩壊問題への応用に際し，文献2)～4)においては，次のような計算手順をとった．すなわち，塑性ヒンジの発生が予想される部分（クランプ端および集中荷重点）に正確に塑性ヒンジが発生するように，解析当初から当該要素における数値積分点をシフトしておいた．このため，塑性崩壊荷重値に関しては収束性が著しく改善されたものの，要素数が少ない場合の変位解の精度にはある程度の低下が見られた．これを改善するためには，要素が弾性変形状態にある時は，線形解析における最適位置（線形チモシェンコはり要素では要素中央点，3次はり要素ではガウス積分点）に数値積分点を配し，要素の一部が全断面降伏状態に入った直後に，その位置に正確に塑性ヒンジが発生するように，Shifted Integration法を適用する方法，すなわち，一種のアダプティブ手法を用いることが有効と考えられる．

本報告では，線形チモシェンコはり要素およびBernoulli-Eulerの仮定に基づく3次はり要素による骨組構造の塑性崩壊解析において，このようなアダプティブ化されたShifted Integration法を用いる手順を説明し，数値例により，その効果を実証したい．

2　Shifted Integration法におけるアダプティブ手法

2.1　線形チモシェンコはり要素

線形チモシェンコはり要素における数値積分点位置と塑性ヒンジ発生点位置の関係は，図1を参照すると

$$s_1 = -r_1 \quad \text{あるいは} \quad r_1 = -s_1 \tag{1}$$

と表わせる[2]．

要素全体が弾性変形状態にある場合は，対称性および精度の観点から，数値積分点は要素中央（$s_1=0$）に位置することが望ましい．この場合の要素内部における曲げモーメント分布$M(s)$は，要素中央点の曲げモーメントMおよびせん断力Vを用いて次式により与えられる．

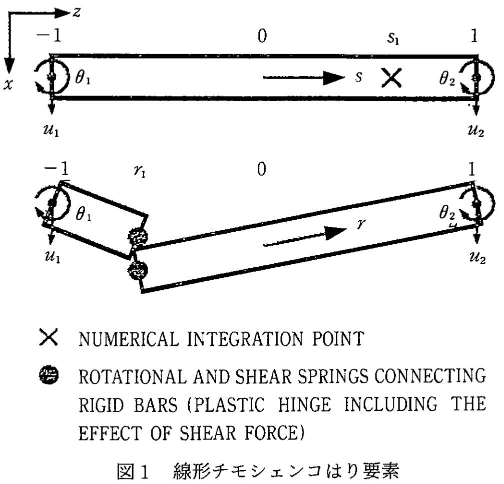


図1　線形チモシェンコはり要素

*東京大学生産技術研究所　第2部

$M(s)=M-V\cdot(sL/2)$　　　(2)

ここに，Lは要素長である．上式より，曲げモーメントは要素内で線形変化し，両要素端（$s=\pm1$）のどちらかで最大値（絶対値の意味）をとることがわかる．

空間骨組構造解析にこの要素を用いる場合，軸方向変位およびねじり角は要素内で線形内挿され，したがって，軸力およびねじりモーメントは要素内で一定値をとる．2方向の曲げモーメント，軸力，ねじりモーメントおよびせん断力により表現された降伏条件との対比により，要素内で全断面降伏の起こる位置が決定される．全断面降伏後は，(1)式に従い，その位置に正確に塑性ヒンジが発生するように数値積分点の位置をシフトする．

なお，ここでの塑性ヒンジは軸力，ねじりモーメントなどの影響を含んだ一般的な塑性ヒンジを意味していることを注意しておく．

2.2　3次はり要素

Bernoulli-Eulerの仮定に基づく3次はり要素における2つの数値積分点位置と塑性ヒンジ発生点位置の関係は，図2を参照すると

$r_i=\pm1/3s_2$　$(i=1,2\,;\,s_1=-s_2)$　　　(3)

と表わせる[2]．

要素全体が弾性変形状態にある場合は，ガウス積分点$(s_i=\pm1/\sqrt{3})$が最適な積分点位置であり，最も良好な線形解が得られる．この場合の要素内部における曲げモーメント分布は，次式により与えられる．

$$M=EI[(6s/L^2)u_1+\{(3s-1)/L\}\theta_1-(6s/L^2)u_2+\{(3s+1)/L\}\theta_2]\qquad(4)$$

曲げモーメントは要素内で線形変化し，両要素端($s=\pm1$）のどちらかで最大値をとる．

空間骨組構造解析に3次はり要素を用いる場合，線形チモシェンコはり要素の場合と同様に，軸方向変位およびねじり角は要素内で線形内挿される．2方向の曲げモーメント，軸力，ねじりモーメントにより表現された降伏条件との対比により，要素内で全断面降伏の起こる位置が決定され，その後は，(3)式に従い，その位置に正確に塑性ヒンジが発生するように数値積分点位置を移動した上で計算が続行される．

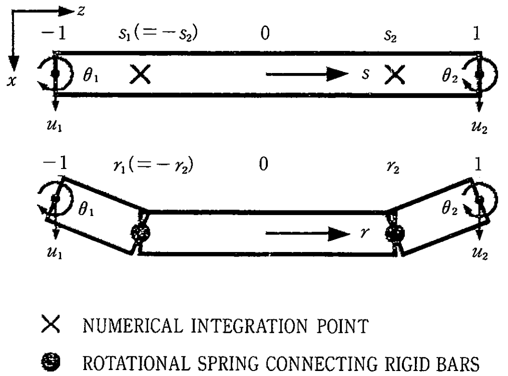


図2　Bernoulli-Eulerの仮定に基づく3次はり要素

3　数値例

前節で述べた，アダプティブ化されたShifted Integration法の有効性を見るために，この方法を簡単な平面骨組および空間骨組の塑性崩壊問題に適用した．

解析された平面骨組（門型骨組）および空間骨組は，文献3)で解析されたものと同様であり，構造寸法および材料定数については，文献3)を参照されたい．

骨組構造解析において仮定された降伏条件は次式により表わされる．

$$(M_x/M_{x0})^2+(M_y/M_{y0})^2+(N/N_0)^2+(M_z/M_{z0})^2-1=0\qquad(5)$$

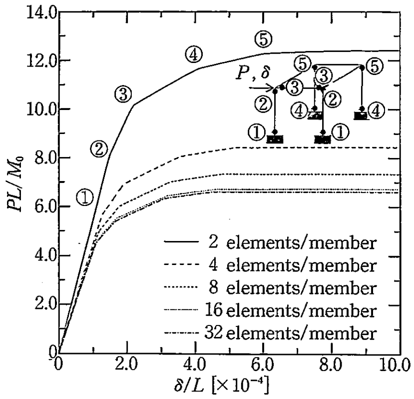
ここに，M_x, M_y, N, M_zはそれぞれ曲げモーメント2成分，軸力およびねじりモーメントであり，下添字0は，それらの成分が単独で部材断面に作用した場合の全断面塑性値を意味する．

3.1　線形チモシェンコはり要素

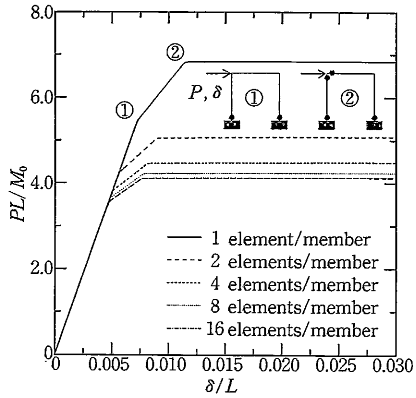
線形チモシェンコはり要素による空間骨組の塑性崩壊解析結果を図3に示す．図3(a)，(b)，(c)はそれぞれ，常に要素中心点を積分点とする通常の有限要素法，部材端に厳密に塑性ヒンジが発生するように部材端要素のみの積分点を初めからシフトした方法，および本報告で提案したアダプティブ化されたShifted Integration法，の3種類の方法による解の，要素細分化による収束の様子を示している（図中の要素数は1部材当たりの一様分割数であることに注意されたい)．図3(a)および(b)の結果からわかるように，通常法では塑性崩壊荷重の収束がきわめて遅く，またShifted Integration法の単純な適用では塑性崩壊荷重の収束性は著しく改善されるものの変位解の精度が低下する．これに対して図3(c)のアダプティブ化されたShifted Integration法による解は，崩壊荷重および変位ともに，最小限の要素数でも，きわめて良好であり，1部材2要素で実用上十分な精度の解が得られることがわかる．なお，この例題のように，部材端に荷重が作用する場合の最小限の要素数は2となるが，荷重がスパン間に作用する場合は最小限の要素数は4となる．

3.2　3次はり要素

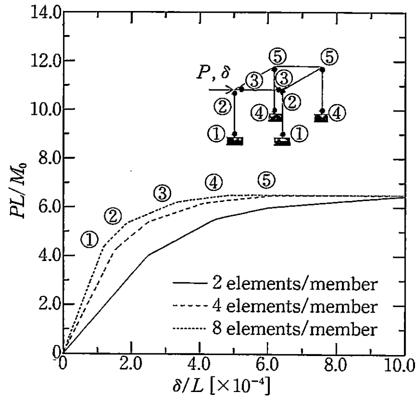
3次はり要素による平面骨組および空間骨組の塑性崩壊解析結果をそれぞれ，図4と図5に示す．図4と図5はそれぞれ，門型骨組および空間骨組に対する解析結果



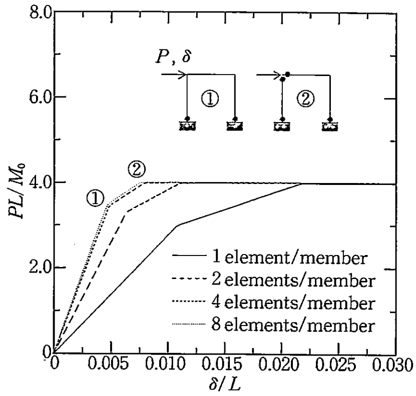
（a）　通常法（s_i＝0）



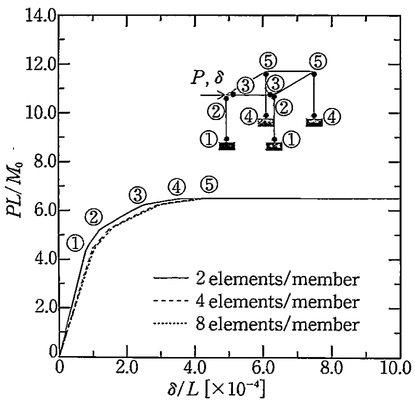
（a）　通常法（ガウス積分）



（b）　Shifted Integration法

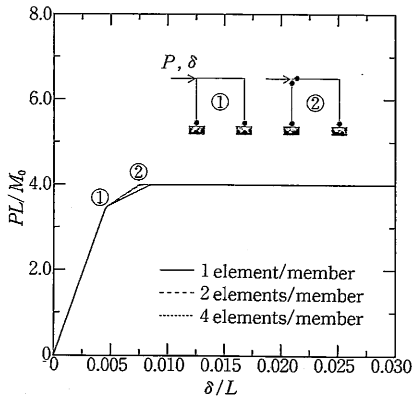


（b）　Shifted Integration法



（c）　アダプティブ化したShifted Intergration法

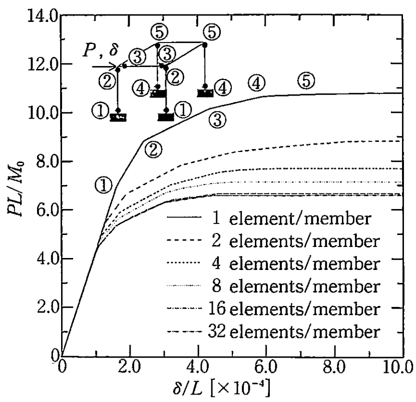
図3　線形はり要素による空間骨組の塑性崩壊解析



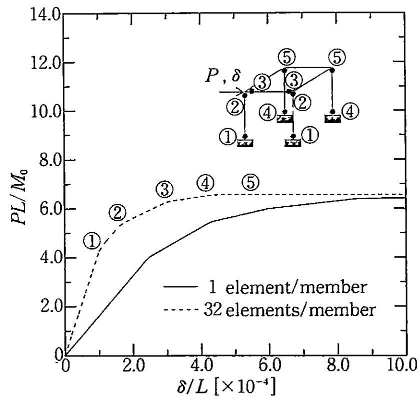
（c）　アダプティブ化したShifted Integration法

図4　3次はり要素による門型骨組の塑性崩壊解析

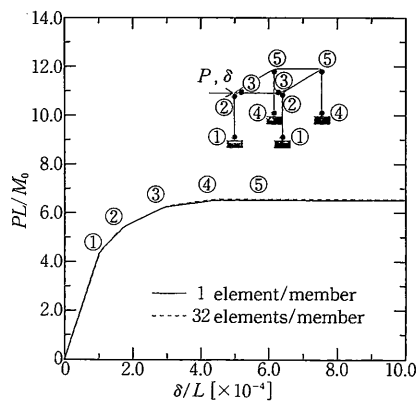
であり，アダプティブ化されたShifted Integration法による解（(c)図）が，数値積分点をガウス積分点位置に固定した通常の有限要素解析結果（(a)図）および部材端要素の数値積分点を初めからs_i＝±1/3，すなわち要素端部に正確に塑性ヒンジが発生するような位置に置いた場合の解析結果（(b)図）と比較されている．



（a）　通常法（ガウス積分）



（b）　Shifted Integration法



（c）　アダプティブ化したShifted Integration法

図5　3次はり要素による空間骨組の塑性崩壊解析

線形チモシェンコはり要素の場合と同様に，アダプティブ化されたShifted Integration法は，崩壊荷重および変位ともに，最小限の要素数で，十分に良好な解を与えていることが，これらの解析結果から確認される．これらの例題のように，スパン間荷重が作用しないような場合には，1部材1要素によるモデル化で，崩壊荷重および変位ともに，収束解とほぼ一致する，実用上十分な精度の解を得ることが可能であることがわかる．

4　結　　言

線形チモシェンコはり要素およびBernoulli-Eulerの仮定に基づく3次はり要素による骨組構造の塑性崩壊解析において有効な，アダプティブ化されたShifted Integration法を提案した．本方法によれば，最小限の要素数，すなわち，線形チモシェンコはり要素の場合は1部材2要素，3次はり要素の場合は1部材1要素で，崩壊荷重，変位ともにきわめて高精度の解が得られる．すなわち，本手法はきわめて実用性の高い骨組崩壊解析法であり，建築骨組構造物の耐震解析，海洋骨組構造物の最終耐力解析などにおける，計算の効率化・合理化に大きく寄与するものと考える．さらに本手法は，線形チモシェンコはり要素あるいは3次はり要素を装備した既存の有限要素解析コードに最小限の手間でインプリメントできる．座屈問題あるいは動的崩壊問題などに対する数値的検討を現在進めている．なお，本研究の詳細は別途，公表予定である[5]．

（1991年11月13日受理）

参　考　文　献

1）都井：鋼構造の離散化極限解析，コンピュータによる極限解析法シリーズ3，培風館，(1990)．

2）Y. Toi: Shifted Integration Technique in One-Dimensional Plastic Collapse Analysis Using Linear and Cubic Finite Elements, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 31, (1991), 1537～1552.

3）Y. Toi and H.-J. Yang: Finite Element Crush Analysis of Framed Structures, Computers and Structures, Vol. 41, (1991), 137～149.

4）都井・原田・弓削：Shifted Integration法に基づく線形有限要素による空間骨組構造の最終耐力解析，生産研究，第44巻，第3号，(1992)．

5）Y. Toi and D. Isobe: Adaptively Shifted Integration Technique for Plastic Collapse Analysis of Framed Structures, submitted to the Int. J. Numer. Methods Eng, (1991).