

応力方程式モデルによる 3 次元等温室内気流の数値解析

Numerical Simulation of Air Flow by means of Differential Stress Model

村 上 周 三*・加 藤 信 介**・大 岡 龍 三**
Shuzo MURAKAMI, Shinsuke KATO and Ryoza OOKA

本報では応力方程式モデルの数値計算手法を解説し、また 3 次元等温流れ場の計算結果を示す。これらの結果を実験結果および代数応力方程式モデルの計算結果と比較することにより、応力方程式モデルの有効性について検討する。

1. 序

筆者らは室内気流の数値解析に関して、 $k-\epsilon$ モデル ($k-\epsilon$) および代数応力モデル (Algebraic Stress Model, ASM) による一連の検討を行ってきた¹⁾。これらの検討において模型実験との比較等により、ASMは特に非等方性が問題となる流れ場における乱れ性状の予測に関し $k-\epsilon$ より優れたモデルであることを示した。一方、筆者らはASMを用いた建物周辺気流の解析とLESデータベース、風洞実験結果との比較により、ASMの持つ種々の欠点を指摘した²⁾。本報では、 $\overline{u_i u_j}$ 方程式の移流・拡散項を代数的にモデル化しない応力方程式モデル (Differential Stress Model, DSM) を 3 次元等温流れ場³⁾に適用し、ASMによる解析結果との比較検討を行う。それと同時に数値計算の手法について解析を行う。

2. DSMにおける計算安定化の取り扱いについて

2.1 DSMの基礎式

DSMの基礎式を表 1 に示す。今回用いたDSMは圧力一歪相関項にIPモデル (Isotropization of Production Model) を用い³⁾、 $\overline{u_i u_j}$ と ϵ の輸送方程式の拡散項にはGGDH (Generalized Gradient Diffusion Hypothesis)⁴⁾ を用い、数値定数はM.M. GibsonおよびB.E. Launder⁵⁾のものに基づいている。

2.2 運動方程式安定のためのPSEUD VISCOSITYの導入

一般に移流のある正の拡散係数をもつ拡散方程式は、適当な時間間隔とメッシュ間隔を選んでやれば時間積分により安定に解くことができる^{APP.1)}。正の拡散係数 α をもつ移流のある拡散方程式は一次元の場合次の形をしている。

〈記号〉 U_i : i 方向平均流速 u_i : i 方向流速の変動成分
 P : 圧力の平均値 $\overline{u_i u_j}$: レイノルズストレス P_{ij} : $\overline{u_i u_j}$ の生産項
 k : 乱流エネルギー P_k : k の生産項 ϵ : k の散逸
 ϵ_{ij} : $\overline{u_i u_j}$ の散逸 C_{ij} : $\overline{u_i u_j}$ の移流項 D_{ij} : $\overline{u_i u_j}$ の拡散項
 Φ_{ij} : 圧力歪相関 τ_w : 壁面剪断応力 δ_{ij} : クロネッカデルタ
 $h_m^{(w)}$: 壁面から第一セル差分定義点までの距離 $\overline{\quad}$: 平均操作

表 1 応力方程式モデルの基礎式 (等温)

(連 続 式)	$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$	(1)		
(運動方程式)	$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j}$	(2)		
($\overline{u_i u_j}$ 方程式)	$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = D_{ij} + P_{ij} + \Phi_{ij} - \epsilon_{ij}$	(3)		
(ϵ 方程式)	$\frac{D\epsilon}{Dt} = D_\epsilon + \frac{\epsilon}{k} (C_{\epsilon 1} P_k - C_{\epsilon 2} \epsilon)$	(4)		
	$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$	(5) $P_k = \frac{1}{2} P_{ii}$	(6)	
	$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_k \overline{u_i u_m} \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k})$	(7)	$D_\epsilon = \frac{\partial}{\partial x_m} (C_\epsilon \overline{u_i u_m} \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k})$	(8)
	$P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$	(9)	$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon$	(10)
	$\Phi_{ij} = \Phi_{ij(1)} + \Phi_{ij(2)} + \Phi_{ij(3)}$	(11)		
	$\Phi_{ij(1)} = -C_1 \frac{\epsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k)$	(12)	$\Phi_{ij(2)} = -C_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k)$	(13)
	$\Phi_{ij(3)} = \sum_{w=1}^{WC} C_1 \frac{\epsilon}{k} (\overline{u_k u_m} n_k^{(w)} n_m^{(w)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i} n_k^{(w)} n_j^{(w)})$	(14)		
	$C_1 : 1.8 \quad C_2 : 0.6 \quad C_3 : 0.5 \quad C_k : 0.22 \quad C_\epsilon : 0.16$			
	$C_{\epsilon 1} : 1.44 \quad C_{\epsilon 2} : 1.92 \quad C_1 : 2.5$			

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} \quad (15)$$

一方DSMにおける運動方程式は同じく 1 次元の場合次のような単純な形になる (表 1, 式(2))、ここでは粘性項を無視)。

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i u_i}) \quad (16)$$

(16)式は右辺に、正の拡散係数を有する輸送変数の空間二階微分項を含まないので拡散型であるとはいえない。したがって、 U_i や $\overline{u_i u_i}$ 等のDSMの方程式群を時間積分で解くに際して、運動方程式の数値不安定により収束解を得られない可能性が高い。これを避けるために運動方程式中の $\overline{u_i u_j}$ に導入される工夫がPSEUD VISCOSITY (正

*東京大学生産技術研究所 付属計測技術開発センター

**東京大学生産技術研究所 第 5 部

の見かけの拡散係数) と呼ばれるものである。すなわち、(16)式で右辺の $\overline{u_1 u_1}$ が ν_e を用いて $\overline{u_1 u_1} = \nu_e \partial U_1 / \partial x_1 + \dots$ という形で表現できるならば、(16)式は次のようになる。(ここで、 ν_e が PSUED VISCOSITY であり、正でなければならない)

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial P}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} (-\nu_e \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \dots) \quad (17)$$

式(17)は右辺に正の係数 ν_e を有する空間二階微分項を含むので拡散方程式に準じた形をしており、この ν_e が数値解析の安定性に寄与する。すなわち、運動方程式の時間積分の過程においてストレス $\overline{u_1 u_1}$ と速度ひずみ $\partial U_1 / \partial x_1$ との間をなんらかの関係で結びつけて、式(2)における $\overline{u_1 u_1}$ を変形する工夫を考えた訳である。Huang と Leschziner は $\overline{u_1 u_1}$ の生産項 P_{11} ((9)の式) 中に $\partial U_1 / \partial x_1$ が含まれることに着目して、この工夫、すなわち PSUED VISCOSITY を導入する手法を定常解法である SIMPLE 法において考案した⁶⁾。平岡は $\overline{u_1 u_1}$ を代数的に表現する工夫を用いて、その手法を非定常解法である MAC 法に適用している⁷⁾。本報では平岡の手法に従って解析を行う。

2.3 代数化表現による PSUED VISCOSITY の定式化
 簡単のため一次元空間において代数化表現による PSUED VISCOSITY の導入の手法の概要について説明する。

一次元の場合、ストレスは $\overline{u_1 u_1}$ のみである。 $\overline{u_1 u_1}$ の時間微分項を無視すると式(3)は次のように表すことができる。

$$C_{11} - (D_{11D} + D_{11C}) = P_{11} + \Phi_{11} - \frac{2}{3} \epsilon \quad (18)$$

ここで、 D_{11D} は拡散項の直交成分、 D_{11C} はクロス成分である^{APP.2)}。ここでは移流項が一次風上差分の場合と QUICK スキームの場合について説明する。最初に一次風上差分の場合について述べる。図1に示した一次元空間での(18)式の離散式において $\overline{u_1 u_1}$ を代数的に表現するための変形を施す。拡散項の直交成分 D_{11D} 、移流項 C_{11} および再分配項 Φ_{11} 中の Rotta 項 $\Phi_{11(i)}$ とその wall reflection 項 $\Phi_{11(i)}^w$ を図1に示す一次元空間で離散化し⁽⁸⁾、計算中心点 i に関する $\overline{u_1 u_1}$ を含む項を左辺にまとめると次式となる。なお、生産項は分解せずこれに含まれる $\overline{u_1 u_1}$ は右辺に残す。

$$(A_i^c + A_i^p + A_\Phi) \overline{u_1 u_1} = P_{11} - \epsilon_{11} + D_{11C} + \Phi_{11}^* + (A_{i-1}^c + A_{i-1}^p) \cdot \overline{u_1 u_1}_{i-1} + ((A_{i+1}^c + A_{i+1}^p) \cdot \overline{u_1 u_1}_{i+1} \quad (19)$$

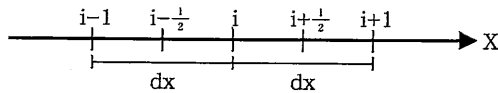


図1 諸量の定義点 (1次元)

ここで二行目の $A_{i-1}^c \sim A_{i+1}^p$ は $\overline{u_1 u_1}$ 方程式の C_{11} および D_{11D} の隣接点 (図1の $i+1, i-1$) における $\overline{u_1 u_1}$ の係数であり、一行目の A_i^c, A_i^p は APP. 3 で示すようにそれぞれの和である。また A_Φ は Φ_{11} 中の計算中心のストレス $\overline{u_1 u_1}$ に掛かる係数であり、 Φ_{11}^* を次のように定義している^{APP.4)}。

$$\Phi_{11}^* = \Phi_{11} + A_\Phi \cdot \overline{u_1 u_1} \quad (20)$$

ここでは一次風上差分を仮定しているので APP. 3 で説明するように隣接点の $\overline{u_1 u_1}$ に掛かる係数は正となり、また拡散項直交成分もその定義より、正の拡散係数をもつので上記係数 ($A_{i-1}^c \sim A_{i+1}^p$ および A_i^c, A_i^p) はすべて正であり、また APP. 4 で示すように A_Φ も正である。したがって、(19)式は APP. 1 に示した Patankar の安定条件⁹⁾を満たす。それゆえ数値解析上安定となることが期待される。なお、拡散項クロス成分 D_{11D} はその物理的意味においては拡散項であるが、隣接点の係数がかならずしも正とはならないので、数値解析上では生成項 (Source Term; 生産項と消散項の和) の一部であると見なして計算を行う^{APP.5)}。

(19)式の両辺を $(A_i^c + A_i^p + A_\Phi)$ で除すると求めるべき $\overline{u_1 u_1}$ が得られる。

$$\overline{u_1 u_1} = \frac{1}{A_i^c + A_i^p + A_\Phi} \times (P_{11} + \Phi_{11}^* - \epsilon_{11} + D_{11C} + (A_{i-1}^c + A_{i-1}^p) \cdot \overline{u_1 u_1}_{i-1} + (A_{i+1}^c + A_{i+1}^p) \cdot \overline{u_1 u_1}_{i+1}) \quad (21)$$

(21)式において PSUED VISCOSITY ν_e が定義される。同式において P_{11} は式(9)に示すとおり $-\overline{u_1 u_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_1}$ (を含んでおり、また Φ_{11}^* も式(13)に示すように係数 $-C_2$ を介して P_{11} を含んでいるので PSUED VISCOSITY ν_e は次式で表現される。

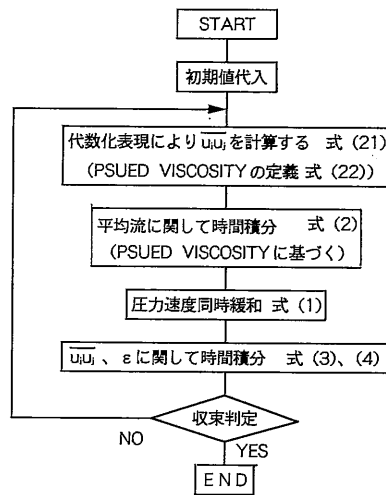


図2 PSUED VISCOSITY を用いる DSM・MAC 法のフローチャート

$$v_e = \frac{(1 - C_2) \overline{u_1 u_{11}}^*}{A_1^c + A_1^p + A_\Phi} \quad (22)$$

ただし、ここで式(22)中の $\overline{u_1 u_{11}}$ としては時間積分における前時点の値 $\overline{u_1 u_{11}}^*$ を用いる。これはimplicitの取り扱いを避けるためである。 $C_2 = 0.6$ であるから $1 - C_2 > 0$ 、および $\overline{u_1 u_{11}}^* > 0$ より v_e が常に正であることが確認される。したがって式(16)は拡散型の方程式となる。図2にこの代数的表現を用いたときのフローチャートを示す。

2.4 代数化表現におけるQUICKスキームの取り扱い

2.2で示したように移流項に一次風上差分を用い、拡散項のクロス成分を生成項の一部として取り扱うことによって、Patankarの条件は満たされる。ところが移流項にQUICKスキームを用いた場合かならずしも移流項の離散表現における各係数が正とはならない^{APP.6)}。そこで本研究では、早瀬ら⁹⁾に従い、Patankarの示した安定条件を満たすようQUICKスキームの一部を生成項として取り扱った。すなわち、QUICKスキームによる移流項 $C_{ijQUICK}$ を風上差分による移流項とその他の部分に分解する。

$$C_{ijQUICK} = C_{ijUPWIND} + C_{ijOTHER} \quad (23)$$

ここで $C_{ijOTHER}$ がPatankarの条件を満たさない場合には拡散項のクロス成分と同様、生成項の一部として取り扱う。すなわち、 $C_{ijOTHER}$ の係数が正の場合そのままとし、負の場合には $C_{ijOTHER}$ を生成項に含めて計算する^{APP.5)}。

2.5 GGDHによる負拡散に対する処理

拡散項はGGDHによる近似をおこなっているが、負の拡散係数に対応する不安定により解の収束性が得られない

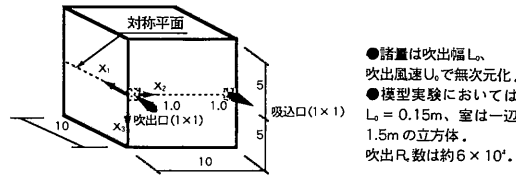


図3 計算対象

表2 境界条件

(流入境界)	$U_{IN} = 1.0$ $k_{IN} = 0.005$ $l_{IN} = 0.05$
	$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k$ for $i = j$, $\overline{u_i u_j} = 0.0$ for $i \neq j$
(流出境界)	$U_{OUT} = -1.0$ $\overline{u_i u_j}$, ϵ : フリースリップ
(壁面境界)	壁面上での τ_w は①式、壁面速度勾配は②式、 $\overline{u_i u_j}$ 方程式中の壁面第一セルの ϵ_{ij} は③式の ϵ ($\bar{\epsilon}$)を用いる。 ϵ 方程式中の壁面第一セルの ϵ (ϵ_1)は④式で与える。
	$\frac{U_i}{(\tau_w/\rho)(C_\mu^2 k)^{1/2}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{E \cdot (h_i/2) \cdot (C_\mu^2 k)^{1/2}}{\nu} \right]$ ①
	$\left\{ (\nu + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right\}_{WALL} = \tau_w/\rho$ ②
	$\bar{\epsilon} = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa (h_i/2)} \ln \left[\frac{E \cdot (h_i/2) \cdot (C_\mu^2 k)^{1/2}}{\nu} \right]$ ③
	$\epsilon_1 = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa (h_i/2)}$ ④
	ノルマルストレスはフリースリップ。
	$\kappa = 0.4$, $C_\mu = 0.09$, $E = 9.0$, $\nu = 1/Re = 1.5 \times 10^{-5}$, $u_b = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$

表3 計算条件

計算は x_3 方向の対称性より、 x_3 方向の半分のみを計算対象とした。メッシュ分割は $19(x_1) \times 30(x_2) \times 14(x_3)$ 。最小メッシュ幅は0.1、最大メッシュ幅は1.0。 U_1 , $\overline{u_i u_j}$, ϵ の移流項はQUICK。ただし壁面より近傍第三メッシュまで^{a2)}及び吹出・吸込口近傍は風上差分。

い場合がある。本研究では、平岡の手法に従い、拡散係数に対応するシアストレスに適切な重み係数をかけ、拡散項全体で負拡散が生じないようにした^{10)APP.7)}。

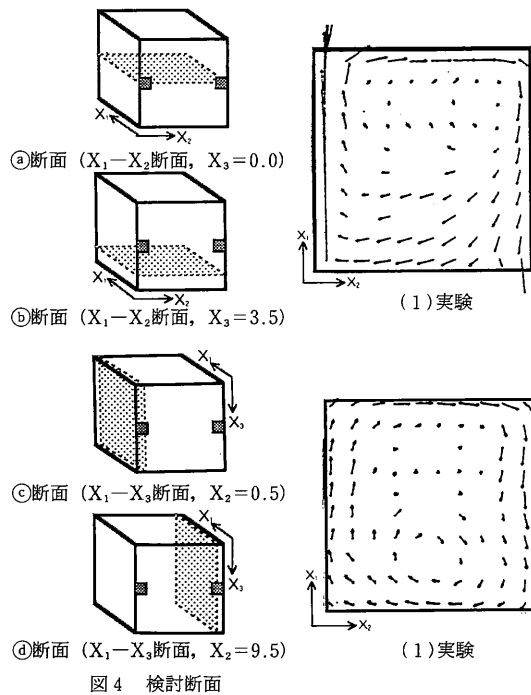


図4 検討断面

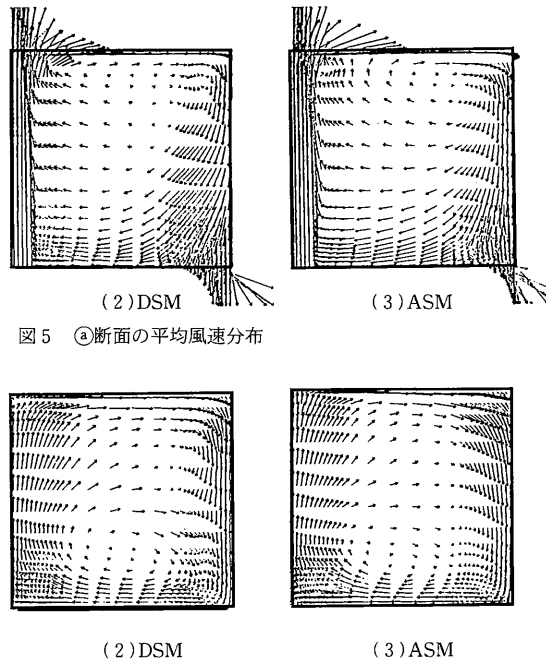


図5 a)断面の平均風速分布

図6 b)断面の平均風速分布

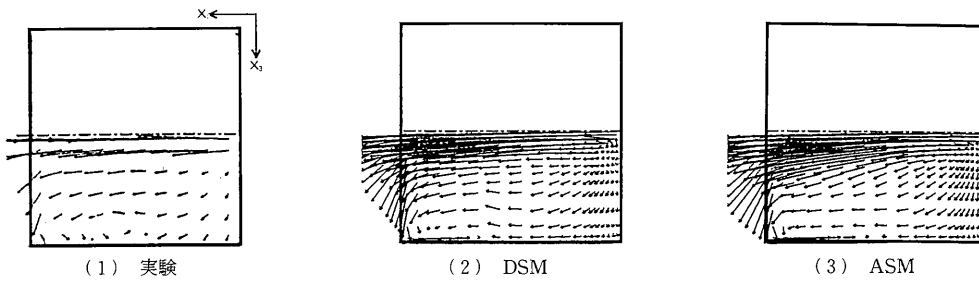


図7 ㉔断面の平均風速分布

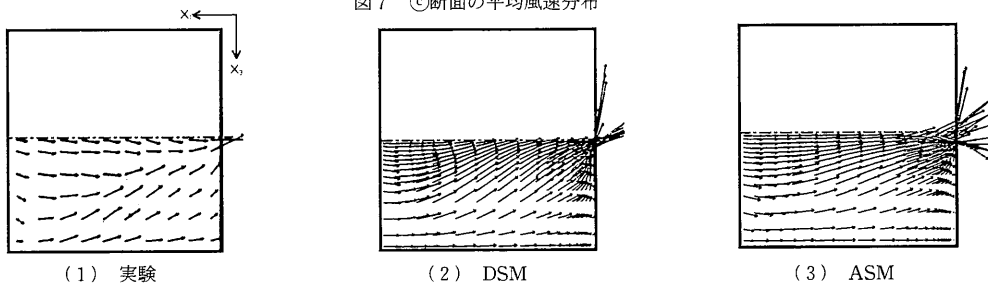


図8 ㉔断面の平均風速分布

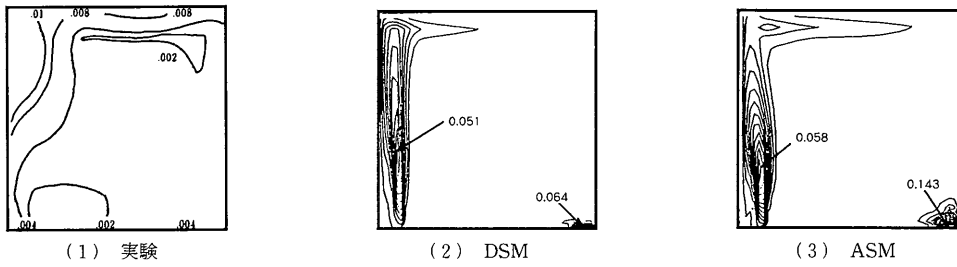


図9 ㉔断面のkの分布

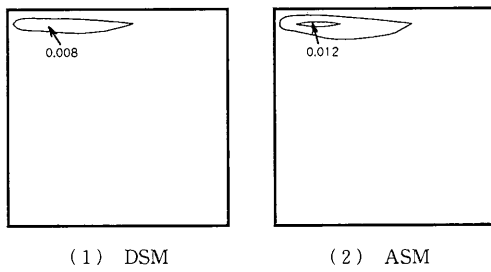


図10 ㉔断面のkの分布

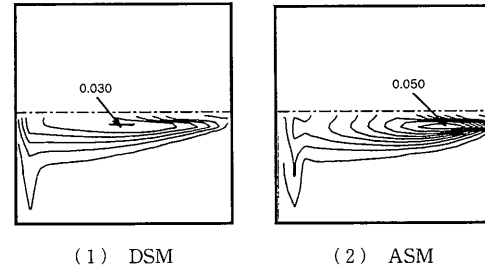


図11 ㉔断面のkの分布

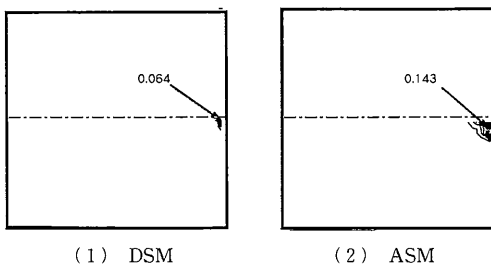


図12 ㉔断面のkの分布

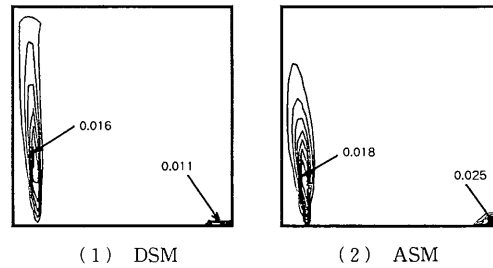
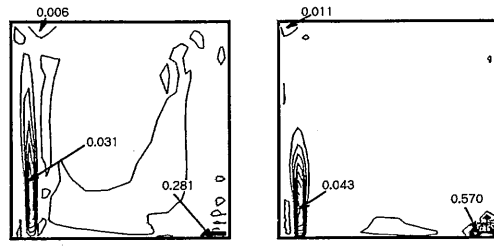
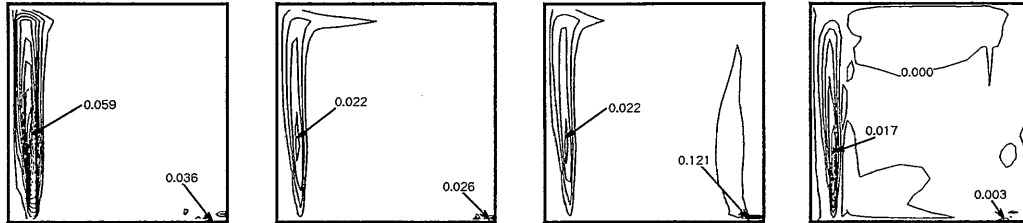


図13 ㉔断面のεの分布

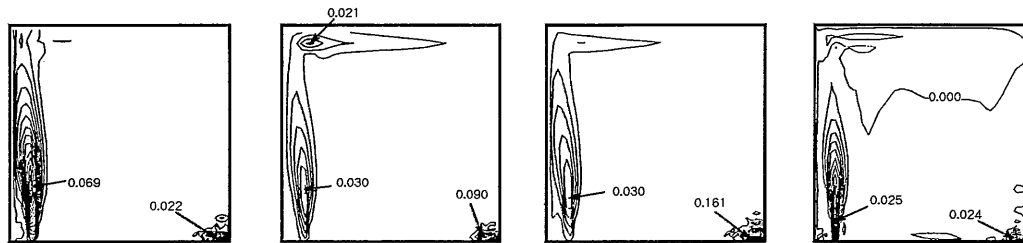


(1) DSM (2) ASM

図14 (a)断面の P_k の分布

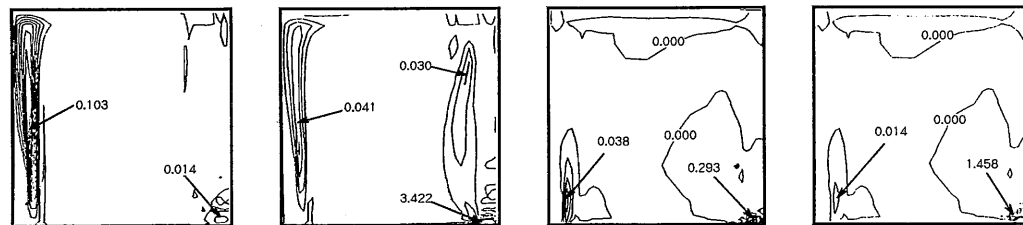


(a) $\overline{u_1 u_1}$ (b) $\overline{u_2 u_2}$ (c) $\overline{u_3 u_3}$ (d) $\overline{u_1 u_2}$
(1) DSM



(a) $\overline{u_1 u_1}$ (b) $\overline{u_2 u_2}$ (c) $\overline{u_3 u_3}$ (d) $\overline{u_1 u_2}$
(2) ASM

図15 (a)断面の $\overline{u_i u_j}$ の分布



(a) $\overline{u_1 u_1}$ 成分 (b) $\overline{u_3 u_3}$ 成分 (a) $\overline{u_1 u_1}$ 成分 (b) $\overline{u_3 u_3}$ 成分
(1) DSM (2) ASM

図16 (a)断面の $u_{ij} - D_{ij}$ の分布

3. 計 算 条 件

計算対象は図3に示す吹出口・吸込口を持つ立方体。境界条件を表2に、計算条件を表3に示した。

4. 結 果 と 考 察

得られた結果については、図4に示す(a)~(d)の4断面における諸量に関して検討した。

4.1 平均風速ベクトル

各断面(図5, 6, 7, 8)ともにDSMの結果は、噴流衝突部のごく小さな差異を除きASMの結果と同じ性状を示し、また実験結果との対応もきわめてよい。

4.2 k

図9(a)断面でのDSMとASMの比較から、DSMの分布は、ASMに比べ、全体に値を低く見積もる傾向を示す。特に吸込口近傍でのkの大きなピーク値がなくなり、実験結果に近づく傾向を示す。DSMが小さめのkを予測す

る傾向はほかの断面 (図10, 図11, 図12) でも確認できる。なお, DSMは吹出口対向壁面でのkの値も小さく見積もっている²³⁾。

4.3 ε (図13)

DSMではASMより低い ε のピークを見積もっている。

4.4 P_k (図14)

kと同様, DSMはやはりASMより低い値を示す。これは4.5で述べるように $\overline{u_i u_j}$ のレベルがDSMではASMに比べて小さく評価されるためである。

4.5 $\overline{u_i u_j}$ (図15)

$\overline{u_i u_j}$ の分布についても, DSMとASMはほぼ同様な傾向を示すが, ほかの物理量の場合と同じように, 全体的にDSMは, ASMより低い値をとる。ASMに比べストレスを低く見積もる理由に関しては以下の点が考えられる。ASMとDSMとの差異は, 移流・拡散項の差異のみであり分布性状の差異は, この移流・拡散項の差異に起因している。 $\overline{u_i u_j}$ がピークを示す領域(これは P_{ij} がピークを示す領域, すなわち, 速度ひずみの大きな箇所に対応)で, DSMはASMに比べ移流拡散の効果を大きく評価し, 流れ場全体として $\overline{u_i u_j}$ はゆるやかな分布性状をとる(4.6参照)。一方ASMは, この鋭いピークによりさらに生産項が過大に評価され, k, ε , $\overline{u_i u_j}$ 等の過大評価の原因になっていると思われるが, これらについては, 今後, さらに各項の詳細な検討を含め考察が必要である。

4.6 移流・拡散項の比較 (図16)

移流・拡散項($C_{ij}-D_{ij}$) (ASMの場合, $\overline{u_i u_j}/k \cdot (C_k-D_k)$)とモデル化: C_k, D_k はkの移流項および拡散項)のうち, ここでは $\overline{u_1^2}$ と $\overline{u_2^2}$ に関して示す。DSMとASMでは($C_{ij}-D_{ij}$)の分布性状は大きく異なる。DSMは噴流部等でASMに比べ大きなピークをもっており, $\overline{u_i u_j}$ 成分のピークの抑制に大きな役割を果たしていることが示されている。また $\overline{u_1^2}$ と $\overline{u_2^2}$ ではその分布性状が大きく異なっている。一方, ASMによる移流・拡散項の分布性状は各成分間でほとんど差がない。このことは各ストレスの分布性状に対して少なからぬ影響を及ぼすものと考えられる。

5. 結 論

①風速ベクトルについては, ASM, DSM共に実験結果とよく対応している。②k, $\overline{u_i u_j}$ 等, ほとんど乱流統計量に関し, DSMはASMより低い値を示す。③DSMの小さい乱流統計量の見積もりは, 全般に実験結果によく対応する傾向となっている。④壁面境界条件等に対する計算の安定性の問題を含めて, 今後さらに検討を行う予定である。
(1991年12月9日受理)

APPENDIX

APP. 1) 移流拡散方程式とPatankarの数値安定条件

ここでは簡単のため生成項を省いて考察する。図1に示す一

次元空間において輸送変数 Φ の移流・拡散項($-C+D$)が次のように離散表現されたとする。

$$-C+D=A_{i-1}\Phi_{i-1}+A_{i+1}\Phi_{i+1}-A_i\Phi_i \quad \textcircled{a}$$

Patankarによれば数値計算の安定化のためには, A_{i-1}, A_i, A_{i+1} がすべて正であり, かつ

$$A_i=A_{i-1}+A_{i+1} \quad \textcircled{b}$$

が成り立つことが要請されるとしている。 A_i が正であるということはいわゆる負のフィードバックセンシティブティが働くことと同義である。ここでこの条件を説明するために次のような時間発展型の輸送方程式を考える。

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}=A_{i-1}\Phi_{i-1}+A_{i+1}\Phi_{i+1}-A_i\Phi_i \quad \textcircled{c}$$

式 \textcircled{c} において Φ_i の微小変化(擾乱) $\delta\Phi_i$ が起っても A_i が正であるために, それに対応する次の時点の $\partial(\delta\Phi_i)/\partial t$ は負となり, 擾乱 $\delta\Phi_i$ を抑制する方向に向かう。

次に A_{i-1} と A_{i+1} が正でなければならないという条件について説明する。もしこれらの係数が負であれば, 式 \textcircled{c} において隣接点における物理量の増大がそれに対応した次の時点の $\partial\Phi_i/\partial t$ を負にする, すなわち, 計算中心点の物理量を減少させるという物理的にみて不合理な状態を生み出すのである。

式(15)における拡散項Dを離散表現すれば次のようになる。

$$D=\alpha\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}=\frac{\alpha}{dx^2}\phi_{i+1}+\frac{\alpha}{dx^2}\phi_{i-1}-2\frac{\alpha}{dx^2}\phi_i \quad \textcircled{d}$$

④式中の係数はすべて正であるので, 冒頭④式で述べたPatankarの安定条件は満足されている。したがって, 式(15)における拡散項は数値計算を安定化させる。

次に移流のみの方程式の場合を考える。中心差分で離散表現した移流項 $-C$ は次式のようになる。

$$-C=U\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{U}{2dx}\phi_{i-1}+\frac{U}{2dx}\phi_{i+1} \quad \textcircled{e}$$

⑤式においては Φ_i が存在しない。このことは④式における係数 A_i が零であるのと同じである。それゆえ中心差分による移流のみの方程式では, 負のフィードバックセンシティブティが働かない。すなわち, ⑤式を用いて説明したような擾乱 $\delta\Phi$ を減衰させるような機能がなく数値不安定を生じる原因となる。

また隣接点における係数についても, 二つの項の片方は+の係数, 他方には-の係数が乗じられているので, 両方の係数のいずれか一方が負となるような形式となっている。これらはいずれの場合も数値解の不安定の要因となり, 移流項が数値不安定の原因となることを示している。ただし, 移流項に風上差分等の正の数値粘性の入るスキームを用いるときにはその限りではない。風上差分による移流項の離散表現についてはAPP. 3参照されたい。

APP. 2) 拡散項中の直交成分とクロス成分

ストレス $\overline{u_i u_j}$ の輸送方程式における拡散項の式(7)において添字 $l=m$ のときが直交成分であり, $l \neq m$ のときがクロス成分である。

また, D_{11c} は本文でとりあげた1次元空間においては当然存在しないが, 2次元, 3次元計算の場合を配慮して敢えて残しておいた。

APP. 3) 移流項(風上差分)・拡散項の離散表現と係数の正値性

移流項の風上差分(一次)における離散表現は次のようになる。

$$-C_{11}=A_{i-1}^f\overline{u_1 u_{1i-1}}+A_{i+1}^f\overline{u_1 u_{1i+1}} \quad \textcircled{f}$$

$$A_{i-1}^f=\text{Max}\left(\frac{U}{dx}, 0\right) \geq 0 \quad \textcircled{g}$$

$$A_{f_{i+1}} = \text{Max} \left(-\frac{U}{dx}, 0 \right) \geq 0 \tag{h}$$

$$A_f^i = A_{f_{i-1}} + A_{f_{i+1}} \geq 0 \tag{i}$$

ここでMax (a, b) は a, b のうち大きいほうを選ぶことを意味する記号である。式⑧~⑩により、係数 $A_{f_{i-1}} \sim A_{f_{i+1}}$ は移流速度 U が零以外のときには、常に正であり、Patankar の安定条件と負のフィードバックセンシビリティを満たす。移流速度 U が零の場合でも、APP. 1) で取り上げたような移流のみの方程式のときには、擾乱を抑制する機能がなくかわりに発生させる機能もない。したがって零の場合も安定性の観点から容認される。

また、本文で取り上げた拡散項の直交成分の離散表現は次のように表わされる。

$$D_{11D} = A_{P_{i-1}}^P \overline{u_1 u_{1i-1}} + A_{P_{i+1}}^P \overline{u_1 u_{1i+1}} - A_{P_i}^P \overline{u_1 u_{1i}} \tag{j}$$

$$A_{P_{i-1}}^P = C_s \left(\frac{k}{\epsilon} \right)_{i-1/2} \frac{\overline{u_1 u_{1i-1/2}}}{dx^2} > 0 \tag{k}$$

$$A_{P_{i+1}}^P = C_s \left(\frac{k}{\epsilon} \right)_{i+1/2} \frac{\overline{u_1 u_{1i+1/2}}}{dx^2} > 0 \tag{l}$$

$$A_P^i = A_{P_{i-1}}^P + A_{P_{i+1}}^P > 0 \tag{m}$$

スカラー量 k, ϵ , ノルマルストレス $u_1 u_1$ は常に正であるので式①~④より係数 $A_{P_{i-1}}^P \sim A_{P_{i+1}}^P$ は正である。

APP. 4) 再分配項の離散表現と A_Φ の正値性

式(12), (13)および(14)を利用して、(20)式における Φ_{i1}^* と A_Φ を書き表わす。一次元の場合、式(12)~(14)は

$$\Phi_{11(1)} = -C_1 \left(\frac{\epsilon}{k} \right) \overline{(u_1 u_{1i} - \frac{2}{3} k)} \tag{n}$$

$$\Phi_{11(2)} = -C_2 (P_{11} - \frac{2}{3} P_k) \tag{o}$$

$$\Phi_{11(3)}^w = -C_1' \left(\frac{\epsilon}{k} \right) \overline{u_1 u_{1i}} \cdot f(x) \tag{p}$$

ここで $f(x)$ は wall reflection 項に関する壁関数である。

$$f(x) = \sum_{C_2 \epsilon x} \frac{k^{3/2}}{C_2 \epsilon x} \tag{q}$$

ここで x は壁面からの距離である。①~④をたし合わせて Φ_{11} は次のよう表現される。

$$\begin{aligned} \Phi_{11} = & -C_2 P_{11} + \frac{2}{3} C_2 P_k + \frac{2}{3} C_1 \epsilon \\ & - (C_1 \left(\frac{\epsilon}{k} \right) + C_1' \left(\frac{\epsilon}{k} \right) f(x)) \overline{u_1 u_{1i}} \end{aligned} \tag{r}$$

したがって、

$$\Phi_{i1}^* = -C_2 P_{11} + \frac{2}{3} C_2 P_k + \frac{2}{3} C_1 \epsilon \tag{s}$$

$$A_\Phi = C_1 \left(\frac{\epsilon}{k} \right) + C_1' \left(\frac{\epsilon}{k} \right) f(x) \tag{t}$$

と表すことができる。ここで C_1, C_1', ϵ および k は正、また壁関数 $f(x)$ は④式より正である。したがって A_Φ は正となる。

APP. 5) 移流・拡散項の一部を生成項に取り込むことの意味

ノルマルストレス等常に正値をとるべき変数の計算において考えてやればわかりやすい。式(19)中の Φ_{i1}^* を式(11)~式(13)および式(20)を用いて書き下しており、 P_{11}, P_k, ϵ についてまとめると式(19)は次のように表現される。

$$\begin{aligned} & (A_f^i + A_P^i + C_1 \left(\frac{\epsilon}{k} \right) + C_1' \left(\frac{\epsilon}{k} \right) \cdot f(x)) \overline{u_1 u_{1i}} \\ & = (1 - C_2) \cdot P_{11} + \frac{2}{3} C_2 \cdot P_k + \frac{2}{3} (C_1 - 1) \cdot \epsilon + D_{11C} \\ & + (A_{f_{i-1}}^i + A_{P_{i-1}}^i) \cdot \overline{u_1 u_{1i-1}} + (A_{f_{i+1}}^i + A_{P_{i+1}}^i) \cdot \overline{u_1 u_{1i+1}} \end{aligned} \tag{u}$$

$\overline{u_1 u_{1i}}$ の正値を保証するための工夫について説明する。まず④式第3行はノルマルストレスが正値を取ることに常正となる。これらの係数が正値であることはすでにAPP. 3で説明した。第2行を正の部分 S_U と負の部分 S_P にわけて④式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} & (A_f^i + A_P^i + C_1 \left(\frac{\epsilon}{k} \right) + C_1' \left(\frac{\epsilon}{k} \right) \cdot f(x) - \frac{1}{u_1 u_{1i}} S_P) \overline{u_1 u_{1i}} \\ & = S_U + (A_{f_{i-1}}^i + A_{P_{i-1}}^i) \cdot \overline{u_1 u_{1i-1}} \\ & + (A_{f_{i+1}}^i + A_{P_{i+1}}^i) \cdot \overline{u_1 u_{1i+1}} \end{aligned} \tag{v}$$

$$\begin{aligned} S_U = & (1 - C_2) \cdot \text{Max}(P_{11}, 0) + \frac{2}{3} C_2 \cdot \text{Max}(P_k, 0) \\ & + \text{Max}(D_{11C}, 0) + \frac{2}{3} (C_1 - 1) \cdot \epsilon \end{aligned} \tag{w}$$

$$\begin{aligned} S_P = & (1 - C_2) \cdot \text{Min}(P_{11}, 0) + \frac{2}{3} C_2 \cdot \text{Min}(P_k, 0) \\ & + \text{Min}(D_{11C}, 0) \end{aligned} \tag{x}$$

ここでMin (a, b) は a, b のうち小さいほうを選ぶことを意味する記号である。ここで、 $S_U > 0, S_P < 0$ であるので、 $\overline{u_1 u_{1i}}$ が常に正の値をとることが満たされる。 D_{11C} は D_{11D} と異なり、常に正の係数を持つとは限らないので、数値計算上では、 P_{11} や P_k と同様に取り扱われている。すなわち、正の係数を持つ隣接点の物理量の項以外は、たとえその物理的意味が移流・拡散項であっても、数値計算上では生成項とみなす。この取り扱いはQUICKスキームにおける移流項の取り扱いについても同様に行う。すなわち、式(23)においてQUICKスキームを風上差分成分とその他の部分に分けたが、この風上差分成分はAPP. 3) で見たとおり常に正の係数 (0 を含めて) 持つので、安定化の観点から移流・拡散成分として計算するが、その他の部分の係数は常に正になるとは限らないので、生成項の一部と見なして整理することにより安定に数値計算を進めることができる。

APP. 6) QUICKスキームの離散表現

たとえば、図1で移流速度 U が正の時、物理量の Φ の一次元 QUICKスキームによる移流項 C は次のようになる。

$$C = -U \cdot (3\Phi_{i+1} + 3\Phi_i - 7\Phi_{i-1} + \Phi_{i-2}) / 8dx \tag{y}$$

これより、中心点 i 以外の係数のうち Φ_{i+1} と Φ_{i-2} に掛かるものが正でないことがわかる。

APP. 7) GGDHによる負拡散の処理法

GGDHによる拡散項を拡散型で表現することができれば、数値解析上安定になる。ここでは平岡の示した手法¹⁰⁾に従い2次元の場合について説明する。スカラー Φ に対するGGDHによる乱流拡散項 D (式(7), (8)) を2次元空間で展開すれば次のように表せる。

$$\begin{aligned} D = & C \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \overline{u_1 u_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + C \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \overline{u_2 u_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ & + 2C \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \overline{u_1 u_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(C \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \overline{u_1 u_1} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(C \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \overline{u_2 u_2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(C \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \overline{u_1 u_2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(C \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \overline{u_1 u_2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned} \tag{z}$$

一方 Φ に対する一般的な2変数2階の偏微分方程式は次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} f(x, y) = & a(x, y) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ & + c(x, y) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$+d(x, y)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+e(x, y)\frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad (2)$$

ここで、①式との対応より、 $a(x, y) > 0$ かつ $b(x, y) > 0$ であるとしておく。すなわち、拡散項の展開式①は、2階偏微分関数の一般形をしていることがわかる。②式が拡散型(数学的には楕円型とも呼ばれる)に変形できるためには任意の実数 α, β に対して次の2次式

$$a(x, y)\alpha^2+b(x, y)\beta^2+c(x, y)\alpha\beta > 0 \quad (3)$$

を満たす必要がある。すなわち、②式が成り立つときには、適当に座標変換してやれば①式は次のような楕円型偏微分方程式に変換できる。

$$f(x', y')=a'(x', y')\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}+b'(x', y')\frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2} \\ +d'(x', y')\frac{\partial\Phi}{\partial x'}+e'(x', y')\frac{\partial\Phi}{\partial y'} \quad (4)$$

ここでプライム(')は座標変換後の数値を表す。③式が満たされない場合、③式の左辺が零のときには、②式は次のような放物型偏微分方程式となる。

$$f(x', y')=a'(x', y')\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} \\ +d'(x', y')\frac{\partial\Phi}{\partial x'}+e'(x', y')\frac{\partial\Phi}{\partial y'} \quad (5)$$

また③式の左辺が負のときには、次のような双曲型偏微分方程式となる。

$$f(x', y')=a'(x', y')\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}-b'(x', y')\frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2} \\ +d'(x', y')\frac{\partial\Phi}{\partial x'}+e'(x', y')\frac{\partial\Phi}{\partial y'} \quad (6)$$

特に後者の場合、⑥式からわかるように空間2階微分項に負の係数が掛かっているのがこれが負拡散の働きをし、数値計算が不安定となる。③式が常に成り立つための条件は次で表される。

$$c^2(x, y)-4a(x, y)\cdot b(x, y) < 0 \quad (7)$$

⑦式の関係は、①式において次の関係を満たすことに相当している。

$$\overline{u_1 u_2^2} < \overline{u_1 u_1} \cdot \overline{u_2 u_2} \quad (8)$$

すなわち、2次元空間でGGDHによる拡散項を拡散型にするための条件は、2つの変数の相関のノルムが、それぞれの自己相関のノルムの相乗平均よりも小さくなければならないというシアストレスの realizability の要請と一致する。そこで⑧式を満たさないときには拡散項中の係数であるシアストレスに次のような重み係数 β を乗じる。

$$\beta = \text{Min} \left(\frac{\sqrt{\overline{u_1 u_1}} \cdot \sqrt{\overline{u_2 u_2}}}{\sqrt{\overline{u_1 u_2^2}}}, 1 \right) \quad (9)$$

これより $\beta \overline{u_1 u_2}$ のノルムは $\sqrt{\overline{u_1 u_1}} \cdot \sqrt{\overline{u_2 u_2}}$ より大きくなることはなく⑦式は満たされる。したがって①は拡散型に変形することができる。

3次元の場合はより複雑になる。結果だけを示すと拡散型になるためには⑧式が成立する以外に次のような3次対称行列の行列式が正となることが要請される。

$$\begin{vmatrix} \overline{u_1 u_1} & \overline{u_1 u_2} & \overline{u_1 u_3} \\ \overline{u_1 u_2} & \overline{u_2 u_2} & \overline{u_2 u_3} \\ \overline{u_1 u_3} & \overline{u_2 u_3} & \overline{u_3 u_3} \end{vmatrix} > 0 \quad (10)$$

これは⑧式が他の成分、(2.3), (1.3)成分についても満足されるという条件よりもさらに厳しい制約である。この場合⑧式のようにシアストレスの大小関係について一意的な条件は求められないので、次のように処理した。すなわち、3成分 $\overline{u_1 u_2}, \overline{u_2 u_3}, \overline{u_1 u_3}$ についてそれぞれに⑧式の β に相当する重み係数を算出して乗じた後、数値不安定を起こす可能性の高い箇所、さらに安全率を掛けて計算をすすめた。

注1) $\Phi_{11(2)}$ については、 $\overline{u_1 u_1}$ を含んではいるが生産項 P_{11} に含まれているのでここでは離散化しない。

注2) 当初、文献1)と同じ計算条件で計算を行っていたが、衝突噴流領域近傍で計算不安定を生じたので、壁面より、第三メッシュまで風上差分とした。これは上記の領域及び計算条件下での壁面境界条件としてのgeneralized log lawの適用が原因であると思われる。

注3) ASMではこの部分に数値不安定による平均流の振動が生じているのに対し、DSMでは壁面近傍で風上差分を採用したことも影響していると思われる。

参考文献

- 村上・加藤・近藤：代数応力モデルによる3次元室内等温流れ場の解析，生産研究，1990. 1
- 村上・持田・林：立方体周辺の非等方乱流場の再現に関する $k-\epsilon$ モデル，ASM，LESと風洞実験の比較，生産研究，1991. 1
- Laundr, B.E. and Reece, G.J. and Rodi, W. (1975): Progress in the development of Reynolds-stress turbulent closure. J. Fluid Mech. 68, 537
- Hanjalic, K. and Launder, B.E. (1972): A Reynolds-stress model of turbulence and its application to thin shear flows, J. Fluid Mech. 52, 609
- Gibson, M.M. and Launder, B.E. (1978): Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer, J. Fluid Mech. 86, 491
- Huang P.G. and Leschziner M.A.: Stabilization of recirculating flow computations performed with second moment closures and third order discretization. Proc. 5th Symp. on Turbulent Shear Flows Cornell Univ. pp. 20. 7-20. 12 (1985)
- 平岡久司：応力方程式モデルによる2次元室内気流計算，建築学会近畿支部，H. 3. 7
- パタンカ：コンピュータによる熱移動と流れの数値解析，森北出版 (1980)
- 早瀬敏幸・J.A.C. Humphry・R. Greif：有限体積法に基づく安定な反復解法が得られるQUICKスキームの再定式化，第4回数値流体力学シンポジウム，H. 2. 12
- 平岡久司：応力方程式モデルによる2次元室内気流計算—cross diffusion項の取り扱いに関して—，建築学会大会，H. 3. 9