研究速報
特集 9
UDC 532.527：519.6

対流渦の流出速度境界条件及び圧力境界条件問題について

On Outflow Velocity Boundary Condition and Pressure Boundary Condition of Vortex Convection

戴　　毅*・小林敏雄*
Yi DAI and Toshio KOBAYASHI

1 緒　　言

計算領域の流出境界は本来の物理境界ではなく，数値解を得るために作られた'境界'であり，速度の流出境界条件を与えなければならない．適切な速度の流出境界条件の特徴は上流側に数値擾乱を与えず，安定かつ高精度に計算を行うことができる点にある．このような境界条件を構築するのに，どのような原則に基づくべきであるかについては，明らかでないように思われる．

3次元流れによく適用される原始変数（primitive variable）法を用いて計算を行う場合に，圧力を解く必要がある．通常，連続の式の代わりに圧力のポアソン方程式を解くこととなり，壁境界で，滑りなし速度の境界条件に基づいて運動方程式の壁に垂直な成分を圧力境界条件として用いられる[1]．また，Chebyshev-Collocation法で壁上で連続の式を用いポアソン方程式を解く陽的な解法が提案されている[2]．しかし，流出境界をもつ流れに対してどのような圧力境界条件で，安定に計算を行うことができるかについてはいまだ，はっきりしていない．

本研究は対流に支配される空間発達流の適切な流出境界条件を解明することを目指し，高精度で境界条件を課すことができるPseudospectral Matrix Element（PSME）スペクトル法[3]を用いて，二次元一様流中で流される一つの渦が流出境界を通過するという単純な流れ場の数値シミュレーションをし，その適切な流出境界条件を検討することによって，対流速度境界条件の有効性を示した．圧力境界条件の問題についても数種類の圧力解法による数値実験を行い，境界上で連続の式を満足しない圧力解法と流出境界条件との連結によって発生する誤差が数値計算の安定性に与える影響を明らかにした．

2 非圧縮流の基礎方程式

基礎方程式は粘性非圧縮性流れの満たすNavier-Stokes運動方程式と連続の式である．

*東京大学生産技術研究所　第2部

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=-\nabla p+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})=-\nabla\, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+\frac{1}{Re}\nabla^2\boldsymbol{u}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \quad \text{in } \overline{\Omega}=\Omega+\partial\Omega \tag{2}$$

その境界条件はDirichlet型である場合に，

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{\text{given}} \quad \text{on } \partial\Omega \tag{3}$$

与えられる速度ベクトルにおいて次の全域での質量保存が要求される．

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}_{\text{given}}\,d\Gamma=0 \tag{4}$$

連続の式（2）の代わりに式（1）と（2）による誘導式一圧力ポアソン方程式を用いる．

$$\nabla^2 P=\nabla\cdot\boldsymbol{F} \text{ in } \Omega \tag{5}$$

通常，運動方程式（1）の境界に垂直な成分が圧力境界条件（Neumann B.C）として使われる．

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla p=\boldsymbol{n}\cdot\left(-\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})+\frac{1}{Re}\nabla^2\boldsymbol{u}-\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right) \quad \text{on } \partial\Omega \tag{6}$$

一方，Collocation Pseudo-Spectral法で空間離散化を行う場合，境界で連続の式

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}=-\frac{\partial v_{\text{given}}}{\partial y} \quad \text{on } \partial\Omega \tag{7}$$

を用い境界を含む全域で発散無しを満たす圧力解法を用いることもできる．

3 計算モデルおよび速度境界条件

3.1 計算モデル

計算モデルは一つの渦が一様流により，下流に流される流れ場である．初期速度場中の渦は2次元，非粘性，定常運動方程式と非圧縮性の連続の式を満たす定常渦であり，流れ関数ψを使って以下ように表される．

$$\psi=C\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2Rc^2}\right) \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} u'_0 \\ v'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

ここで，(x_0, y_0)は渦の中心，Cは初期渦の強度，Rcは渦の半径を表している．u'_0とv'_0は渦の速度である．

3.2　速度境界条件

計算領域は流れ方向にはXLの長さ，垂直な方向にはYLの幅を持つ長方形である．流入境界条件と上下境界条件は簡単のためにDirichlet型の境界条件で与える．

$$u=U,\ v=0,\ \text{at } x=0 \qquad (10)$$

$$u=U,\ v=0,\ \text{at } y=0 \qquad (11)$$

$$u=U,\ v=0,\ \text{at } y=YL \qquad (12)$$

速度の流出境界条件は次式に与えられる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+U\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}=0 \qquad (13)$$

この式は一様主流に運ばれる2次元，非粘性，非圧縮性定常渦の流れに対して，運動方程式を厳密に満たしている．また，この式は双曲型の性質を持ち，下流速度の予測式として使える．しかし，今回の数値実験を行う対象である粘性流に対しては，粘性項が零でなく，式(13)は厳密に成り立つことができなくなる．そうではあるが，対流効果が強い場合，境界だけに限り，短い計算時間刻みの間に速度分布が一時固定されるまま，境界外に伝えていくことを表す式(13)は，やはり物理境界値の挙動を本質的に反映できる近似的な境界条件として使えると考えられる，この仮定の正当性を定量的に評価するために以上述べた渦の計算モデルを用いて数値実験を行った．

4　速度流出境界条件に関する数値解析

境界条件の影響を評価するために，渦対流の各ケース（表1）の計算は短域（$XL=8$，$YL=12$）と長域（$XL=14$，$YL=12$）で同時に行った．短域の渦が流出境界を通過する時点に，長域においては，渦が流出境界に遠いので，境界の影響は無視できるほど小さいと見なせる．表1中でReは代表速度Uと代表長さRcによるものであり，UとRcは値1とした．

短域範囲$\hat{\Omega}$を観察領域とする．各瞬間に観察領域$\hat{\Omega}$内の渦度分布の相関係数を次式によって計算する．

$$C_\omega(t)=\frac{\iint_{\hat{\Omega}} \omega_S(x,y,t)\cdot\omega_L(x,y,t)\,dxdy}{\iint_{\hat{\Omega}} \omega^2_L(x,y,t)\,dxdy} \qquad (14)$$

ここで，S，Lはそれぞれ短域と長域の結果であることを意味する．

4.1　速度境界条件の比較

流出境界で以下の二種類の速度境界条件を採用する．

- 対流境界条件-式（13）
- 二階微分零$-\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^2}=0$

本節の計算スキームは前進Euler陽的な時間離散法で，PSMEスペクトル空間離散法と境界を含む全域で連続の式を満たす圧力解放である．計算パラメーターは表1に示す．

図1と2はそれぞれCase 1とCase 2において渦が$\hat{\Omega}$の流出境界を通過し始める際の圧力分布図である．二階微分零の場合に圧力分布が上流側へ広い範囲で変形されているが対流境界条件の場合，圧力分布が変形されずに境界を通過することがわかる．

図3と図4にはそれぞれCase 1とCase 2において，観察領域$\hat{\Omega}$内の$y=0$線上の初期最大圧力差で正規化される各瞬間の最大差｜$\Delta p_{max}/\Delta p_{0max}$｜の時間変動を示す．破線は短域の値，実線は長域の値を示している．対流境界条件を用いた場合，図3に示すように短域と長域の間での差がきわめて小さい．また，初期渦が$x=4$に設定さ

表1　計算条件

Case No.	速度境界条件	渦強度$\dfrac{C}{UR_c}$	Re	時間ステップΔt
Case 1	$\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+U\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}=0$	0.2	500	5×10^{-3}
Case 2	$\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^2}=0$	0.2	500	5×10^{-3}

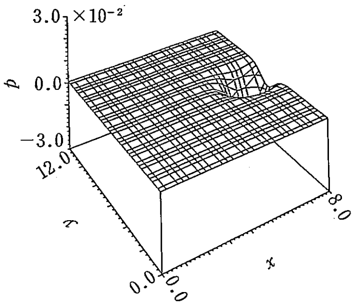


図1　Case 1圧力の瞬時分布（t=3）

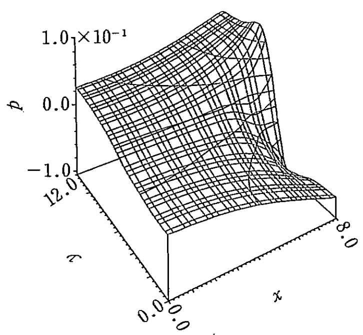


図2　Case 2圧力の瞬時分布（t=3）

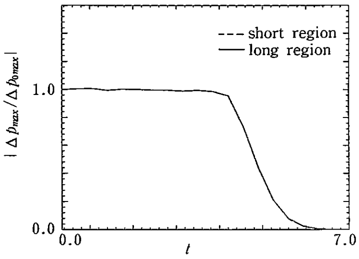


図3　Case 1の $|\varDelta p_{max}/\varDelta p_{0max}|$

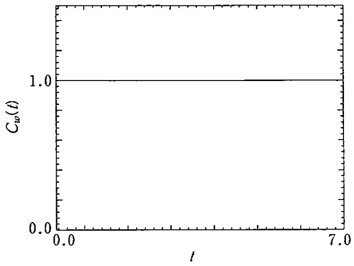
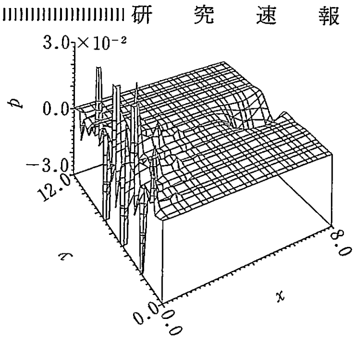


図5　Case 1の渦度相関係数



(a) 標準陽解法の圧力分布

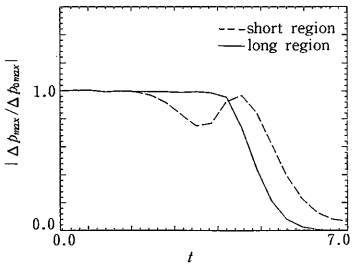


図4　Case 2の $|\varDelta p_{max}/\varDelta p_{0max}|$

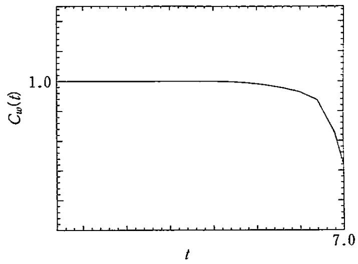
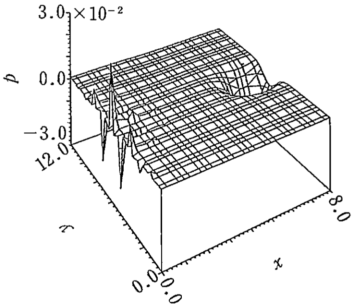


図6　Case 2の渦度相関係数



(b) Time-Splitting法の圧力分布

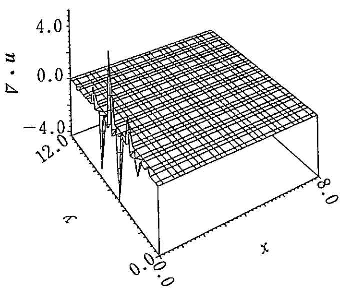
図7　圧力分布（$t=3$）

れたので，$t=4$ の時，渦の中心は流出境界上 $x=8$ に達するが，$0 \leq t \leq 4$ の間で圧力の最大値がほとんど一定であることは本論文の離散化法では数値粘性が充分小さいことを示している．しかし，二階微分零の条件の場合に，図3に示すように渦が流出境界を通過する際の短域の $|\varDelta p_{max}/\varDelta p_{0max}|$ の時間変動値が長域の結果と顕著にずれている．

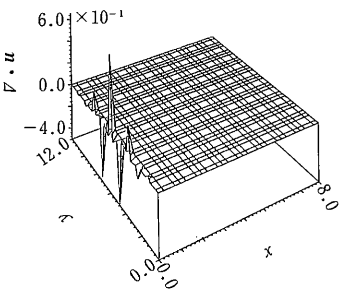
図5と図6には相関係数 $C_\omega(t)$ の変化を示した．対流境界条件の $C_\omega(t)$ は渦が境界を通過するまで高い相関係数を持つことがわかる．二階微分零条件の $C_\omega(t)$ は低い相関係数を示しており，この境界条件が計算結果の精度に大きな影響を与えることがわかる．

5　圧力境界条件に関する数値解析

以上示された結果によって，対流境界条件は二階微分零条件よりはるかに優れることがわかったが，同じ対流境界条件でも圧力境界条件はNeumann条件(6)を用いる標準陽解法やOrszag[1)]の陰的なTime-Splitting法を用いて計算した場合，$t=3$ での瞬時の圧力空間分布の図7からわかるように，入口の付近で数値振動が現われ，安定な計算はできなくなることが見られる．この数値振動が発生する原因は，標準陽解法とTime-splitting法では圧力境界条件として運動方程式の境界垂直成分を採用しているために境界で発散がないことを満たしていないことにある．その時の発散値の空間分布は図8に示されている．陰的なTime-Splitting法ではOrszagの改良圧力境



(a) 標準陽解法の発散値

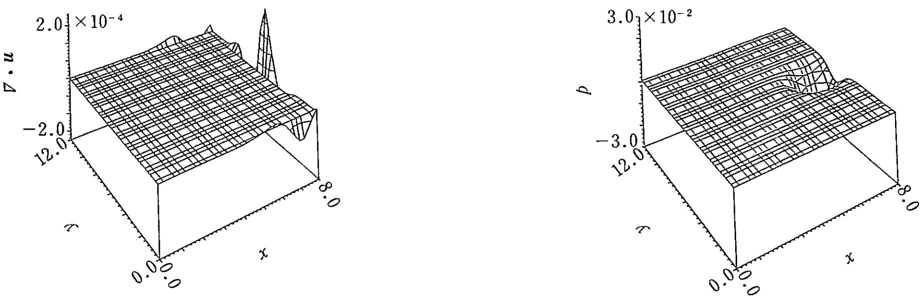


(b) Time-Splitting法の発散値

図8　発散値分布の比較（$t=3$）

界条件を使用した．これは圧力境界条件とする境界に垂直な方向 ($\boldsymbol{n}$) のN-S方程式(6)の中の陰的に取り扱われた粘性項 $\boldsymbol{n}\cdot\nabla^2\boldsymbol{u}^{n+1}$ を次式により近似し，

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla^2\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{n+1})-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}^{n}) \quad (15)$$



(a) 発散値分布　　　　　　　　　　(b) 圧力分布

図9　混合法の発散値と圧力空間分布（t＝3）

$\boldsymbol{n}\cdot\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{n+1})$項を零にしたものである．この改良によって，最大発散値は標準陽解法の場合より一桁小さいという結果が見られる．

さらに，圧力境界条件として，入口だけに連続の式を用い，他のサイドでは境界に垂直な方向の*N-S*方程式を用いる混合法による計算結果を図9に示した．入口の数値振動が消え，安定な計算が行われている．

なお，全部の境界で圧力境界条件として連続の式を用いた場合域内の最大発散値は計算機の丸め誤差の大きさと同じ*Order*であることを付記する．

6　結　　　論

高精度のスペクトル法を用いて，非圧縮，非粘性定常初期渦が一様流によって流される数値シミュレーションを試み，対流効果が支配的であるこの二次元粘性流に関して，対流速度境界条件がその物理境界値の瞬時挙動を反映できる流出境界条件であることが確認された．数値実験により得られた主な結果は以下のとおりである．

1．式(13)は非粘性の場合に成り立つ予測式であるが，低粘性（高*Re*数）の場合に，高精度の計算結果が得られた．

2．二階微分零の条件は境界値の瞬時挙動を反映できないため，上流側に擾乱が現われ，瞬時分布は定性的にも定量的にも真の分布と顕著に異なることが示された．

3．流出境界を持つ流れの圧力境界条件に関しては，境界上で，特に入口側で，速度の発散がないことを保証することが計算の安定化にきわめて重要である．

この研究の一部は科学研究費03555035によるものである．　　　　　　　（1991年11月11日受理）

参　考　文　献

1) Steven A. Orszag, M.Israeli and Michel O. Deville, *Journal of Scietific Computing* ,**1** (1), pp. 75-111, 1986.

2) Hwar C. Ku, Thomas. D. Taylor and Richard S. Hirsh, *Computers and Fluids*, **15** pp. 195-214, 1987.

3) Hwar C. Ku, Richard S. Hirsh, Thomas D. Taylor and Allan P. Rosenberg, *Journal of Computational Physics*,**83**, pp. 260-291, 1989.