研 究 速 報
特 集 10
UDC 532.517.4：532.516

LESにおけるSGS渦粘性係数のモデリング

Modeling of subgrid scale eddy viscosity in LES

堀 内 潔*
Kiyosi HORIUTI

1. は じ め に

現在用いられている乱流の数値シミュレーション手法は,大きく,a) 直接シミュレーション(Direct Numerical Simulation,以下DNS),b) Large Eddy Simulation (LES),c) レイノルズ平均モデル(Reynolds Averaged Numerical Simulation,RANS)の3つに分けることができる.DNSは,Kolmogorov microscaleと同程度のスケールまで解像して解く方法,LESは,計算にかかる格子以下のスケールはモデル化し,それ以上のスケールは直接取り扱う方法,RANSは,時間および空間のアンサンブル平均をとったものである.電子計算機の能力の向上とともに,LESは,基礎的な研究から工学上の応用まで幅広く使われるようになってきているが,Smagorinsky[1]によるモデル(Smagorinskyモデル)を用いた本格的な3次元LESは,Deardorff[2]による平行平板間流れの計算に始まる.この流れ場は,平均流の勾配による乱流エネルギーの生成や秩序構造といった剪断乱流のもつ多くの特性を有すると同時に,3次元計算が高精度・高能率にできる重要な場である.近年のGFLOPSを越えるスーパー・コンピュータの登場は,低いレイノルズ数に限られるが,DNSをも可能にした.LESでは,一種の粗視化により格子以下のスケール(Subgrid scale,SGS)の相関をそれ以上のスケール(Grid scale,GS)の変数と関係づけてモデル化しなくてはならないが,DNSの登場は,そのモデルの直接的な検証を可能にした.

2. 基礎方程式とLES乱流モデル

本速報では,非圧縮性流体の運動を考えるので,基礎方程式は,Navier-Stokes,および,連続の方程式である.LESでは,Filtering操作による粗視化により,各点の乱流変動fを格子以上のスケールで変化する変数$\bar{f}$(GS変数),および,それからの変動量f'(SGS変数)に分離する.Filteringとは,$f(x)$にたいし,粗視化変数$\bar{f}(x)$を,Filter関数$G(x)$とのconvolutionにより定義する方法である[3].Filter関数としては,Gaussian filter,Top-hat filter,Cutoff filterの3つが,主に用いられている.GaussianおよびCutoff filterは,通常,一様と考えられる空間方向に適用される.Navier-Stokesおよび式にFilter操作を施すことにより,Filtered Navier-Stokes(1),および,連続の方程式(2),

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i\bar{u}_j)=-\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\frac{1}{R_e}\Delta \bar{u}_i \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}=0 \qquad (2)$$

がえられる.ここに,u_iは,i方向の速度成分,pは圧力を示す.(1)式中のτ_{ij}は,$L_{ij}=\overline{\bar{u}_i\bar{u}_j}-\bar{u}_i\bar{u}_j$, $C_{ij}=\overline{u_i'\bar{u}_j+\bar{u}_iu_j'}$, $R_{ij}=\overline{u_i'u_j'}$の3項から成る.これらは,順に,Leonard項,Cross項,および,SGS Reynolds応力項と呼ばれる.Leonard項は,フィルターを定義すれば直接計算できるので,モデル化なしに厳密に計算できる.Cross項にたいしては,Bardinaモデルが,SGS Reynolds応力項については,1節でふれたSmagorinskyモデル

$$\overline{u_i'u_j'}=2K_G/3\delta_{ij}-\nu_e\bar{e}_{ij} \qquad (3)$$

$$\nu_e=(C_S\Delta)^2\left[\bar{e}_{ij}^2/2\right]^{1/2}$$

$$\bar{e}_{ij}=\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}$$

が提案され,(3)は,全てのLESで用いられてきた.ここに,$K_G=\overline{u_i'u_i'}/2$は,SGS乱流エネルギーである.このモデルは,SGS Reynolds応力項に渦粘性表現を用い,SGSの乱流エネルギー・バランス中,production項とdissipation項とが卓越して平衡状態にあると仮定し,さらに,次元解析から,$\nu_e=C_\nu K_G^{1/2}\Delta$, $\varepsilon=C_\varepsilon K_G^{3/2}/\Delta$とおいて代入することにより得られる.(3)式中のモデル定数C_SはSmagorinsky定数と呼ばれるが,Lilly[4]は,格子がinertial subrangeに入っていると仮定し,次元解析的に(3)がKolmogorovの5/3乗則と適合することを指摘し,Kolmogorov定数を1.5として,C_Sの理論値は約0.2であるとした.Cross項にたいするモデルとして,現在,最も広く用いられているのは,いわゆるScale similarity仮説に基づ

*東京大学生産技術研究所　第1部

いたBardinaモデル

$$C_{ij} \simeq \overline{\overline{u}}_i(\bar{u}_j - \overline{\overline{u}}_j) + (\bar{u}_i - \overline{\overline{u}}_i)\overline{\overline{u}}_j \qquad (4)$$
$$R_{ij} \simeq (\bar{u}_i - \overline{\overline{u}}_i)\cdot(\bar{u}_j - \overline{\overline{u}}_j)$$

である[5].

本速報で扱うチャンネルフローは,平行な平板間に平均圧力勾配をかけて流体を流す場であるが,以下,座標系を,チャンネルの下流方向をx,平板に垂直な方向をy,横断方向をzとする.以下変数は壁面摩擦速度(u_τ;壁面摩擦応力の平方根)とチャンネルの全幅(δ)で正規化し,u_τにもとづくレイノルズ数を$Re_\tau = u_\tau \delta/\nu$,wall unit u_τ/νによるy方向の距離をy_+とする.

3．DNSデータ・ベースを用いたSGS Reynolds応力のモデリング

本節では,チャンネル流のDNSにより生成されたデータ・ベースを用いたLESモデルの直接的検証を行う.ここで用いたDNSは,Spectral法を使用した,打切り誤差をもたない厳密な意味でのDNSである.$Re_\tau = 360$(チャンネル中央部の速度とδによるレイノルズ数は約7000),用いた格子点は128×129×128である.このDNSデータに,フィルターを施すことにより,u_iをGS成分$\bar{u}_i$とSGS成分u_i'に分離し,これらを用いて算出されたR_{ij}の厳密値を,モデルによる値と比較するのが,本節における検証であり,厳密値との忠実度を図るテストである.(C_{ij}の検証についてはHoriuti[6]を参照されたい.)フィルターとしては,x,y方向にはGaussian filterを,y方向にはTop-hat filterを用い,32×65×32のLESデータを生成した.これは,SGSモデルの検証に足る十分な大きさのSGSエネルギーを与える格子点数である.以下の検証は,主に,厳密値とモデル値の相関係数(Correlation Coefficient, $C.C.$),および,両者のx-z平面内での平均値の分布の比較により行う.ここではR_{ij}の各成分のうち,チャンネル流では最も重要な$i=1$,$j=2$成分の検証のみにふれる.以下,R_{ij}の厳密値,Bardinaモデルによるモデル値,Smagorinskyモデルによるモデル値を,おのおの,R_{ij}^E,R_{ij}^B,R_{ij}^Sとする.Horiuti[6]の$C.C.$の分布にみるとうり,R_{12}^EのR_{12}^Sの相関はかなり低く,負値を示す部分もある.したがって,Reynolds応力のレベルでは,Smagorinskyモデルの精度は低い.しかしながら,Dissipationのレベルでの検証,すなわち,Dissipationの厳密値$\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$と,$R_{ij}^S$によるモデル値$R_{ij}^S\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$との$C.C.$は$R_{ij}$の$C.C.$よりかなり改善される.Smagorinskyモデルは,乱流エネルギーの散逸としては,かなり良いモデルとなっていることがわかる.Horiuti[6]には,R_{12}^BとR_{12}^Eの$C.C.$も含めたが,両者の相関はかなり高く,こうしたモデルがかなり有望なことを示唆する.しかし,Bardinaモデルは,必ずしも,乱流エネル

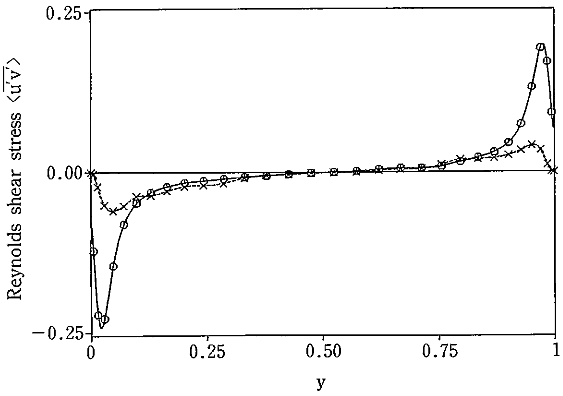

図1　$\langle R_{12}\rangle$のy分布. —○—:(6)で$E=K_G$とした場合のモデル値;—×—:DNSデータ

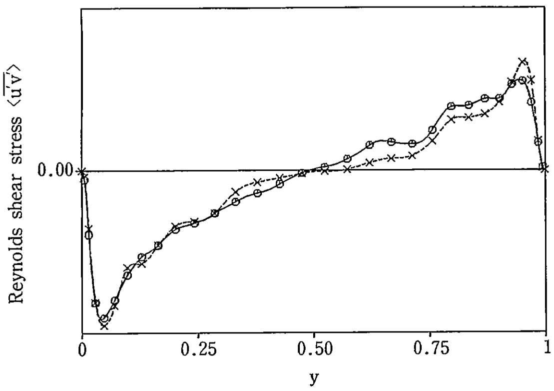

図2　$\langle R_{12}\rangle$のy分布. —○—:(6)で$E=\overline{u_2^- u_2^-}$とした場合のモデル値;—×—:DNSデータ

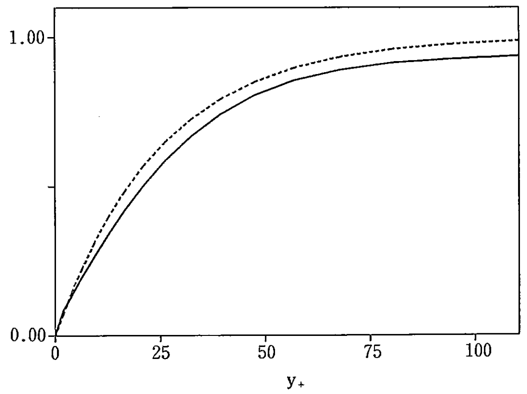

図3　減衰関数の分布. ———:モデル(8);------:Van Driest関数

ギーの散逸として機能せず,実際の計算上は,Smagorinskyモデルを併用する必要がある.ところで,Smagorinskyモデルのチャンネル流への直接的な適用は,不正確な結果を生じる.それは,

a）Smagorinsky定数C_Sの修正

b）壁近傍での減衰関数の導入

の2つを施さないと,渦粘性係数の値が大きくなりすぎるからである[7,8].

a）2節で述べたように,Kolmogorov則に基づいたC_Sの理論的見積りは約0.2である.一様等方性乱流のLESでは,たしかに,この値で実験と良く一致する結果が得られたが,乱流混合層,チャンネル流ではこの値は大きすぎ,おのおの,約0.15,0.1が最適値のようである.このことは,C_Sの流れ場に依存しない普遍性に疑問を呈する.

b）壁で粘着条件を課す場合,壁面上で$\overline{u_i'u_j'}=0$すなわち$\nu_e=0$が満足されなくてはならない.このためには,Δが壁に近づくにつれ急激に0に漸近するか,または,K_Gが壁面上で0にならなくてはならない.しかし,前者は指数関数的な座標の引き延ばしを必要とし,チャンネル中央部で格子間隔が粗になりすぎるため,実用的でない.後者のK_Gについても,壁面上での値を評価してみると,零にならない.このため,通常は,減衰関数f_dをΔに乗じている.最も一般的に用いられているのは,Van Driest関数$((1\text{-}\exp(-y_+/26)))$（Van Driest[9]）である.この関数は,RANSで古くから用いられてきたものではあるが,その理論的根拠は乏しく,関数の選択に任意性が残る.また,壁から一定の距離y_+を離れたx-z平面上では一様な減衰を与え,LESで重要な局所性がなく,壁での漸近挙動も満足しない.a,b）をより普遍的・統一的に取り入れ,相関も高いSGSモデルとして,本速報では,SGS渦粘性係数中のエネルギー・スケールの適切な選択によるモデルを取りあげる.

Horiuti[10]は,RANSのk-εモデル中の渦粘性係数への高次補正項

$$\nu_e=\frac{3}{2}C_\nu\frac{k}{\varepsilon}\left[\frac{2}{3}k-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{C_\nu}\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left\{C_{A1}\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial x_m}+C_{A2}\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial\bar{u}_m}{\partial x_l}\right\}\right] \tag{5}$$

が同係数の効果的な減衰関数として使える可能性を示唆した.(5)式[・]内は,乱流エネルギーの非等方表現に対応するが,レイノルズ平均モデルでの,チャンネル流におけるC_{A1}の最適値はnormal成分$\overline{u_2'^2}$の乱流強度に対応する値[11]に近いことがわかった.したがって,渦粘性係数中のエネルギー・スケールとしてはNormal shear stressが適切であると結論された.

（3）のSGS渦粘性係数ν_eは,

$$\nu_e=C_\nu C_\varepsilon\tau E \tag{6}$$

と書ける.ここに,Eはエネルギー・スケール,$\tau=k/\varepsilon$は,タイム・スケールで,LESでは,通常,$\tau=\Delta C_\varepsilon/K_G^{1/2}$と置換えられる.最初に,$K_G$としてはDNSデータからの厳密値を採用し,$E$の適切な選択を探る.まず,$E=K_G$とした場合の$R_{12}$の$x$-$z$平面内の平均値$\langle R_{12}\rangle$の$y$分布を図1に示した.モデル値はDNSからの厳密値にくらべ壁近くで値が大きすぎる.Van Driest減衰関数がΔに乗ぜられている理由の一つはここにもある.(5)式を用いたR_{12}のR_{12}^Eとの相関が高くなるよう,定数C_ν,C_{A1},C_{A2}を最小二乗法を用いて最適化したところ,これらの最適値を用いたEの分布は,SGS normal shear stressに最も近いことがわかった.実際,$\overline{u_2'u_2'}$のDNSからの厳密値をEとして用いた場合の平均値分布が図2である.ここでは,効果的なν_eの減衰が特に新たな減衰関数を導入しなくとも行われ,厳密値とよく一致している.紙面の都合で,図は省くが,DNSデータとの相関もSmagorinskyモデルに比べ,かなり改善されている.したがって,Normal shear stressがより適切なエネルギー・スケールであることが,LESでも確認された.以上は,DNSデータを用いた'A priori'なテストであるが,実際のLES計算に導入するには,Normal shear stressおよびK_GをGS変数で表現しなければならない.K_Gの近似法には2通りがある.1つは,(3)式であり,1つは,Bardinaモデル

$$K_G=\sum_i(\bar{u}_i-\overline{\overline{u}}_i)^2 \tag{7}$$

である.Normal shear stressの近似法には2通りがある.1つは,(5)を直接適用する方法であるが,これには各項の計算と総計3定数の最適化が必要になる.これらの定数の流れ場によらない普遍性は不明であり,LESに用いるには,いたずらに煩雑である.さらに,この展開は特に$y_+<5$の領域で負の渦粘性係数を与える場合もあるが,経験的あるいは任意性の残る補正の導入なしに,この負値性を改善できるかは定かでなく,この方法は本研究では採用しないことにした.もう1つは,(7)と同様なBardinaモデルである.これらの数種類の組み合わせをLES計算に導入して調べた結果,下記のモデルが,最も有効に機能することがわかった.

$$\nu_e=(C_S{}^A\Delta)^2[\bar{e}_{ij}{}^2/2]^{1/2}f_d{}^A \tag{8}$$
$$f_d{}^A=3(\bar{u}_2-\overline{\overline{u}}_2)^2/\sum_i(\bar{u}_i-\overline{\overline{u}}_i)^2$$

モデル(8)では,通常のSmagorinskyモデルに,$f_d{}^A$がdamping factorとして掛かる.図3は,$\langle C_S{}^A(f_d{}^A)^{1/2}\rangle$をチャンネル中央での実効的なSmagorinsky定数で正規化した値を,Van Driest関数と合わせて示すが,効果的な減衰がされていることがわかる.さらに,Van Driest関数

では,同じレベルのy_+では,均一に減衰が掛かり,LESには重要な局所性が表現できないが,モデル(8)は表現できる.ところで,Normal shear stressをエネルギー・スケールとして用いることによって,効果的な減衰関数の役割を果たせることは,RANSでは,Launder et al.[12]でも指摘されている.そこでは,Second order closureを用いているが,Normal shear stressの近似の精度がまだ低いため,減衰関数としての精度も低い.また,Yakhot et al.[13]は,(8)式$f_d{}^A$と同様なfactorの導入をしているが,理論的な根拠は示されておらず,また,本報告で用いたSGS乱流エネルギーの比のかわりに,GS乱流エネルギーの比としているため,格子の解像度を上げていったとき,$f_d{}^A$の影響が消えない欠点がある.本研究では,LESの利点,すなわち,ある程度の精度の情報をもったGS成分がすでに解かれていることを活用して,SGSへの一種の外挿を行った.ところで,一様等方性乱流,乱流混合層,チャンネル流の3つの流れ場を比較すると,GSの乱流強度の非等方性は,この順に強くなり,最適化されたC_Sもこの順で小さくなっている.したがって,C_Sの大きさの相違は,乱流強度の非等方性を反映したものと考えられ,モデル(8)は,この効果を取り入れることができる.ところで,モデル(8)の定数$C_S{}^A$の最適値は約0.17となり,これはLilly[4]の理論値0.2よりは小さいが,Smagorinskyモデルの0.1よりは大きめであり,より高い普遍性をもっていることが期待できる.Mason et al.[14]は,チャンネル流でも,格子の解像度を上げていくとC_Sの最適値は0.2に近づいていくと報告しているが,(8)は,この報告も裏付けることができる.ただし,(8)は,壁での漸近挙動は満足しない.Van Driest関数も同様に満足しないが,LESでは,このことは結果にあまり悪い影響は与えないようであるが,モデル(8)のより複雑な流れ場への適用は今後の課題として残る.本モデルの詳細については,Horiuti[15]を参照されたい.

こうした定数の普遍性が高く任意性の残る減衰関数を必要としないモデルとしては,Dynamic scaleモデルがある.(Germano et al.[16])これは,通常のフィルターよりもおおきな特性長さをもったフィルターとの併用により,GSからSGSへの精度の高い外挿を行ったものである.このモデルは,壁での漸近挙動を満たし,さらに,通常のSmagorinskyモデルでは扱えない乱流への遷移過程(Horiuti[17],Piomelli et al. [18])も再現できると報告されている.また,molecular viscosityの効果を取り入れたモデルとしてYakhot et al.[19]を挙げておく.

本研究の一部は,文部省科学研究費重点領域研究№01613002,および,総合研究(A)№02302043,ならびに,東京大学・日立製作所共同研究によっている.ここに記して謝意を表する.　　(1991年11月6日受理)

参 考 文 献

1) Smagorinsky, J. (1963) Mon. Weather Rev. 91, 99.
2) Deardorff (1970) J. Fluid Mech. 41, 453.
3) Leonard, A. (1974) Adv. Geophys. 18A, 237.
4) Lilly, D.K. (1966) NCAR Manuscript 123.
5) Bardina, J. J.H. Ferziger and W.C. Reynolds (1980) AIAA Paper 80-1357.
6) Horiuti, K. (1989b) Phys. Fluids A1, 462.
7) Moin P. and J. Kim (1982) J. Fluid Mech. 118, 341.
8) Horiuti, K. (1987) J. Comp. Phys. 71, 343.
9) Van Driest, E.R. (1956) J. Aeronaut. Sci. 23, 1007
10) Horiuti, K. (1990a) Phys. Fluids A2, 1708.
11) 西島勝一(1991) 生産研究,43巻1号,20.
12) Launder, B.E. and D.P. Tselepidakis (1990) Near-Wall Turbulence, Hemisphere Publ. Co., 818.
13) Yakhot, A., S.A. Orszag, V. Yakhot and M. Israel (1989) J. Sci. Comp. 4, 139.
14) Mason, P.J. and N.S. Callen (1986) J. Fluid Mech. 162, 439.
15) Horiuti, K. (1990b) Proc. Int. Workshop "Large Eddy Simulation ...Where Do We Stand?", St. Petersburg, Florida, also submitted to Phys. Fluids A.
16) Germano, M., U. Piomelli, P. Moin and W.H. Cabot (1990) Phys. Fluids A3, 1760
17) Horiuti, K. (1986) J. Phys. Soc. Japan 55, 1528.
18) Piomelli, U., T.A. Zang, C.G. Speziale and M.Y. Hussaini (1990) Phys. Fluids A2, 257.
19) Yakhot, V. and S.A. Orszag (1986) J. Sci. Comput. 1, 3.