研究速報
特集 12
UDC 532.542:519.6

# 一般座標系による円錐ディフューザの数値計算

Numerical Simulation of a Conical Diffuser Using by the General Curvilinear Coordinate System

李 蓮源*・小林 敏雄*
Yeon Won LEE and Toshio KOBAYASHI

## 1 はじめに

ディフューザは運動エネルギを圧力エネルギへ変換する装置である．ディフューザの重要性は流体機械でよく知られており，古くから実験的，理論的研究が行われてきた．しかし，多くの実験的および理論的な研究にもかかわらず，ディフューザ内部のエネルギ伝達および散逸の詳細な機構に対しての理解は，まだ不完全である[1]．他方，数値計算的な研究は最初は積分方程式とモデル化された微分方程式を利用したが，そのような解析は下流の流れが上流におよぼす影響を無視しているのでディフューザ流れに対する複雑な圧力勾配の影響を適切に説明できない．最近，低Reynolds数$k$-$\varepsilon$による小林ら[2]，およびLaiら[1]の計算があるが，壁近傍での乱流場の非等方性および逆圧力勾配の存在による局所平衡の崩れのため根本的な改善は見られない．Bradshawの分類によると，複雑乱流はextra strain rateが存在して乱流場に重要な影響を及ぼすので，多くの乱流モデルの適用性を無力化する[3]．したがって，ディフューザ流れは乱流の数値計算の重要な研究対象の一つである．

本研究の目的はカーテシアン速度成分を用いたノン・スタガード格子系の一般座標系での手法の開発と標準$k$-$\varepsilon$モデルによるディフューザ計算の適応性を検討することである．このために入口で十分発達した流れ場を持つ面積比4：1，広がり角度8°の円錐ディフューザのAzadら[4]の実験が選ばれた．この流れ場は入口で強い逆圧力勾配と流線曲率が伴う複雑な流れ場である．

## 2 支配方程式と乱流モデル

定常，非圧縮性の支配方程式をテンソル形式で書くと，次のようになる．

連続の式：

$$(U_j)_{,j}=0 \tag{1}$$

運動方程式 ($U_i$)：

$$(U_jU_i)_{,j}+(\overline{u_iu_j})_{,j}=-\frac{1}{\rho}p_{,i}+(\nu U_{i,j})_{,j}+(\nu U_{j,i})_{,j} \tag{2}$$

乱れのエネルギ ($k$)：

$$(U_jk)_{,j}=[(\nu+\nu_t/\sigma_k)k_{,j}]_{,j}+P_k-\varepsilon \tag{3}$$

乱れの散逸率($\varepsilon$)：

$$(U_j\varepsilon)_{,j}=[(\nu+\nu_t/\sigma_\varepsilon)\ \varepsilon_{,j}]_{,j}+\frac{\varepsilon}{k}\ (C_{\varepsilon 1}P_k-C_{\varepsilon 2}\varepsilon) \tag{4}$$

Reynolds応力 ($-\overline{u_iu_j}$)：

$$-\overline{u_iu_j}=\nu_t(U_{i,j}+U_{j,i})\ ,\quad \nu_t=C_\mu k^2/\varepsilon \tag{5}$$

ただし，$\sigma_k=1.0$，$\sigma_\varepsilon=1.3$，$C_{\varepsilon 1}=1.44$，$C_{\varepsilon 2}=1.92$，$C_\mu=0.09$，$U_i$は平均速度，$u_i$は変動速度，$p$は圧力，$\nu$は動粘性係数，$\rho$は密度，$P_k$ $(=-\overline{u_iu_j}U_{i,j})$は$k$の生成率である．

カーテシアン座標系の方程式を非直交一般曲線座標系への変換は，強い保存系の式として書くため，次のような基本的なmetric identityを使用する．

$$\frac{\partial}{\partial\xi_m}\left(J\frac{\partial\xi_m}{\partial x_j}\right)\equiv 0 \tag{6}$$

ここで，$J$はヤコビアンである；$J=|\partial(\xi,\eta)/\partial(x,y)|$．$J$は円柱座標系のヤコビアン$J_2$[$J_2=|\partial(\xi,\eta)/\partial(x,r)|$]への変化ができ，すなわち，$J=rJ_2$である．上の変換式と偏微分のchain ruleを使って一般式を書くと，次のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial\xi_m}\left(J\frac{\partial\xi_m}{\partial x_j}U_j\phi\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial\xi_m}\left(\Gamma_{eff}J\frac{\partial\xi_m}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_n}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial\xi_n}\right)+J\cdot S \tag{7}$$

ここで，$S$は生成項，$\Gamma_{eff}$は有効粘性係数と呼ばれるもので詳細については参考文献5)を参照されたい．

## 3 数値計算

### 3.1 一般座標系および格子系

最近，複雑な流れ場の数値解析においては非直交曲線

*東京大学生産技術研究所 第2部

座標系の有限体積法がよく使われている．これは一般的に従属変数としてカーテシアン成分か反変成分か，また，従属変数の定義点によってノン・スタガード格子かスタガード格子かに区別される．反変成分を従属変数として採用すると，Christoffel記号の付加的な項が出てきて，方程式は弱保存形になる．本計算では，より簡単な構造，また，強保存形になるカーテシアン速度成分の座標系をとる．格子に対してはすべての変数を格子の中心部に定義するノン・スタガード格子系を採択した．振動的な圧力場を逃げるため，格子面のfluxを計算する時，Pericら[6]の特殊な補間法が使われている．これは内在的にスタガード格子の性質を持っている．格子の生成は代数的な方法を採用する．

3.2　数値解法および境界条件

支配方程式の離散化は計算空間での均一格子に対して積分して求める．格子面においての対流・拡散項はハイブリッドスキームによる．反変メトリックテンソルの非直交項は非直交格子に対して正あるいは負になるので非直交拡散項は生成項に入れておく．

線形化された式はSIMPLEアルゴリズムを利用するTDMAの線順法によって計算される．軸対称ディフューザ流れの場合四つの形の境界条件が要る：入口，出口，対称軸，個体壁である．入口での軸方向速度Uと乱流エネルギ$k$については実験データを用いる．$V$は0を，$\varepsilon$は平衡仮定からの推定値 ($\varepsilon=k^{1.5}/L$) を使用する．出口ではNeumann条件が適用される．しかし，出口での全体的な連続性を満たすために質量fluxの補償が行われている．対称軸においてはすべてのnormal fluxと$V$を0にする．壁では速度$U$と乱流エネルギ$k$に対しては壁関数を適用する．$\varepsilon$は局所平衡関係から導かれた式($\varepsilon=C_{\mu}^{0.75}k^{1.5}/\kappa y_p$)を適用する．$\kappa$ (=0.41) はKarman常数であり，$y_p$は壁から最初の格子点までの距離である．計算における緩和係数は0.3-0.6であり，格子数は120×30である．

## 4　結果および考察

図1に計算対象が示されている．直径(D)と平均速度($U_m$) を基準とした$Re$数は$1.15\times10^5$である．

4.1　***k*-ε モデルのinterlinkage and feedback**

複雑乱流に関するStanford会議[7]の結論の一つはせん断流に関する逆圧力勾配の効果はReynolds応力モデルを含む大部分の乱流モデルによってうまく予測できないということである．その理由は$\varepsilon$方程式から$\varepsilon$の値が小さく計算され，せん断応力$-\overline{uv}$が実験よりも大きく計算されるからである．これはBradshaw[4]の結論とも一致する．$\varepsilon$に関しての改善を計るため，$k$-$\varepsilon$モデルのinterlinkage and feedbackの機構に関して考えて見る．図2に

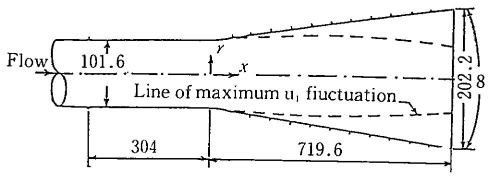



図1　Diffuser geometry (D=2R=101.6[mm]).

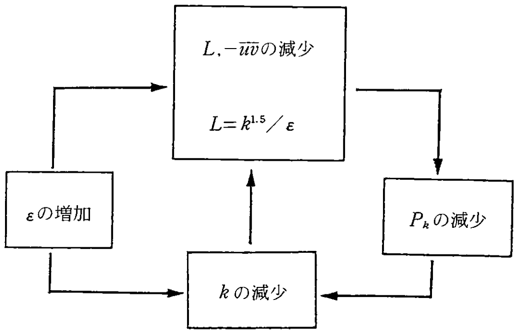



図2　Interlinkage and Feedback of $k$-$\varepsilon$ model.

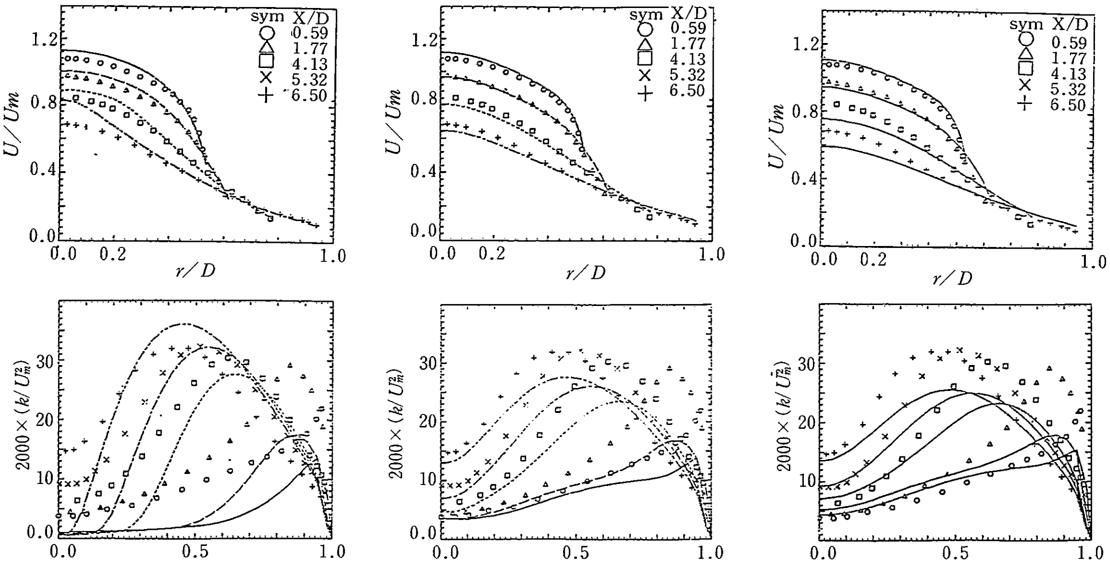
示したように$\varepsilon$の増加は(5)式によって直接に$-\overline{uv}$と長さスケール$L$ ($=k^{1.5}/\varepsilon$) を減少させる．また，$k$を減少させ，$-\overline{uv}$と長さスケール$L$を減少させる．さらに，生成項$P_k$を減少させ，$k$を減少させ，最終的に$-\overline{uv}$を減少させる．このような強いinterlinkage and feedbackのため$\varepsilon$の生成が相対的に少し上がっても，予測には大きく影響を及ぼす．

4.2　**$\varepsilon$の入口境界条件の影響**

入口の境界条件として速度および乱流エネルギ$k$は実験値を与えるから$\varepsilon$のみが問題になる．上記の考察から考えると入口の$\varepsilon$の分布は下流の平均速度場および乱流量の正確な予測に重要な役割を果たすことがわかる．最適な結果を得るためには物理的に妥当な$\varepsilon$の分布を与える必要があると思われる．図3は入口の長さスケール$L$ ($=k^{1.5}/\varepsilon$) による軸方向速度$U$と乱流エネルギ$k$の変化を示したものである．長さスケール$L=0.005$の場合，ディフューザ中心部の$k$は実験より早く減少し，$U$は中心部下流で遅い減少を表している．$L=0.03$の場合，中心部の$k$は実験分布とだいたい合うが，ピーク値は$L=0.02$より下がっている．また，$U$の分布は実験に比べて，早く減少している．下流方向の$k$の実験値と$U$の全体的な予測を考慮してこの計算では$L=0.02$を選択した．

4.3　計算結果

図4はせん断歪速度$\partial U/\partial r$の図である．入口では十分発達した管内流と同じ傾向が見えるが，後半にいくと逆圧力勾配の影響のため，異なる曲率を持つ．すなわち，



(a) $L=0.005$　　(b) $L=0.02$　　(c) $L=0.03$.

図3　Radial distribution of axial velocity and turbulent kinetic energy

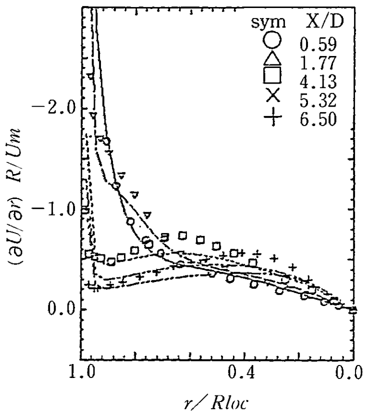


図4　Shear strain rate.

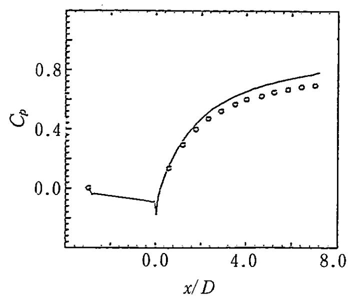


図5　Coefficient of pressure.

中心からピーク値まで増大した後，徐々に下がり，また壁近傍で増加する．こういう傾向は逆圧力勾配がある平板の平均速度場でも同じ傾向が見られる[8]．せん断歪速度$\partial U/\partial r$は運動エネルギの生成を通じる平均場と乱流場のmain linkであるから乱流エネルギ$k$の分布も十分発達した管内流と異なっている．また，この値は入口の壁近傍においては実験より小さく予測されているが，ピーク値の変化の全体的な傾向は全ディフューザ区間でよく予測されている．

図5は圧力係数の分布である．実験結果と計算結果はディフューザの後半部にいくにつれて差が徐々に大きくなっている．これは勾配0の出口の境界条件に起因するものと考えられる．また，図においてディフューザの入口では圧力勾配が急に変わる．この複雑な圧力勾配が実際の複雑な流れ場を生成する．図6は軸対象の唯一のせん断応力$-\overline{uv}$の分布を示している．下流にいくに連れて実験より25％程度大きく予測されている．このような傾向は逆圧力勾配がある平板境界層においても存在することがRodiら[9]によって指摘されている．2次元軸対称の生成項$P_k$は次のように書かれる．

$$P_k=-\overline{uv}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)-(\overline{uu}-\overline{vv})\frac{\partial U}{\partial x}-(\overline{ww}-\overline{vv})\frac{V}{r} \quad (8)$$

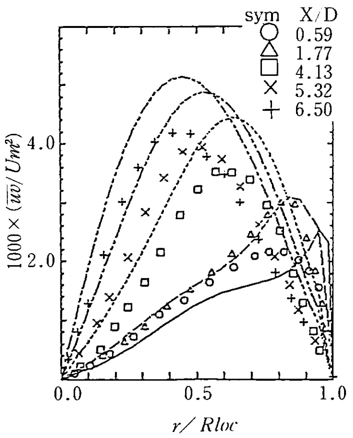



図6　Shear stress.

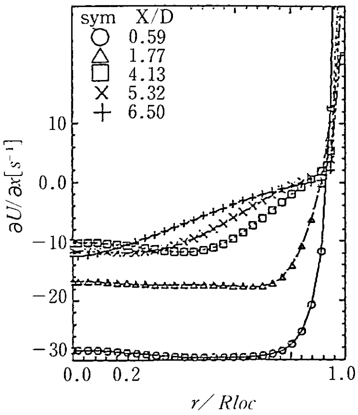



図7　Normal strain rate.

ここで一番重要な項は一般的にせん断応力による生成であるが，ディフューザの場合，$\frac{\partial U}{\partial x}$に関する数値計算の結果を示した図7とSinghら[10]を参考すると，$\overline{uu}\frac{\partial U}{\partial x}$は無視できない項であり，特に，入口のコア領域では$\overline{uu}\frac{\partial U}{\partial x}$がもっとも重要であることがわかる．しかし，大町[11]のバック・ステップ流れの計算でも指摘されたように等方$k$-$\varepsilon$の場合は$\overline{uu}\simeq\overline{vv}\simeq\overline{ww}$になり，垂直応力による生成はほとんど効かない．これが等方k-ε問題点の一つである．Rodiら[9]は乱流エネルギの散逸率$\varepsilon$の生成率を増加させるためにHanjalicら[12]のモデルを利用した．このモデルは乱流エネルギ生成項$P_k$に対するirrotational contribution（垂直応力による生成）に着目して，$\varepsilon$方程式におけるこの部分についてはirrotational partにかける$C_{\varepsilon 1}$(=1.44)のかわりに$C_{\varepsilon 3}$(=4.44)をかけている．また，$(\overline{uu}-\overline{vv})=0.33k$の実験的知識を利用する．しかし，$C_{\varepsilon 3}$の相対的な大きさのため標準$k$-$\varepsilon$モデルより減速流れ場に敏感であるが，座標の回転に対して不変性をもっていないことに注意しなければならない．図7は$\frac{\partial U}{\partial x}$に関する数値計算の結果を示したものである．圧力勾配が急に変わる入口で大きく，下流に向かって徐々に小さくなる．ここで注意することは壁近傍で正値になるのはディフューザ壁に沿った勾配ではなくて，ディフューザの軸に沿った勾配であるからである．他方，不変性をもつ非等方$k$-$\varepsilon$モデルは垂直応力の異方性の予測性が等方$k$-$\varepsilon$モデルより高いので(9)式の垂直応力による生成項が効くようになり，だいぶ改善できる可能性があるが，より重要なことは相対的な$\varepsilon$増加であり，今後の課題である．

## 5　結　　論

カーテシアン速度成分を用いた非直交，ノン・スタガード一般座標系の手法を開発し，円錐ディフューザ流れに対して数値解析を行った．平均速度分布はよく予測できるが乱流量はかならずしも一致しない．乱流エネルギkの分布は定性的に予測できるが，ピーク値は一致していない．特に，圧力勾配が急に変わる入口付近の壁近傍の予測が悪い．$\varepsilon$の入口分布によって速度分布と乱流エネルギ分布は大きく変わるので物理的に妥当な境界条件が必要である．せん断応力$-\overline{uv}$が実験より大きく予測されるのは$\varepsilon$方程式から長さスケールが大きく計算されるのが原因であることが確かめられた．したがって，現在の$\varepsilon$方程式をそのまま使用するかぎりASMおよびRSMモデルを使って計算する場合も注意が必要である．Reynolds応力の異方性を適切に表現できる不変性をもつモデルの適用が必要である．　(1991年11月12日受理)

## 参 考 文 献

1) Y.G. Lai et al, AIAA J., 27, 542 (1989)
2) 小林ら，生産研究，41, 28 (1989)
3) P. Bradshaw, J. Fluids Engng, 146 (1975)
4) R.S. Azad et al, Phys. Fluids, A1 (3), 564 (1989)
5) N.H. Cho et al, ISCFD-Nagoya, 23 (1989)
6) M. Peric et al, Comput. Fluids, 16, 389 (1988)
7) S.J. Kline et al, Proc. 1980-81 AFORS—HTTM Stanford Conf. (1982)
8) D.E. Coles, J. Fluid Mech, 1, 191 (1956)
9) W. Rodi et al, J. Fluids Eng., 108, 174 (1986)
10) D. Singh et al, Proc. Biennial Sympo, 21 (1981)
11) 大町，修論，東京大学 (1990)
12) K. Hanjalic et al, J. Fluids Eng., 102, 34 (1980)