

不安定構造物の動的解析

Dynamic Analysis of Unstable Structures

田 波 徹 行*・半 谷 裕 彦**

Tetsuyuki TANAMI and Yasuhiko HANGAI

1. は じ め に

不安定構造物が外力を受けて最終的な安定形状に移行する過程は、一般逆行列を利用する剛体変位モードの抽出により定式化され、解析されている¹⁾。しかし、ここでは、質量効果を無視する意味で、準静的な移行過程が扱われている。すなわち、剛体変位モードの移行を外力と直接的に関係づけるのではなく、外力仕事が最も効率よく行われるための最適移行条件を利用し、剛体変位モードと外力を間接的に関係づけている。定式化のうえでは、ひずみ速度と変位速度の関係式、つまり、適合条件式のみを利用している。そのため、その定式化をそのままの形で動的解析に拡張することは困難である。

剛体変位モードを含む構造物のモーダル解法による動的応答解析は、たとえば、文献2)に述べられている。不安定構造物の剛性行列の行列式の値はゼロであり、数値解析上、あるいは、理論構成上、しばしば複雑になる。本論文では、文献1)で述べた方法を拡張することにより、不安定構造物の動的解析法を定式化し、簡単な数値解析例を示す。

2. 解 析 法

不安定構造物の運動方程式および変位・ひずみ関係式を次式とする。

$$M\ddot{\mathbf{y}} + C\dot{\mathbf{y}} + K\mathbf{y} = \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

ここに、 \mathbf{M} ：質量行列、 \mathbf{C} ：減衰行列、 \mathbf{K} ：剛性行列、 $\ddot{\mathbf{y}}$ ：加速度ベクトル、 $\dot{\mathbf{y}}$ ：速度ベクトル、 \mathbf{y} ：変位ベクトル、 \mathbf{f} ：外力ベクトル、 \mathbf{A} ：適合行列、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ ：ひずみベクトル、である。なお、 \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} は n 次正方行列、 \mathbf{A} は $n \times m$ 長方形行列である (n ：自由度数、 m ：適合条件数)。

ここでは、剛体変位のみで変位の生じる不安定構造物を対象とする。このとき、式(2)のひずみはゼロとなる。

*太陽工業株式会社

**東京大学生産技術研究所 第5部

つまり、

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (3)$$

よって、本論文の目的は、式(3)を制約条件とする式(1)の解析を行うこととなる。なお、減衰行列としては、次式で与えられるレーリー減衰とする。

$$\mathbf{C} = \beta\mathbf{M} + \gamma\mathbf{K} \quad (4)$$

\mathbf{A} の一般逆行列を \mathbf{A}^{-1} とすると、式(3)の一般解は¹⁾、

$$\mathbf{y} = [\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}]\boldsymbol{\alpha} \\ = \alpha_1\mathbf{h}_1 + \alpha_2\mathbf{h}_2 + \dots + \alpha_p\mathbf{h}_p \quad (5)$$

上式において、 $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_p$ は \mathbf{H} の正規化した独立な列ベクトルで、剛体変位モードを示している。 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ は任意のスカラーで、 p は次式で与えられる。

$$p = n - \text{rank}(\mathbf{A}) \quad (6)$$

ここで、

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_p], \quad \boldsymbol{\alpha}^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^T \quad (7)$$

とおくと、式(5)は

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\boldsymbol{\alpha} \quad (8)$$

上式を式(1)に代入すると、

$$\mathbf{M}\mathbf{H}\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{C}\mathbf{H}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{K}\mathbf{H}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f} \quad (9)$$

ここで、剛体変位モードを剛性行列に掛けても復元力を生じないことを考慮すると(証明は文献3))、

$$\mathbf{K}\mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (10)$$

式(4)を用いると、

$$\mathbf{C}\mathbf{H} = \beta\mathbf{M}\mathbf{H} \quad (11)$$

式(9)の係数行列を \mathbf{G} とする。 \mathbf{G} は $n \times p$ 行列で、

$$\mathbf{G} = [\mathbf{M}\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{M}\mathbf{h}_p] \quad (12)$$

$\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_p$ は独立で、 $\text{rank}(\mathbf{M}) = n$ であるから、 $\text{rank}(\mathbf{G}) = p$ となる。よって \mathbf{G} はフルランクとなり¹⁾、

$$\mathbf{G}^{-1} = (\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T \quad (13)$$

上式を式(9)の両辺に掛けると、 $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{I}_p$ となるから、

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \beta\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{f} \quad (14)$$

ここで、

$$\mathbf{f}_\alpha = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{f} = (\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{f} \quad (15)$$

とおくと、式(14)は p 個の独立な微分方程式

$$\ddot{\alpha}_i + \beta\dot{\alpha}_i = f_{\alpha_i} \quad (i = 1, \dots, p) \quad (16)$$

研究速報 となる。式(16)の解は²⁾、 t を時間を表すパラメータとして、

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \frac{1}{\beta} \int_0^t \{1 - e^{-\beta(t-\tau)}\} f_{\alpha_1} d\tau + \alpha_1(0) \\ &+ \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \dot{\alpha}_1(0) \end{aligned} \quad (17)$$

3. 数値解析法

時刻歴応答の数値解析として前進解法(初期条件をもとに、その次の時点の状態を求め、それをもとに、その次の時点の状態を求めるといふように、前進的に解を求めていく方法)を採用する。 r ステップ($r=0$ が初期状態を表す)から $r+1$ ステップ間を計算する場合には、 r ステップ時点で式(1)、(2)を作成し、それを基に、式(16)を解析すればよい。このとき、式(17)の t をステップ間の増分時間 Δt で置き換えることになる。前進解法を採用する場合には、 r ステップ時点における形状を用いて基礎方程式を作るので、式(17)の $\alpha_1(0)$ はゼロとなる。 $\dot{\alpha}_1(0)$ は、解析するステップ以前の状態を継続するための項で、動的効果を考慮する解析には不可欠の項である。そこで、本論文では、ステップ間の応答を常に $\dot{\alpha}_1(0) = 0$ の初期条件下で考える場合を静的解法と位置づけ、 $\dot{\alpha}_1(0)$ を継続していく動的解法と比較することにする。

4. 静的解法

本論文では1個の剛体変位モードを持つ単純なモデルを用いて、前節までに述べた解法を具体的に示す。

図1は左端をピン支持、右端に荷重(f_x, f_y)を受ける不安定トラスモデルである。 l, m は方向余弦、 E, A, L は、それぞれ部材のヤング率、断面積と長さである。 u, v は x, y 方向の変位を示す。本モデルの場合、次式が式(1)、(2)に対応する。

$$\begin{aligned} m_0 \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{0}{L} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_0 \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix}_r + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -\frac{l^2}{lm} & \frac{lm}{m^2} \end{bmatrix}_r \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_r \\ = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}_r \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{m}{L} \end{bmatrix}_r \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_r = \{0\} \quad (19)$$

ただし、式(1)に含まれる減衰項は、静的解法の以下の説明には本質的に重要でないので省略している。

図2に示す2とおりの初期位置(I)、(II)に対し、具体的に静的解法を示す。なお、式(18)の質量 m_0 の絶対量は、便宜上、 $m_0 = 1$ とする。

(その1) 初期位置(I)の場合： すなわち

$$\begin{aligned} (x, y) &= (1, 0), L=1, l=1, m=0, \\ (f_x, f_y) &= (0, -1) = \text{一定} \end{aligned} \quad (20)$$

このとき、式(18)、(19)は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_0 \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix}_r + EA \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_r \\ = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}_0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 0 \end{bmatrix}_r \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_r = \{0\} \quad (22)$$

式(16)より、剛体変位モードの数 D は

$$p = 2 - \text{rank}([1, 0]) = 1 \quad (23)$$

上式より、唯一の剛体変位モードが存在し、その剛体変位モードは式(5)を利用して次式となる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_r \alpha_r \quad (24)$$

上式は式(5)に対応する式であり、この剛体変位モードを式(21)に代入することにより、復元力の項は消え、式(16)に対応する次式が得られる。

$$\ddot{\alpha}_r = -1 \quad (25)$$

このとき、速度と変位は、それぞれ、

$$\dot{\alpha}_r = -t + C_1 \quad (26)$$

$$\alpha_r = -\frac{1}{2}t^2 + C_1 t + C_2 \quad (27)$$

位置(I)は初期変位と速度がゼロの状態にあることを考慮すると、積分定数 C_1, C_2 は

$$C_1 = C_2 = 0 \quad (28)$$

ゆえに

$$\ddot{\alpha}_r = -1, \quad \dot{\alpha}_r = -t, \quad \alpha_r = -\frac{1}{2}t^2 \quad (29)$$

すなわち、不安定トラスが(I)の位置にあり、鉛直荷重を受ける場合には、この不安定トラスは運動を始めるため安定な状態でない。

(その2) 初期位置(II)の場合： すなわち

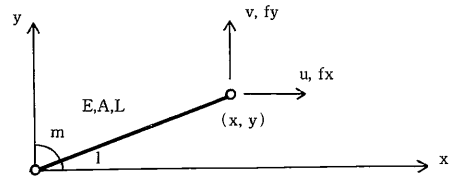


図1 解析モデル

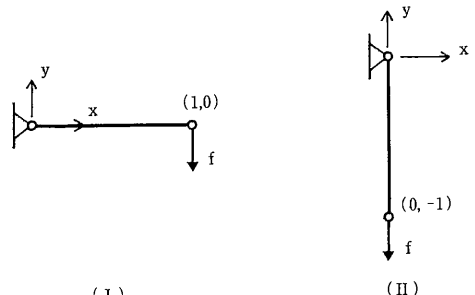


図2 初期位置

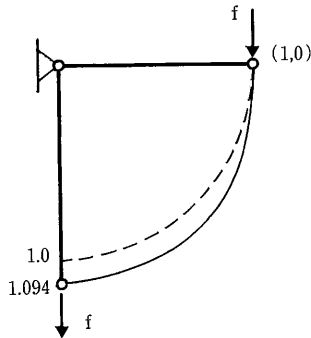


図3 安定状態への移行経路

$(x, y) = (0, -1)$, $L = 1$, $l = 0$, $m = -1$,
 $(f_x, f_y) = (0, -1) = \text{一定}$ (30)
 このとき、剛体モードは

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_r \alpha_r \quad (31)$$

式(31)を式(21)の運動方程式に代入することにより次式を得る。

$$\ddot{\alpha}_r = 0 \quad (32)$$

ところで、(II)の状態はやはり変位と速度がゼロの初期状態であり、式(28)が成立し、その結果式(32)より

$$\ddot{\alpha}_r = \dot{\alpha}_r = \alpha_r = 0 \quad (33)$$

ゆえに(II)の位置では、鉛直荷重に対して不安定トラスは何ら運動を生じないことから安定な状態であることがわかる。

本解析モデルに対し、鉛直荷重を受ける不安定状態(I)から安定状態(II)への移行過程を静的解析した結果を図3に示す。この例では $\Delta t = 0.6$ を採用している。ほぼ30ステップの繰り返し計算により安定状態が得られる。ただし、最終的な部材長さは1.094に変化した。ゆえに各ステップごとに、部材長さの修正(高次項を含む剛体変位モードの採用)も考慮する必要があるといえる¹⁾。

4. 動的解析例

前章のトラスモデルを動的に解析する。この例題の場合、質量マトリクスは単位マトリクスであり、荷重は鉛直下向きの一定荷重を作用させる。また、剛体変位モードに関わる $[H]_r$ は式(19)より

$$[H]_r = \begin{Bmatrix} -m \\ 1 \end{Bmatrix}_r \quad (34)$$

このとき、剛体運動を支配する基礎式(16)に対応する式として次式を得る。

$$\ddot{\alpha}_r + \beta \dot{\alpha}_r = -1_r \quad (35)$$

上式の解は、式(17)より次式となる。

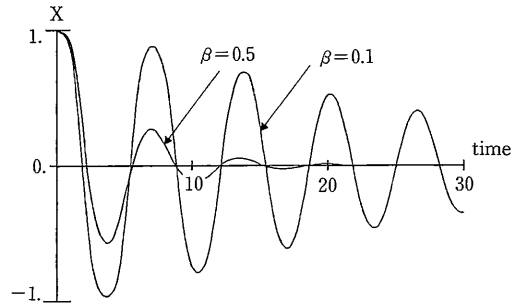


図4 変位応答

$$\alpha_r = \left(\frac{1_r}{\beta^2} + \frac{\dot{\alpha}_{r-1}(0)}{\beta} + \alpha_{r-1}(0) \right) + \left(-\frac{1_r}{\beta^2} - \frac{\dot{\alpha}_{r-1}(0)}{\beta} \right) e^{-\beta t} - \frac{1_r}{\beta} t \quad (36)$$

$$\dot{\alpha}_r = \left(\frac{1_r}{\beta} + \dot{\alpha}_{r-1}(0) \right) e^{-\beta t} - \frac{1_r}{\beta} \quad (37)$$

$$\ddot{\alpha}_r = (-1_r - \beta \dot{\alpha}_{r-1}(0)) e^{-\beta t} \quad (38)$$

ただし、 $\alpha_{r-1}(0)$, $\dot{\alpha}_{r-1}(0)$ はそれぞれ前ステップ($r-1$)の変位と速度に関する既知量である。

$\Delta t = 0.01$, $\beta = 0.1, 0.5$ に対する変位応答を図4に示す。ところで前章の結果から、各時間ステップごとに部材長さの補正の考慮も必要であることがわかる。本計算では、高次項を含む次式で補正しており、最終的な安定時における部材長さに、その誤差は全く生じていない¹⁾。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_r = \frac{1}{L_r} \begin{Bmatrix} -y \\ x \end{Bmatrix}_r \alpha_r - \frac{1}{2L_r^2} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_r \alpha_r^2 \quad (39)$$

5. おわりに

構造物の幾何学的関係から導くことのできる変位・ひずみ関係式で、ひずみゼロを制約条件にもつ運動方程式の解法を一般逆行列を利用して定式化した。

運動方程式に対し、各時間ステップの応答を常に変位と速度がゼロの初期条件で解析する特別な場合を静的解法と呼び、具体的にその解法を説明した。さらに、各時間ステップごとに剛体変位モードの変更をすることにより、一種のモーダル解析に属する動的解法を示した。

(1991年4月25日受理)

参考文献

- 1) 半谷裕彦, 川口健一: 形態解析—一般逆行列とその応用, 培風館, 1991.
- 2) J.S.シェムニスキー(川井, 山田共訳): マトリクス構造解析の基礎理論, 培風館, 1971.
- 3) 田波徹行, 半谷裕彦, 宮崎賢一, 川口健一: 不安定構造の動的安定移行解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 1991.