

ラグランジュ乗数法剛塑性有限要素法に基づく圧延加工の三次元塑性変形解析手法 ——数値圧延機の開発 I——

Numerical Method for Three-Dimensional Plastic Deformation in Rolling Processes Based on the Lagrange Multiplier Rigid-Plastic FEM
——Research on Computational Rolling Mill I——

柳本 潤*・木内 学*
Jun YANAGIMOTO and Manabu KIUCHI

1. 緒 言

薄板材・厚板材や棒材・線材あるいは型材の圧延加工に際しては、被圧延材内部には複雑な三次元塑性変形が生じる。実圧延加工に要するロール形状・パススケジュールその他の加工条件の最適化や、新たな圧延機の開発のためには、この三次元塑性変形の定量的な予測が必須の条件となる。この種の予測を目的として、従来、スラブ法・エネルギー法・弾塑性あるいは剛塑性有限要素法に基づく各種解析手法の開発が行われてきた^{1)~11)}。

薄板材圧延加工については、従来、主にスラブ法に基づく三次元解析技術が用いられてきた。スラブ法に基づく三次元解析手法^{1)~3)}は、ロールの弾性変形をも考慮した上で、実用的な精度のもとでの解析を短い計算時間で行い得るといった優れた特徴を有しており、薄板材の圧延加工技術の高度化をはかる上で欠かせぬものとなっている。しかしながら、板厚方向に変形が均一であるとの前提で解析モデルの構築が行われているため、今後予想される解析精度への要求の厳格化に対する制約も大きいものと考えられる。また、同様の理由により、スラブ法による三次元解析技術を、異形材圧延加工に適用することは困難である。

これに対し、近年、剛塑性有限要素法による圧延加工時の三次元塑性変形解析手法に関する研究が数多く行われている^{3)~7)}。剛塑性有限要素法では、被圧延材の塑性変形を純三次元的に取り扱うことができるため、スラブ法より高い精度での解析が可能であり、また板材圧延のみならず異形材圧延への適用も可能であるという特徴を有する。しかしながら、従来報告されてきた解析手法はすべてペナルティ法もしくは圧縮特性法に基づいて構成されており、最も容易に高い解析精度を得ることが可能なラグランジュ乗数法に基づく三次元解析手法は、いまだ報告されていない。また、薄板材圧延加工および棒・線材の精密圧延加工の解析において必須であるワークロー

ルの軸心たわみ及び表面での弾性変形の取り扱い方や、ロールバイト上流および下流に存在する弾塑性遷移領域を剛塑性近似することの妥当性等の、検討を要する問題がまだ多く残されている。

圧延加工における被圧延材の三次元塑性変形特性を高い精度のもとで予測するためには、被圧延材とロールおよび圧延機の三次元変形解析ならびにこの両者の熱解析を連成して実行する必要がある。本研究は、板材圧延ならびに棒・線・型材圧延において被圧延材に生ずる多様な三次元塑性変形の高精度な解析を可能とし、実圧延加工に要するロール形状・パススケジュールその他の加工条件の最適化や新たな圧延機の開発を行うための応用技術としての発展性を有する、実用的な統合型連成解析システムの開発を目的としている。本報では、上述の解析システムを構築するのに不可欠である被圧延材の三次元塑性変形解析技術に関連した内容、すなわち、ワークロール表面上の幾何学的情報の処理方法およびラグランジュ乗数法に基づく定常三次元剛塑性FEMの構成について示す。

2. 解析手法

2.1 ワークロール表面における幾何学的諸量の表示

本節では、任意のワークロール水平および垂直たわみのもとで、図1に示すワークロール表面における幾何学的諸量を、幅方向ならびに圧延方向位置の関数として算出する方法について述べる。なお、以下の説明においては、幅方向を x 軸、厚さ方向を y 軸、圧延方向を z 軸とする。また、ワークロール表面上の点の座標を (X, Y, Z) で表す。

2.1.1 ロールギャップ形状

任意のワークロールたわみ・ワークロール径分布のもとで、ある (X, Z) 座標でのワークロール表面位置 Y は、以下の式(1)~(3)を連立させて解くことにより得られる。ワークロール水平および垂直方向のたわみが無い場合には、従来開発されてきた手法と同様、式(1)

*東京大学生産技術研究所 第2部

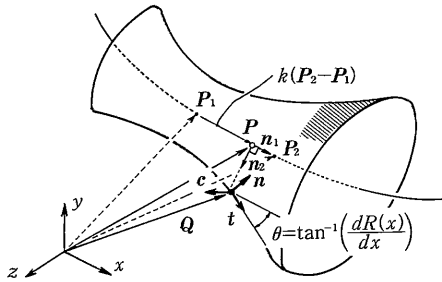


図1 ワークロール表面における幾何学的諸量

～(3)は線形な連立方程式となる。しかしながら、圧延加工の三次元解析においては、任意のワークロール水平および垂直たわみに対し、ワークロール表面上での幾何学的諸量を計算し得る一般的な手法を導入する必要性は高い。その場合、式(1)～(3)は非線形な連立方程式となるため、ロールギャップ形状は、これらの式を位置ベクトル Q について反復計算することにより求める必要がある。導入した反復計算法のフローチャートを図2に示す。

$$(Q-P) \cdot (P_2-P_1) = 0 \quad (1)$$

$$|Q-P| = R(x) \quad (2)$$

$$P = P_1 + k(P_2 - P_1) \quad (3)$$

ただし、 P はワークロール表面の点よりたわみ線におろした垂線の足の位置ベクトル、 Q はワークロール表面の位置ベクトル(= X, Y, Z)、 $R(x)$ はワークロール半径である。 P_1 および P_2 は、 $x=X_1, x=X_2$ の位置でのワークロール軸心線上にある点の位置ベクトルであり、それぞれ

$$P_1 = (X_1, Y_0 + W_Y(X_1), Z_0 + W_Z(X_1)) \quad (4)$$

$$P_2 = (X_2, Y_0 + W_Y(X_2), Z_0 + W_Z(X_2)) \quad (5)$$

と表される。 (Y_0, Z_0) はワークロール軸心位置、 $W_Y(x), W_Z(x)$ はそれぞれワークロール垂直および水平たわみ曲線である。

2.2.2 接線・法線・回転方向単位ベクトル

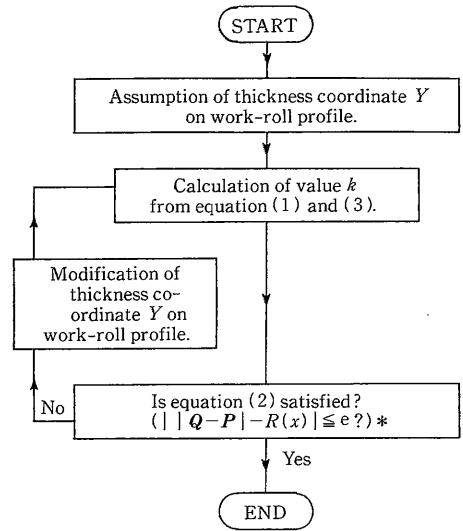
ワークロール表面上の各節点についての境界条件を導入するために必要となる各方向単位ベクトルは、ロールギャップ形状を計算した結果として定まる各ベクトルをもとに、以下に示す方法により求める。

接線ベクトル t は、 $(P_2 - P_1)$ と $(Q - P)$ により構成される面内にあることから、

$$t = \alpha n_1 + \beta n_2, \quad |t| = 1 \quad (6)$$

を満足する。式(6)中の各ベクトルならびに係数は、以下の式(7)～(10)により定まる。

$$t \cdot n_1 = |t| \cos \theta = \cos \theta \quad (7)$$



* $e = 0.0001 \text{mm}$

図2 ワークロール表面位置を求めるための反復計算法

$$n_1 = \frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|}, \quad n_2 = \frac{Q - P}{|Q - P|} \quad (8)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{dR(x)}{dx} \right) \quad (9)$$

$$\alpha = |\cos \theta|, \quad \beta = \sin \theta \quad (10)$$

したがって、単位接線ベクトル t 、単位回転方向ベクトル c 、単位法線ベクトル n は次式のごとく表される。

$$t = |\cos \theta| n_1 + \sin \theta n_2 \quad (11)$$

$$c = n_1 \times n_2 \quad (12)$$

$$n = t \times c \quad (13)$$

2.2 ラグランジュ乗数法三次元剛塑性FEM

従来より、ラグランジュ乗数法剛塑性FEMによる解析例は比較的少なく、特に三次元問題への適用は行われていないのが現状である。その原因としては、静水圧応力を未知数とするため解析の際に対象とする連立方程式の次元数ならびに計算時間が増大すること、および、マトリックスのバンド化が煩雑であること、をあげることができる。しかしながら、ラグランジュ乗数法剛塑性FEMでは、体積一定条件を高い精度で容易に満足させることができ、また、体積一定条件を厳密に満足した状態でも応力分布の厳密な解析を容易に実行することが可能である、という特徴がある。

薄板材圧延では板幅方向ひずみが板厚・圧延方向ひずみに比較してきわめて小さいにも関わらず、板幅方向塑性流動が製品の板厚分布に大きく影響を及ぼすものと考えられるため、解析に際しての体積一定条件の取り扱いが重要な意味を持っている。他方、棒材・線材圧延さら

研究速報

には精密孔型圧延における製品形状を高精度で予測することが求められる場合にも、体積一定条件の取り扱いが解析結果に大きな影響を及ぼす可能性がある。

以上の理由により、本解析システムではラグランジュ乗数法剛塑性FEMにより、被圧延材の三次元塑性変形を解析する。その汎関数ならびに停留原理は、式(14)(15)により表される¹²⁾¹³⁾。

$$\Phi = \int_V (\int \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}) dV - \int_{S_f} T_i \dot{u}_i dS - \int_{S_c} F_i \tilde{u}_i dS + \int_V \lambda \dot{\epsilon}_{kk} dV \quad (14)$$

$$\delta\Phi = 0 \quad \text{For any } \dot{u}_i, \lambda \quad (15)$$

$$\tilde{u}_i = \dot{u}_i - \dot{U}_i$$

ただし、 \dot{u}_i は被圧延材の速度ベクトル、 \dot{U}_i はワークローラ周速ベクトル、 T_i 、 F_i はそれぞれ表面力および摩擦力ベクトル、 λ はラグランジュ乗数である。

摩擦応力として式(16)に示す速度依存性則¹³⁾を適用する。

$$F_i = -f \left\{ \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{|\tilde{u}_i|}{a} \right) \right\} \frac{\tilde{u}_i}{|\tilde{u}_i|} \quad (16)$$

$$a = |\dot{U}| / 1000 \quad (17)$$

剛塑性FEMによる三次元解析では、8節点双一次要素により式(14)(15)を離散化し、偏差応力項についてはガウスの $2 \times 2 \times 2$ 積分、静水圧応力項(体積一定条件項)については1点積分を導入するのが一般的である。本解析手法では、並列処理の導入が容易となるように、式(14)の偏差応力項の離散化ならびに積分には、安定化マトリクス¹⁴⁾を併用しつつガウスの1点積分を適用し、ニュートン・ラフソン法により解を求める。また、摩擦応力項の表面積分には、 5×5 のガウス積分を適用する。

上記の式(14)~(17)を各要素 e について有限要素表示し、さらに節点速度ベクトル $\{\hat{u}^e\}$ の摂動量(修正量) $\{\Delta \hat{u}^e\}$ につき展開し、三次以上の項を省略すると次式が得られる。

$$\left\{ \int_{V^e} \left(g[D] + \frac{g}{\sigma} \frac{\partial g}{\partial \dot{\epsilon}} \{\beta\} \{\beta\}^T \right) dV + \int_{(S)_e} [H] dS \right\} \cdot \{\Delta \hat{u}^e\}^N + \int_{V^e} [B]^T [A] [\phi] dV \cdot \{\hat{\lambda}^e\}^N = \{\hat{f}_F\} + \{\hat{f}_C\} - \int_{V^e} g \{\beta\} dV \quad (18)$$

$$\int_{V^e} [\phi]^T [A]^T [B] dV \cdot \{\Delta \hat{u}^e\}^N = - \int_{V^e} [\phi]^T [A]^T [B] dV \cdot \{\hat{u}^e\}^{N-1} \quad (19)$$

$$g = \frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\epsilon}} \quad (20)$$

$$\frac{g}{\sigma} \frac{\partial g}{\partial \dot{\epsilon}} = \frac{4}{9\dot{\epsilon}} \left[\frac{1}{\dot{\epsilon}^2} \left(\dot{\epsilon} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\epsilon}} - \bar{\sigma} \right) + \frac{\Delta \dot{\epsilon}^*}{2} \left\{ \frac{1}{\dot{\epsilon}} \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial \dot{\epsilon}^2} - \frac{2}{\dot{\epsilon}^3} \left(\dot{\epsilon} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\epsilon}} - \bar{\sigma} \right) \right\} \right] \quad (21)$$

$$\Delta \dot{\epsilon}^* = \Delta \dot{\epsilon}^N = \alpha \Delta \dot{\epsilon}^{N-1} \quad (22)$$

$$\{\hat{f}_F\} = \int_{(S)_e} [\phi]^T \{T\} ds,$$

$$\{\hat{f}_C\} = \int_{(S)_e} [\phi]^T \{F\} ds \quad (23)$$

$$\{\dot{u}\} = [\phi] \{\hat{u}^e\}, \quad \{\dot{\epsilon}\} = [B] \{\hat{u}^e\} \quad (24)$$

$$[D] = [B]^T [S] [B], \quad \{\beta\} = [D] \{\hat{u}^e\},$$

$$[H] = h [\phi]^T [\phi] \quad (25)$$

$$h = -f \left\{ \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{|\tilde{u}_i|}{a} \right) \right\} \frac{1}{|\tilde{u}_i|}$$

$$\{F\} = h (\{\dot{u}\} - \{\dot{U}\}) \quad (26)$$

$$\int_{V^e} (g[D] + \frac{g}{\sigma} \frac{\partial g}{\partial \dot{\epsilon}} \{\beta\} \{\beta\}^T) dV = (g[D_0] + \frac{g}{\sigma} \frac{\partial g}{\partial \dot{\epsilon}} \{\beta_0\} \{\beta_0\}^T) V^e \quad (27)$$

$$\int_{V^e} g \{\beta\} dV = g \{\beta_0\} V^e \quad (28)$$

$$\int_{V^e} [\phi]^T [A]^T [B] dV = [\phi_0]^T [A]^T [B_0] V^e \quad (29)$$

$$[D_0] = [B_0]^T [S] [B_0] + \frac{1}{3} \left[\frac{\partial B_0}{\partial \xi} \right]^T [S] \left[\frac{\partial B_0}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{\partial B_0}{\partial \eta} \right]^T [S] \left[\frac{\partial B_0}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{\partial B_0}{\partial \gamma} \right]^T [S] \left[\frac{\partial B_0}{\partial \gamma} \right] \quad (30)$$

$$\{\beta_0\} = [D_0] \{\hat{u}^e\} \quad (31)$$

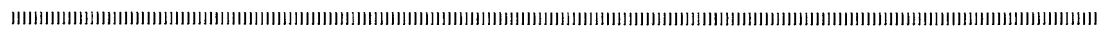
$$[B_0] = [B(\xi=0, \eta=0, \gamma=0)],$$

$$[\phi_0] = [\phi(\xi=0, \eta=0, \gamma=0)] \quad (32)$$

ただし、 $N-1$ 、 N はそれぞれ $N-1$ 回目ならびに N 回目の反復計算において求まる量を意味する。式(27)~(32)は安定化マトリクス¹⁴⁾を併用しつつガウスの1点積分を行った結果を示しており、 V^e は要素 e の体積である。

式(18)~(21)は、摂動量 $\{\Delta \hat{u}^e\}$ についての線形二次方程式となるが、その次数を低減することを目的として式(22)を導入している。なお、式(22)中の係数 α としては、経験的に定めた値($\alpha=0.8$)を用いる。 $\alpha=0.0$ の場合、式(21)は従来の剛塑性有限要素法で適用されてきた式に一致する。

上式を、解析対象とする領域全体についての節点速度ベクトル $\{\dot{u}\}$ と摂動量 $\{\Delta \hat{u}\}$ とのノルム比ならびに節点力の不釣合い量が十分小さくなるまで、摂動量 $\{\Delta \hat{u}\}$ により $\{\dot{u}\}$ を修正しつつ反復計算することにより、節点速度 $\{\dot{u}\}$ の最適解をもとめる。



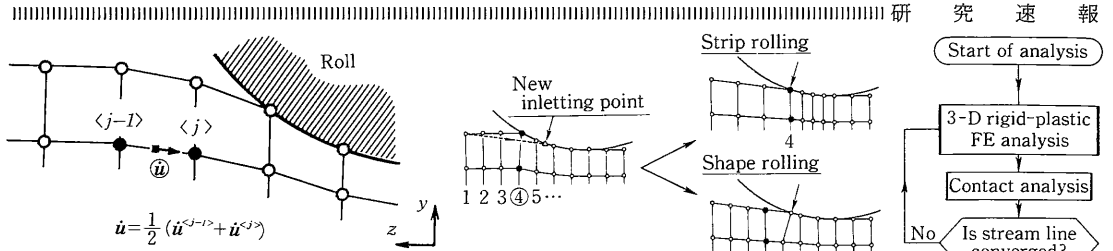


図 3 接触解析に用いる代表速度

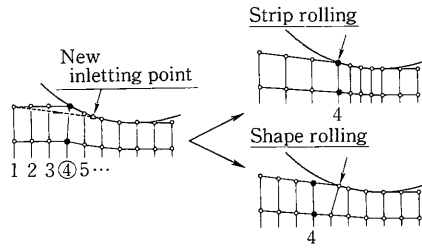


図 4 接触解析法

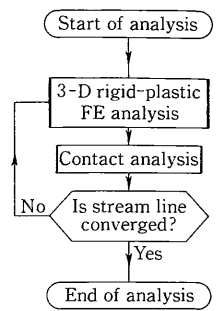


図 5 フローチャート

境界条件は以下に示すとおりである。

$$\text{Entrance : } \dot{u}_x = 0, \dot{u}_y = 0, \dot{u}_z = (\text{uniform}) \quad (33)$$

$$\text{Exit : } \dot{u}_x = 0, \dot{u}_y = 0, \dot{u}_z = (\text{uniform}) \quad (34)$$

$$\text{Contact surface : } \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (35)$$

2.3 接触解析法およびフローチャート

接触解析ならびに流線の修正に際しては、図 3 に示す圧延方向に見た節点間の中点での速度分布を代表速度として用いた。定常三次元剛塑性 FEM 解析においては、ワークロールと被圧延材との接触領域が未知であるため、定常流線を定める際に導入する接触解析法が解析の精度を左右する一つの要因となる。本解析方法では繰り返し計算により定常流線を定める方法を用いたが⁴⁾、その際には被圧延材幅方向にみた接触弧長の差が小さい場合(たとえば一般の板材圧延の場合)と、被圧延材幅方向にみた接触弧長の差が大きい場合(たとえば棒材・線材圧延の場合)について、図 4 に示すそれぞれ異なる接触解析法を適用した。以下に各方法について簡単に述べる。また、上述の解析手法をまとめ、図 5 にフローチャートを示す。

2.3.1 被圧延材幅方向にみた接触弧長の差が小さい場合(方法 1)

本方法では、圧延方向にみたある節点列が常に噛み込み線と一致するものとし、この条件のもとで噛み込み位置および流線の修正を行う³⁾。予変形域・ロールギャップ・出側被圧延材の節点座標は、各流線上での圧延方向要素長さがそれぞれの領域内で等しくなるように、接触解析を行う度に求まる流線上に再配置する。本方法は、被圧延材幅方向にみた接触弧長の差が小さい場合(板材圧延)に対して有効である。

2.3.2 被圧延材幅方向にみた接触弧長の差が大きい場合(方法 2)

本方法では、各節点の圧延方向座標を解析開始時に定めておく。接触解析に際しては、それぞれの流線上で噛み込み位置に相当すると判断された節点についてのみ、圧延方向座標を修正する⁴⁾。それ以外の節点については、

幅方向・厚さ方向座標のみを修正する。本方法は、被圧延材幅方向にみた接触弧長の差が大きい場合(棒材・線材圧延)に対して有効である。

3. 結 言

圧延連成解析システムの基本的な構成要素であるラグランジュ乗数法による定常三次元剛塑性 FEM 解析の構成について述べた。解析事例、ならびに、本報にて示した塑性変形解析手法を基にしたワークロールの弾性変形との連成解析手法については、次報以後に詳細に示す。
(1991年 1月11日受理)

参 考 文 献

- 1) 戸澤康壽・中村雅勇・石川孝司: 塑性と加工, 17-180 (1976), 37.
- 2) 戸澤康壽・石川孝司・岩田徳利: 塑性と加工, 23-263 (1982), 1181.
- 3) Mori, K. & Osakada, K.: Int. J. Mech. Sci., 26-9/10 (1984), 515.
- 4) 森謙一郎・Kopp, R.: 38回塑加連講論, (1987), 1.
- 5) Bertland, C., Montmitonnet, P., Chenot, J. L., Fau, F. & Buessler, P.: NUMIFORM 89 (1989), 303. Balkema.
- 6) Lee, Y. S., Dawson, P. R. & Dewhurst, T. B.: ibid, 323.
- 7) Park, J.J. & Oh, S. I.: Trans. ASME J. Engng. Ind., 112 (1990), 36.
- 8) Liu, C., Hartley, P., Sturgess, C.E.N. & Rowe, G.W.: Int. J. Mech. Sci., 29-4 (1987), 271.
- 9) 小森和武・加藤和典・室田忠雄・遠藤順一・土井 裕: 機論 A, 52-479 (1986), 1724.
- 10) Kennedy, K.F.: Trans. ASME J. Engng. Ind., 110 (1988), 223.
- 11) 柳本 潤・木内 学: 生産研究, 42-6 (1990), 31.
- 12) Lee, C.H. & Kobayashi, S.: Trans. ASME J. Engng. Ind., 95 (1973), 865.
- 13) Li, G.J. & Kobayashi, S.: ibid, 104 (1982), 55.
- 14) 富田佳宏・進藤明夫・秋 萬錫: 塑性と加工, 30-338 (1989), 426.