

非等方 $k-\epsilon$ モデルThe Anisotropic $k-\epsilon$ Model

西 島 勝 一*

Shoiti NISIZIMA

計算機の急速な発展に伴い、乱流現象の研究においても数値シミュレーションが欠かすことのできない手法となってきた。工学的研究におけるシミュレーションで最も一般的に用いられているのは、 $k-\epsilon$ 乱流モデルである。しかし、このモデルはレイノルズ応力の渦粘性表現が等方的であるため、重大な欠点をもっている。その欠点を克服する一つとして、非等方 $k-\epsilon$ モデルが提起されている。本解説では、非等方 $k-\epsilon$ モデルの現状と幾つかの問題点を論議してみる。

1. はじめに

スーパーコンピュータを始めとする計算機のハードウェアの発展が急速に進んでいるとはいえ、乱流現象の数値解析において乱流の大きなスケールから微少なスケールまで一挙に解析するには、現存するあるいは近い将来に予想される計算機ではまだまだ処理速度・容量とも不十分である。そのため、乱流の数値シミュレーションを行う場合、小スケールの乱流構造を切り落とす(評価し、近似して組み入れる)なんらかのモデル化が必要になる。工学的研究においては、構造が比較的簡単で計算時間が少なく済む等の理由から $k-\epsilon$ モデルが非常に多く用いられている¹⁾。しかし、このモデルはレイノルズ応力の等方的渦粘性表現を基礎としているため、工学上重要な乱流の数値解析において、例えば、溝乱流では乱流強度の各成分の非等方性の再現が出来ない、また正方形管内乱流では 2 次流を誘起出来ない等の重大な欠点を持っている。

一方、乱流の基礎的研究においてはモデルの普遍性や結果の高精度性が重視されており、この分野では LES (large-eddy simulation) モデルがよく用いられている。しかし、このモデルは先の $k-\epsilon$ モデルに比べて計算時間の多さなどから、工学的分野への応用はいまだ少ない。また、 $k-\epsilon$ モデルの欠点を補うものとして、非等方性の強い乱流の数値解析にしばしば適用されているものにレイノルズ応力(代数応力)モデルがある²⁾。しかし、このモデルもレイノルズ応力の各成分方程式が加わり複雑になる等の理由から、 $k-\epsilon$ モデルに比較して工学的分野での利用は少ない。

工学的研究において、 $k-\epsilon$ モデルの簡単さと経済性を保ちつつ、その欠点(ここではレイノルズ応力の非等方

性が再現できない点)を改善することは意義あることと考えられる。この観点から、非等方 $k-\epsilon$ モデルは有益なものであると言えよう。このモデルは吉澤により統計理論的に導出されたもので³⁾、通常モデルと異なりレイノルズ応力の非等方渦粘性表現を特徴としている。その後、このモデルは溝乱流、クエット乱流、正方形管内乱流の数値解析に適用されて⁴⁾⁻⁹⁾、各定数や各項の評価と改善がなされて来ている。これと同様なモデルは、Spezialeにより次元解析から非線形 $k-l$ ($k-\epsilon$) モデルとして提起され¹⁰⁾、バックワードステップ乱流、曲がりを持った矩形管内乱流の数値解析に適用されている^{11),12)}。また、明と笠木は、壁近くの乱流の非等方性の分析に基づいた $k-\epsilon$ モデルを提起し¹³⁾、溝乱流、矩形管内乱流、バックワードステップ乱流の解析を行っている^{14),15)}。これらの非等方性モデルによる研究は等方性 $k-\epsilon$ モデルの欠点を改善し、乱流強度の非等方性や矩形管内乱流での 2 次流を再現出来ることを示している。本論文では、筆者の行った溝乱流、矩形管内乱流等の数値解析を中心に、非等方 $k-\epsilon$ モデルの現状といくつかの課題を考察する。

2. 非等方 $k-\epsilon$ モデル

速度、圧力(密度で割ったもの)の平均部分とそれからのずれを示す擾乱部分をそれぞれ (\bar{v}, \bar{p}) と (v', p') で表すと、三次元非圧縮・粘性流体に対する平均部分の基本方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{v}_\alpha}{Dt} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) \bar{v}_\alpha \\ &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(R_{\alpha\alpha} + \nu \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (2)$$

で与えられる(アルファベットの下つき添字については

*東京大学生産技術研究所 第 1 部

1 から 3 まで和をとることとする)。ここで、 ν は動粘性率、 $R_{\alpha\beta}$ はいわゆるレイノルズ応力で、非等方 $k-\varepsilon$ モデルでは擾乱場の基本的統計量として乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ε を選び、次のとおり表わす³⁾：

$$R_{\alpha\beta} \equiv -\langle v'_\alpha v'_\beta \rangle = -\frac{2}{3} k \delta_{\alpha\beta} + \nu_e \left(\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{3} \left(\sum_{m=1}^3 \tau_m S_{maa} \right) \delta_{\alpha\beta} + R'_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

$$\nu_e = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (4)$$

$$\tau_m = C_{\tau m} \frac{k^3}{\varepsilon^2}, \quad (5)$$

$$S_{1\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad (6)$$

$$S_{2\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \right), \quad (7)$$

$$S_{3\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad (8)$$

$$R'_{\alpha\beta} = - \sum_{m=1}^3 \tau_m S_{m\alpha\beta}. \quad (9)$$

ここで $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表わし、 m は 1 から 3 である。この式は以下の k と ε 方程式^{16),17)} と連立させることにより解くことができる。

$$\frac{Dk}{Dt} = R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{kk} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_a^2}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{\varepsilon \varepsilon} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right) \\ & + C_{\varepsilon 3} k \left(\frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial x_b} \right)^2 + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_a^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、通常の $k-\varepsilon$ モデルと非等方モデルの違いは (3) 式右辺第 3 項、第 4 項の非等方項が付加されているかないかにある。さらに、吉澤と Speziale¹⁰⁾、明ら¹³⁾ の非等方モデルの違いもこの右辺第 3、第 4 項の表現の違いにある。

モデル定数は、まず溝乱流の数値解析における実測値^{18)~22)} との比較や、竹光^{23),24)}、Speziale²⁵⁾ の研究結果をも踏まえて、次のとおり最適化した⁹⁾。

$$\begin{aligned} C_\nu &= 0.09, \quad C_{kk} = 0.05, \quad (C_{\varepsilon 1} C_\nu - 2C_{\varepsilon 3}) = 0.108, \\ C_{\varepsilon 2} &= 1.9, \quad C_{\varepsilon \varepsilon} = 0.069, \quad C_{\tau 1} = 0.057, \\ C_{\tau 3} &= -0.0067. \end{aligned} \quad (12)$$

さらに、なお未定な定数は正方形管内乱流の計算を通して Melling and Whitelaw の実験結果²⁶⁾ との比較検討に基づいて最適化を行い決定した⁹⁾：

$$C_{\varepsilon 1} = 1.42, \quad C_{\varepsilon 3} = 0.01, \quad C_{\tau 2} = -0.37. \quad (13)$$

なお、これら定数の内、 $C_{\varepsilon 3}$ と $C_{\tau m}$ の非等方項に関わる値については 4 および 5 節において検討を行う。

3. 壁上での滑り無し境界条件の適用

通常の $k-\varepsilon$ モデルでは (4) の ν_e 、非等方モデルではさらに (5) の τ_m がモデルの重要な基礎となっているが、この渦粘性の仮定は壁の極近くでは成立しない。その結果、そのままでは壁上で滑り無し境界条件を課することができないので、壁減衰関数を導入してこの困難を解決する^{4)~9)}。このような工夫は数多くの研究者によりなされてきている^{20),27)~32)}。また、LES においても同様な試みがなされており^{33),34)}、統計理論的検討も行われている³⁵⁾。

壁からの距離を y^+ 、渦粘性と動粘性係数との比を $R_t \sim (k^2/\varepsilon)/\nu$ とすると、これらの壁減衰関数は大別して、 $f_a = F(y^+)$, $f_a = F(R_t)$, $f_a = F(y^+, R_t)$, (14) となっており、溝乱流や境界層等の流れでは有効性を示している。また、これらの関数が乗ぜられる項は、渦粘性項だけでなく (11) 式のほとんどの項におよび、かつ関数の形も各項ごとに変化する状況にある^{20),32)}。筆者は、これらの関数を溝乱流・矩形管内乱流・バックワードステップ乱流の数値解析に適用してみたが、その結果、計算不安定、壁減衰関数が 1 より大きな値になってしまう、関数が急速に減衰してしまう等のさまざまな問題点や欠点が発見された。

そこで、本研究では第一段階として、(1) と (10) 式の渦粘性に関わる項のみに次の関数を導入することとした。

$$\begin{aligned} f_{dy} &= 1 - \exp(-y^+/12.5), \quad y^+ = v^* x_2' / \nu, \\ v^* &= \sqrt{\nu \left(\frac{d\bar{v}_1}{dx_2} \right)_{x_2 = \pm D}}. \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 x_2' は壁からの距離、 v^* は摩擦速度である。なお、(11) 式に対しては減衰関数を全く導入しなかった。これは、計算の安定化、出来る限りの簡単化、Mansourらの研究結果²⁶⁾ に基づいている。(15) は一対の壁で構成されている溝乱流へ適用し、二対の壁に囲まれた矩形管内乱流の解析には双方の壁からの寄与を取り入れるべく次の関数を使用した。

$$\begin{aligned} f_{dz} &= f_{dy} f_{dz}, \quad f_{dz} = 1 - \exp(-z^+/12.5), \quad z^+ = w^* x_3' / \nu, \\ w^* &= \sqrt{\nu \left(\frac{d\bar{v}_1}{dx_3} \right)_{x_3 = \pm D}}. \end{aligned} \quad (16)$$

ただし、 x_2' 、 x_3' はそれぞれの壁からの距離であり、 y^+ 、 z^+ はそれぞれ壁座標、さらに v^* 、 w^* は摩擦速度である。明らは矩形管内乱流の解析においても一面の壁からの寄与のみを評価して計算を行い成功させている¹⁴⁾ ので、このような二対の壁間の影響を伴う乱流における壁関数の最適化問題は一つの検討課題であろう。さらに、Hurらの矩形管内乱流の数値解析¹²⁾ と小林らのバックワードステップ乱流への適用¹⁵⁾ においては滑り無しの境界条件ではなく経験則 (実測値) を使用しており、この点での検討も将来の課題であろう。

以上の関数を導入して整理すると、方程式は、(4)、(5)、(10)がおのおの、次のようになる。

$$v_e = C_\nu f_d \frac{k^2}{\varepsilon}, \tag{17}$$

$$\tau_m = C_{\tau m} f_d \frac{k^3}{\varepsilon^2}, \tag{18}$$

$$\frac{Dk}{Dt} = R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(C_{k f_d} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_a^2}. \tag{19}$$

これにより、壁上での境界条件は、

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = 0, \quad k = 0, \quad \varepsilon = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x} \right)^2, \tag{20}$$

となる^{9),37),38)}。

4. 溝乱流への適用

A. 数値計算法

図1で表わされる溝乱流へ、このモデルを適用してみる。流れ方向を x_1 、壁に垂直な方向を x_2 として、 x_1 、 x_2 の双方と直交する方向 x_3 を無限長と仮定すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} = 0, \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = const, \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

となる。壁間の半分の長さ D と D および平均圧力勾配で表わされる速度 $\sqrt{-\overline{(d\bar{p}/dx_1)}D}$ を用いて無次元化して整理すると、次の解くべき連立式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} = 1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(f_d C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right), \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} = f_d C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2 - \varepsilon \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C_{k f_d} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_2} + \frac{1}{R} \frac{\partial k}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = C'_{\varepsilon 1} k \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C_{\varepsilon \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \tag{24}$$

なお(24)の $C'_{\varepsilon 1}$ は

$$C'_{\varepsilon 1} = (C_{\varepsilon 1} C_\nu - 2C_{\varepsilon 3}) = 0.108, \tag{25}$$

で、 R は

$$R = \frac{D}{\nu} \sqrt{D \left(-\frac{d\bar{p}}{dx_1} \right)}, \tag{26}$$

で定義されるレイノルズ数である。壁減衰関数は(15)を、境界条件は(20)を用いた。空間差分について2次精度不等間隔スキームを、時間についてはCrank-Nicolsonの陰解法を用いた。差分の格子点は両壁間に61個をtanh(y)に基づき配置した⁹⁾。この格子配分は、粘性底層内に

各3個以上、 $y^+ < 100$ に約半数の格子点が置かれることになっている。

B. 溝乱流の解析結果

図2から図9に、最大流速と壁間の半分の長さに基づくレイノルズ数 $R_c = 3622$ ($R = 200$), $R_c = 12577$ ($R = 600$), $R_c = 32156$ ($R = 1400$)の数値解析結果と実測値を合わせて示してある。各統計量の実測値との一致は妥当なものといえる。ここでは、図4-6に示されている乱流強度の非等方性について検討する。(3)から(9)のレイノルズ応力式を溝乱流に当てはめてみると次のようになる。

$$\langle v_1'^2 \rangle = \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}(2C_{\tau 1} - C_{\tau 3}) \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2, \tag{27}$$

$$\langle v_2'^2 \rangle = \frac{2}{3}k - \frac{1}{3}(C_{\tau 1} - 2C_{\tau 3}) \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2, \tag{28}$$

$$\langle v_3'^2 \rangle = \frac{2}{3}k - \frac{1}{3}(C_{\tau 1} + C_{\tau 3}) \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2. \tag{29}$$

ここで、 $C_{\tau 1}$ 、 $C_{\tau 3}$ を(12)の値とすると

$$\langle v_1'^2 \rangle > \langle v_3'^2 \rangle > \langle v_2'^2 \rangle, \tag{30}$$

となり、乱流強度の大小関係が実際の流れと同じ性質となる。一方、等方 $k-\varepsilon$ モデルでは(27)~(29)の右辺第2項が欠落しているため、

$$\langle v_1'^2 \rangle = \langle v_2'^2 \rangle = \langle v_3'^2 \rangle = \frac{2}{3}k, \tag{31}$$

となり非等方性を再現できないのである。さて、(12)の値についてSpeziale¹⁰⁾、明¹¹⁾らのものとの比較検討を試みよう。なお、各モデル間で非等方項((3)式の第3項と第4項)の表現が同一でない、例えば、明らのモデルでは第4項が $F\{(d\sqrt{k}/dx)^2\}$ と表現されている。そこで、定数値自身の多少の違いよりも正負や次数的検討を重視するのが、ここでは妥当であろう⁴⁰⁾。

	$C_{\tau 1}$	$C_{\tau 3}$
西島	0.057	-0.0067,
Speziale	0.041	-0.14,
明	0.072	-0.0135.

(32)では三者とも符号的には一致しており、 $C_{\tau 1}$ はオーダー的にも同じである。この非等方項の適否(ほかの項の付加や修正、削除等)や定数の最適化は、引き続き研究課題である。なお、溝乱流の解析においては $C_{\tau 3}$ は未定で、5節においてはじめて最適化が行われる。

5. 正方形管内乱流への適用

A. 流れ関数の導入と数値計算法

図10のような正方形管内乱流では、

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad (f = \bar{v}, k, \varepsilon), \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = constant,$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} = 0, \tag{33}$$

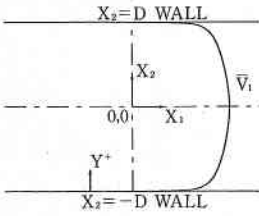


図1 溝乱流の座標。

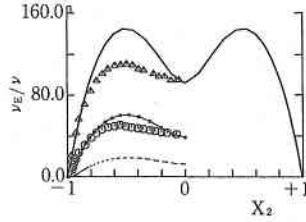
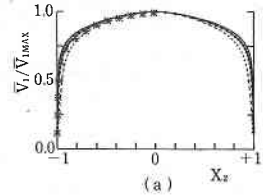
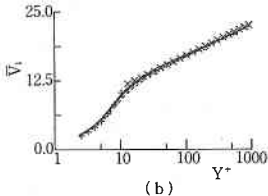


図9 渦粘性率。

- : 本計算 ($R_c=32156$);
- : 本計算 ($R_c=12577$);
- ⋯ : 本計算 ($R_c=3622$);
- △ : Hussain et al. ($R_c=32300$);
- ⊙ : Hussain et al. ($R_c=13800$).



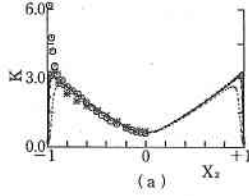
(a)



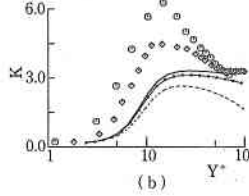
(b)

図2 平均流速。

- : 本計算 ($R_c=32156$);
- : 本計算 ($R_c=12577$);
- ⋯ : 本計算 ($R_c=3622$);
- * : Laufer ($R_c=30800$);
- : $\text{Log}(y^+)/0.4+5.5$;
- + : y^+ .



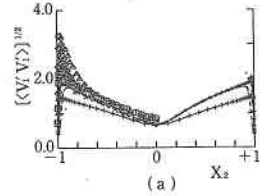
(a)



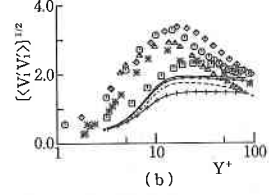
(b)

図3 乱流エネルギー。

- : 本計算 ($R_c=32156$);
- : 本計算 ($R_c=12577$);
- ⋯ : 本計算 ($R_c=3622$);
- * : Laufer ($R_c=12300$);
- ⊙ : Clark ($R_c=15200$);
- ◇ : Patel et al. (average).



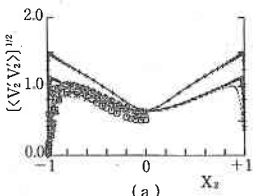
(a)



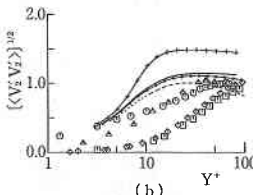
(b)

図4 乱流強度 $\langle v_1'v_1' \rangle^{1/2}$ 。

- : 本計算 ($R_c=32156$);
- : 本計算 ($R_c=12577$);
- ⋯ : 本計算 ($R_c=3622$);
- + : 本計算・等方 $k-\epsilon$ ($R_c=32156$);
- * : Laufer ($R_c=12300$);
- ⊙ : Clark ($R_c=15200$);
- △ : Kreplin et al. ($R_c=3850$);
- : Moin & Kim ($R_c=13800$);
- ◇ : Horiuti ($R_c=14900$).



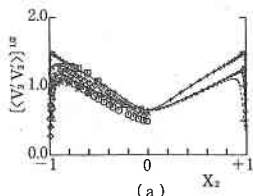
(a)



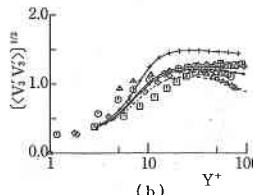
(b)

図5 乱流強度 $\langle v_2'v_2' \rangle^{1/2}$ 。

記号は図4と同じ



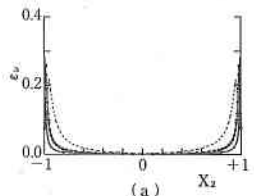
(a)



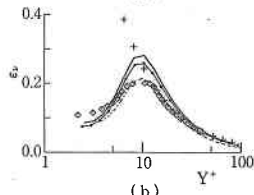
(b)

図6 乱流強度 $\langle v_3'v_3' \rangle^{1/2}$ 。

記号は図4と同じ



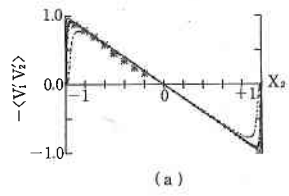
(a)



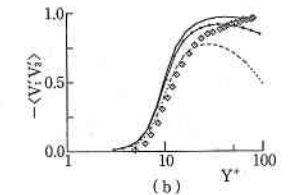
(b)

図7 エネルギー散逸率。

- : 本計算 ($R_c=32156$);
- : 本計算 ($R_c=12577$);
- ⋯ : 本計算 ($R_c=3622$);
- ◇ : Patel et al. (average);
- + : $1/0.4/y^+$.



(a)



(b)

図8 レイノルズ応力 $-\langle v_1'v_2' \rangle$ 。

- : 本計算 ($R_c=32156$);
- : 本計算 ($R_c=12577$);
- ⋯ : 本計算 ($R_c=3622$);
- * : Laufer ($R_c=30800$);
- ◇ : Patel et al. (average).

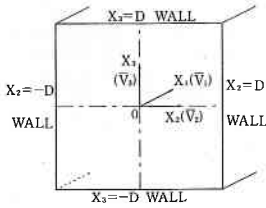


図10 正方形管内乱流の座標.

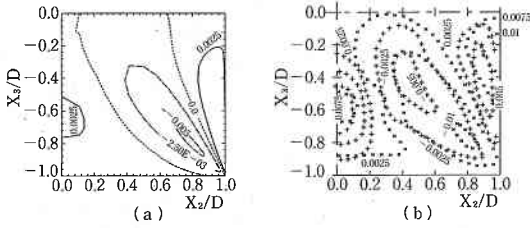


図12 2次流 \bar{v}_3/\bar{v}_{1cl} .

- (a) : 本計算 ($Re=40806$) ;
- (b) * : Melling & Whitelaw ($Re=42000$) (-0.01, -0.0025, 0.0025, 0.0075, 0.01) ;
- + : Nakayama et al. ($Re=83000$) (-0.005, -0.0025, 0.0025, 0.005, 0.0075).

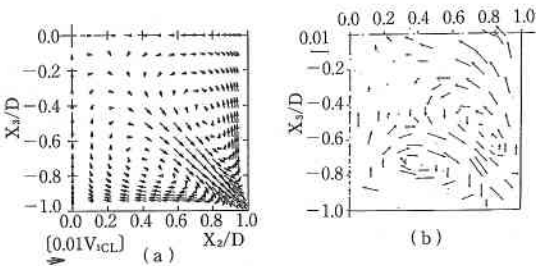


図13 2次流 $\sqrt{v_2^2+v_3^2}$.

- (a) : 本計算 ($Re=40806$) ;
- (b) : Melling & Whitelaw ($Re=42000$).

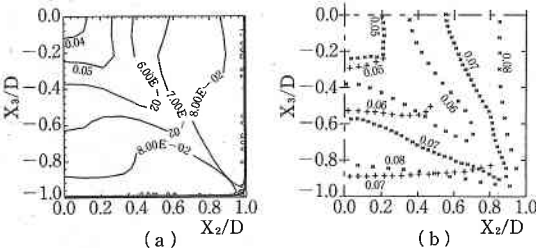
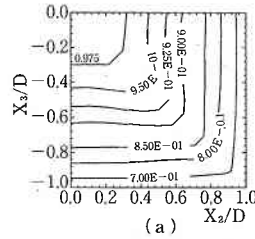


図15 乱流強度 $\langle v_1'v_1' \rangle^{1/2}/\bar{v}_{1cl}$.

- (a) : 本計算 ($Re=40806$) ;
- (b) * : Melling & Whitelaw ($Re=42000$) (0.05, 0.06, 0.07, 0.08) ;
- + : Nakayama et al. ($Re=83000$) (0.05, 0.06, 0.07).



- (a) : 本計算 ($Re=40806$) ;
- (b) : 実験値と他数値解析値.
- * : Melling & White law ($Re=42000$) (0.7, 0.8, 0.9, 0.975の等値線) ;
- : 等方k-εモデル・Demuren & Rodiより ($Re=83000$) (0.8, 0.9) ;
- : Demuren & Rodi ($Re=83000$) (0.8, 0.9) ;
- + : Nakayama et al. ($Re=83000$) (0.7, 0.8, 0.9, 0.975) ;
- △ : Baker & Orzechowski (0.7, 0.8, 0.9).

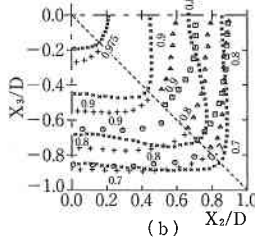


図11 主流速 \bar{v}_1/\bar{v}_{1cl} (\bar{v}_{1cl} は管路中心軸上の主流速).

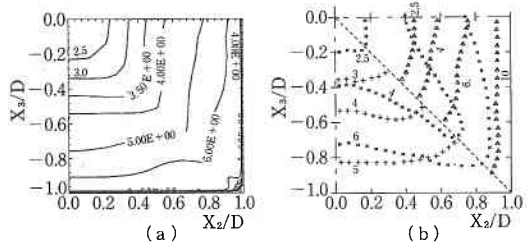


図14 乱流エネルギー $(k/\bar{v}_{1cl}^2) \times 10^3$

- (a) : 本計算 ($Re=40806$) ;
- (b) * : Melling & Whitelaw ($Re=42000$) (2.5, 4, 6) ;
- + : Nakayama et al. ($Re=83000$) (3, 4, 5) ;
- △ : Baker & Orzechowski (2.5, 4, 6, 10).

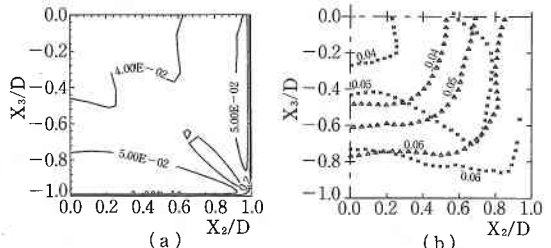


図16 乱流強度 $\langle v_2'v_2' \rangle^{1/2}/\bar{v}_{1cl}$.

- (a) : 本計算 ($Re=40806$) ;
- (b) * : Melling & Whitelaw ($Re=42000$) (0.04, 0.05, 0.06) ;
- △ : Baker & Orzechowski (0.04, 0.05, 0.06).

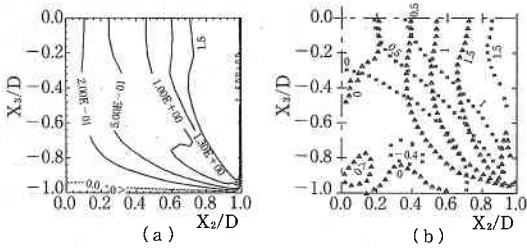


図17 レイノルズ応力 $(\langle v_1 v_2 \rangle / \bar{v}_{1c}^2) \times 10^3$.

- (a) : 本計算 ($R_e=40806$) ;
- (b) * : Melling & Whitelaw ($R_e=42000$) (-0.4, 0, 0.05, 1, 1.5) ;
- △ : Baker & Orzechowski ($< 0, 0, 0.5, 1, 1.5$).

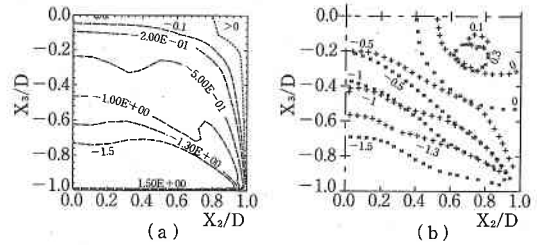


図18 レイノルズ応力 $(\langle v_1 v_2 \rangle / \bar{v}_{1c}^2) \times 10^3$.

- (a) : 本計算 ($R_e=40806$) ;
- (b) * : Melling & Whitelaw ($R_e=42000$) (-1.5, -1, -0.5, 0, 0.3) ;
- + : Nakayama et al. ($R_e=83000$) (-1.3, -1, -0.5, 0, 0.1).

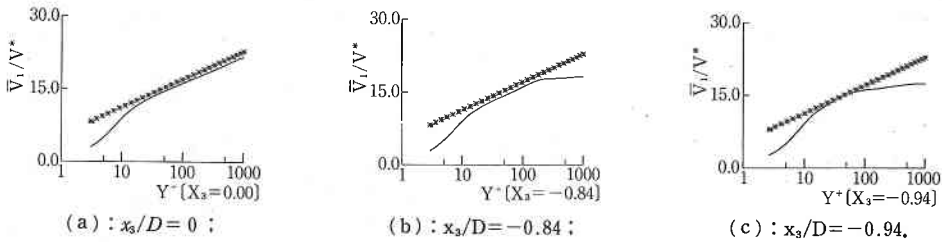


図19 壁近くの主流速 \bar{v}_1/v^* ($x_2 = 0$). — : 本計算 ; * : $\text{Log}(y^+)/0.4+5.5$.

が成りたつ。ここで、連続の式(2)を恒等的に満たし、圧力項を省くために、次のように流れ関数を導入する：

$$\bar{v}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad \bar{v}_3 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2},$$

$$\omega = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) \psi = -\Delta_{23} \psi. \tag{34}$$

以上の各式を、速度 $\sqrt{-(d\bar{v}/dx_1)D}$ と長さ D を基本量として無次元化して整理し、連立させることにより解が得られる。なお、(11)式右辺第4項、あるいは(13)の定数 C_{ϵ_3} の導入は半場の指摘⁴¹⁾によっており、矩形管内乱流の解析では特に角 (corner) での影響が見られ、実験値との比較で有効と判断して用いた。

壁上での境界条件(20)は次のようになる：

$$\bar{v}_1 = 0, \quad \psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \text{ or } -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2}, \quad k = 0,$$

$$\epsilon = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_2^2} \text{ or } \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_3^2}. \tag{35}$$

差分方法は空間に関しては、溝乱流と同様の不等間隔を用いて壁間に61個の格子点を配置した⁹⁾。時間差分には Adams-Bashforth法を用いた⁴²⁾。(34)の流れ関数は逐次過緩和法 (SOR) を用いて解いた。

初期値は等方的な $k-\epsilon$ モデルで得られたものを用い、

2次流れについてはただ1格子点上の ψ を最初の1時間ステップだけ少し変化させて、じょう乱を起こさせ発展を促進させた。

B. 正方形管内乱流の解析結果

図11~19に、 $R_e=40806$ (*Bulk* 速度 \bar{v}_b と *Hydraulic Diameter* $= 2D$ に基づくレイノルズ数) の発達した乱流の解析結果と実験ならびに他の数値解析結果⁴³⁾⁻⁵⁰⁾を示す。このレイノルズ数の計算を選んだ理由は Melling and Whitelaw の $R_e=42000$ の実験値²⁹⁾ との比較を考慮したためである。

各図から、通常の等方 $k-\epsilon$ モデルでは再現できなかった2次流が表現され、平均流速や乱流エネルギーなどの等値線が角 (corner) へ引き込まれるなど矩形管内乱流の諸特徴がよく現わされていることがわかる。全体的な実測値との比較は妥当なものと思われる。なお、2次流れの発生機構については、モデルの検討から Speziale が¹⁰⁾、LESによる数値解析において梶島らが⁵¹⁾論議している。それによると、(27)から(31)の乱流強度の大きさの差、例えば、 $\langle v_2 v_3 \rangle - \langle v_3 v_2 \rangle$ が2次流の発生に欠かせない事が解明されている。この乱流強度が3方向とも同値の等方 $k-\epsilon$ モデルでは、図11の Demuren らの結果からも伺えるように2次流を再現することができない。なお、

非等方項の定数 C_{τ_2} を零にしても, C_{τ_1} と C_{τ_3} が一定の対応関係にあれば 2 次流を再現出来る事は確かである。

図17 (あるいは図18) のレイノルズ応力における問題点と, 未定であった非等方項の定数 C_{τ_2} の検討を行ってみよう。図17の全体的傾向は数値解析と実測値は一致していると見えるが, (0.3, -0.7) 付近の実験での閉じた等値線はこの計算では再現されていない。実験値のその値は負であるが, 計算では正となっている。(3)~(9) 式から $\langle v_1'v_2' \rangle$ は,

$$\langle v_1'v_2' \rangle = -R_{12} = -\nu_e \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + \tau_1 \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\tau_2}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2} \right) \quad (36)$$

この付近では $d\bar{v}_1/dx_2 \ll d\bar{v}_1/dx_3$ であるから

$$\langle v_1'v_2' \rangle \sim -\nu_e \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + \tau_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} + \frac{\tau_2}{2} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2} \quad (37)$$

となる。 ν_e の C_{ν} と τ_1 の C_{τ_1} はすでに溝乱流で最適化されており, 自由度が残っている定数は τ_2 の C_{τ_2} だけである。図11と図12よりこの付近では $d\bar{v}_1/dx_3 > 0$, $d\bar{v}_2/dx_2 < 0$ であるから, もし C_{τ_2} を正と選ぶと $\langle v_1'v_2' \rangle$ は負になり得る。この正の予想値はSpeziale¹⁰⁾ やRubinstein⁴⁰⁾ のものと一致している。しかし, 私達は(13)のように $C_{\tau_2} = -0.37 < 0$ と選んだ。なぜなら, この値を正にしていくと 2 次流が減少し矩形管内乱流の諸特性が著しく貧弱になってしまうからである。この定数の最適化問題は, これと密接な関係にある壁減衰関数の決定と合わせて一つの研究課題である。

最後に, 応力モデルや代数モデルによる数値解析との比較を行ってみる。図11~18から, これらのモデルは矩形管内乱流解析に有効であることが実証される。しかし, 3次元乱流への適用を考えた場合, 応力モデルや代数モデルは方程式の数とモデル定数が多くなり, この点では非等方 $k-\epsilon$ モデルのが扱いやすいであろう。さらに, 応力モデル等による数値解析では, 壁上の境界条件としては経験則の使用が一般的で滑り無し境界条件の使用はほとんどなされていない。この滑り無し境界条件の使用でも $k-\epsilon$ モデルのが扱いやすいと思われる。なお, 図19に壁近くの主流速についての, 数値解析値と対数速度則の関係を表わしておいた。

6. 結 論

非等方 $k-\epsilon$ モデルによる本研究は, 溝乱流のシミュレーションにおいて最適化されたモデル定数, 壁減衰関数を修正させることなく, 2次流を伴うより複雑な乱流場をシミュレートできることを示した。特に, 等方 $k-\epsilon$ モデルでは再現できない溝乱流における乱流強度の非等方な分布, 正方形管内乱流での2次流の諸特性とそれより生じる主流への影響等を定量的にも明らかにすることが

できた。本非等方 $k-\epsilon$ モデルが2次流および乱流強度の非等方性を再現できることを考えると, このモデルはよく離れを伴う乱流, 噴流等の等方 $k-\epsilon$ モデルが必ずしもよい結果を与えない流れに有効に適用できる可能性がある。壁減衰関数の改善・非等方項の一層の最適化等を進めることにより, このモデルがさまざまな形状の乱流の数値解析においてより有効なものになる可能性が強い。

謝 辞

この研究を進めるにあたり, 特にモデルに関して吉澤徹, モデル定数の検討は竹光信正, 数値計算法については堀内潔の各博士とNST (乱流の数値解析) グループに有益な討論と助言を受けました。さらに, 数値計算の実行に当たっては電子計算機室の各氏から多大な援助と協力をいただきました。ここに報告するとともに, 感謝の意を表明します。

なお, 竹光信正氏は1990年6月のカナダでの学会出席中に交通事故に遭われ亡くなられました。生前の公私に渡るご教授と援助に感謝すると共に謹んで哀悼の意を表します。

(1990年9月21日受理)

参 考 文 献

- 1) Bradshaw, P., Cebeci, T., and Whitelaw, J.H., Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow, Academic Press (1981), 37.
- 2) Lumley, J.L., (Kollmann, W.編), Prediction Methods for Turbulent Flows, Hemisphere (1980), 1.
- 3) Yoshizawa, A., Phys. Fluids, 27 (1984), 1377.
- 4) 西島・吉澤, ながれ 4 (1985), 131.
- 5) 西島・吉澤, ながれ 5 (1986), 147.
- 6) Nisizima, S. and Yoshizawa, A., AIAA J., 25 (1987), 414.
- 7) 西島, 機械学会論文集B, 53-495 (1987), 3166.
- 8) 西島, 機械学会論文集B, 55-512 (1989), 991.
- 9) Nisizima, S., Theoret. Comput. Fluid Dynamics, 2 (1990), 61.
- 10) Speziale, C.G., J. Fluid Mech., 178 (1987), 459.
- 11) Speziale, C.G., and Ngo, T., Internat. J. Engrg. Sci., 26 (1988), 1099.
- 12) Hur, N., Thangam, S., and Speziale, C.G., Trans. ASME, J. Fluids Eng., 112 (1990), 205.
- 13) 明・笠木, ながれ別冊 (1988), 10.
- 14) 明・小林, 生産研究, 42 (1990), 63.
- 15) 小林・大町・明, 生産研究, 42 (1990), 67.
- 16) Yoshizawa, A., Phys. Fluids, 28 (1985), 59.
- 17) Yoshizawa, A., Phys. Fluids, 30 (1987), 628.
- 18) Laufer, J., NACA Rep., 1053 (1951).
- 19) Clark, J.A., Trans. ASME, J. Basic Eng., 90 (1968), 455.
- 20) Patel, V.C., Rodi, W., and Scheuerer, G., AIAA J., 23 (1984), 1308.
- 21) Kreplin, H. and Eckelmann, M., Phys. Fluids, 22

- (1979), 1233.
- 22) Hussain, A.K.M.F. and Reynolds, W.C., Trans. ASME, J. Fluids Eng., 112 (1990), 192.
- 23) Takemitsu, N., Trans. ASME, J. Fluids Eng., 112 (1990), 192.
- 24) Takemitsu, N., A New Model Rectifying the Stiffness of Modl Constants, Trans. ASME, J. Fluids Eng., (投稿中).
- 25) Speziale, C.G. and Mhuiris, N.M.G., J. Fluid Mech., 209 (1989), 591.
- 26) Melling, A. and Whitelaw, J.H., J. Fluid Mech., 78 (1976), 289.
- 27) Jones, W.P. and Launder, B.E., Int. J. Heat Mass Transfer, 15 (1972), 301.
- 28) Jones, W.P. and Launder, B.E., Int. J. Heat Mass Transfer, 16 (1973), 119.
- 29) Lam, C.K.G. and Bremhorst, K., Trans. ASME, J. Fluids Eng. 103 (1981), 456.
- 30) Chien, K-Y., AIAA J., 20 (1982), 33.
- 31) 長野・新美・田川, 第三回生研NSTシンポジウム講演論文集 (1988), 31.
- 32) 明・笠木, 機械学会論文集B, 54-507 (1988), 3003.
- 33) Moin, P. and Kim, J., J. Fluid Mech., 118 (1982), 341.
- 34) Horiuti, K., J. Comp. Phys., 71 (1987), 343.
- 35) 下村, 生産研究, 41 (1989), 80.
- 36) Mansour, N.N., Kim, J., and Moin, P., AIAA J., 27 (1989), 1068.
- 37) Hanjalic, K. and Launder, B.E., J. Fluid Mech., 74 (1976), 593.
- 38) Nakao, S., AIAA J., 22 (1984), 303.
- 39) Horiuti, K., Theoret. Appl. Mech., 31 (1981), 407.
- 40) Rubinstein, R. and Barton, J.M., Phys. Fluids, A2 (1990), 1472.
- 41) Hamba, F., J. Phys. Soc. Japan, 56 (1987), 3771.
- 42) Briley, W.R., J. Comput. Phys., 14 (1974), 8.
- 43) Gessner, F.B. and Emery, A.F., J. Fluids Engrg., 98 (1976), 261.
- 44) Gessner, F.B. and Po, J.K., J. Fluids Engrg., 98 (1976), 269.
- 45) Gessner, F.B. and Emery, A.F., J. Fluids Engrg., 103 (1981), 445.
- 46) Demuren, A.O. and Rodi, W., J. Fluid Mech., 140 (1984), 189.
- 47) Nakayama, A., Chow, W.L., and Sharama. D., J. Fluid Mech., 128 (1983), 199.
- 48) Nakayama, A., Chow, W.L., and Sharama. D., Bull. JSME, 27・No. 229 (1984), 1438.
- 49) Nakayama, A. and Chow, W.L., Encyclopedia of Fluid Mechanics, Gulf Publishing Company, 1 (1986), 638.
- 50) Baker, A.J. and Orzechowski, J.A., AIAA J., 21 (1983), 524.
- 51) 梶島・三宅・西本, 機械学会論文集, 正方形断面流路内の乱流のLES, 投稿中.