研　究　速　報

特　集　6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　UDC 533.735：536.23

熱駆動乱流のモデリング

Modeling of Thermally Driven Turbulence

吉　澤　　徴*

Akira YOSHIZAWA

熱浮力作用によって生じる乱流のモデル化を統計理論［TSDIA (two-scale DIA)］からの結果を用いて構成する．本モデルは平均場方程式に加えて，単位質量当たりの乱流エネルギー，同散逸率および密度揺らぎ強度に対する3輸送方程式から成立している．

1．は　じ　め　に

工学機器における伝熱能率，天体物理現象，特に星内部における熱輸送等の研究においては，熱による浮力作用がしばしば本質的役割を演じる．これらの現象の研究では，密度変化を温度変化で代替する「ブジネスク近似」が通常採用されている．しかし，同近似は温度差が大きくなると，近似の前提が崩れることになる．たとえば，大火災のような強い浮力作用下での乱流現象ではその有効性は懸念されている．

上述の事情はブジネスク近似に基づく乱流モデルに少なからず反映している．浮力を伴う乱流を扱う際，現存の乱流モデルは必ずしも満足すべき結果を与えないが，モデル化そのものが不備であるのか，またはブジネスク近似自身が適当でないのか明白ではない．本研究では，ブジネスク近似を用いずに浮力作用下の乱流をモデル化する試みを述べる．

2．基　礎　方　程　式

粘性を持つ圧縮性流体の基礎方程式は，質量，運動量，エネルギーの保存則によって与えられる：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\rho u_i u_j=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\mu s_{ij}+\rho g_i, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho e+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}e)=\nabla\cdot(\kappa\nabla\theta)-p\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\phi. \tag{3}$$

ここで，$\boldsymbol{u}$は速度，ρは密度，pは圧力，eに内部エネルギー，θは温度，gは重力加速度，ϕは単位質量当たりのエネルギー散逸率であり，繰り返し添え字については縮約の規則を採用する．パラメータμ，κはそれぞれ粘性率，熱伝導率であり，s_{ij}とϕは

$$\phi=\mu\left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2+\frac{1}{3}(\nabla\cdot u)^2\right], \tag{4}$$

$$s_{ij}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot u. \tag{5}$$

さらに，流体は完全気体であるとし，

$$e=C_v(\theta)\theta, \tag{6}$$

$$P=R\rho\theta=(\gamma-1)\rho e \tag{7}$$

と書く，Rは気体定数，C_vは定積比熱，$\gamma(=C_p/C_v$；C_pは定圧比熱）は比熱比である．

ここで，ブジネスク近似について述べておこう．同近似では，

$$\rho-\rho_s\propto\theta_s-\theta \tag{8}$$

とする（添え字Sは基準を意味する）．(8)を(1)に代入すると，$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$の条件下では，

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}\theta)=0 \tag{9}$$

を得る．(9)は$\kappa=0$とおいた(3)に対応する．それゆえに，(3)の熱伝導あるいは熱拡散効果が無視できるときは，(1)と(3)は矛盾しない．しかし，乱流中では，熱エネルギーのカスケード過程として同効果はしばしば本質的役割を演じる．このようなときは，ブジネスク近似の無矛盾性は破れることになる．

3．平均と揺らぎ

アンサンブル平均または時間平均を用いて，物理量fを平均Fと揺らぎf'に分ける：

$$f=f+f',\ F=\langle f\rangle. \tag{10}$$

ここで，

$$f=(\rho,\boldsymbol{u},e,\theta,p,\phi,s_{ij}), \tag{11a}$$

$$F=(\rho_M,\boldsymbol{U},E,\Theta,P,\Phi,S_{ij}), \tag{11b}$$

$$f'=(\rho',\boldsymbol{u}',e',\theta',p',\phi',s'_{ij}), \tag{11c}$$

(1)－(3)より，平均場の方程式は，

*東京大学生産技術研究所　第1部

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_M \boldsymbol{U})=0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_M U_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\rho_M U_i U_j=-(\gamma-1)\frac{\partial}{\partial x_i}\rho_M E + \frac{\partial}{\partial x_j}(R_{ij}+\mu S_{ij})+\rho_M g_i, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_M E+\nabla\cdot(\rho_M \boldsymbol{U}E)=\nabla\cdot\left[-\boldsymbol{H}+\kappa\nabla\frac{E}{C_v}\right] -P\nabla\cdot\boldsymbol{U}+\Phi+\chi. \tag{14}$$

ここで，レイノルズ応力R_{ij}，乱流熱輸送率$\boldsymbol{H}$，膨張ないし収縮揺らぎによる仕事率χ，単位質量当たり平均的乱流エネルギー散逸率Φは，

$$R_{ij}=-(\langle\rho u_i u_j\rangle-\rho_M U_i U_j), \tag{15}$$

$$\boldsymbol{H}=\langle\rho \boldsymbol{u}e\rangle-\rho_M \boldsymbol{U}E, \tag{16}$$

$$\chi=-\langle\rho'\nabla\cdot\boldsymbol{u}'\rangle, \tag{17}$$

$$\Phi\fallingdotseq\mu\left\langle\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2+\frac{1}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{u}')^2\right\rangle. \tag{18}$$

4．3方程式モデル

方程式(1)—(3)を閉じるためには，R_{ij}等がどのような関数形で数学的に表現されるかを知らなければならない．最近，著者は衝撃波／乱流干渉を研究するためにTSDIA (two-scale DIA) を用いて，上記の量を解析した[1]．ここでは，熱浮力作用下で重要と思われる項のみを残して，熱駆動乱流モデルを構成する（浮力効果についての詳細は，文献1)の付録Dを参照)．

上記の目的のために，熱駆動乱流の揺らぎを特徴づける量として，

$$k_\rho=\langle\rho'^2\rangle, \tag{19}$$

$$k=\langle\boldsymbol{u}'^2\rangle/2, \tag{20}$$

$$\varepsilon=\Phi \tag{21}$$

を導入する．これらの量を用いると，

$$R_{ij}=C_\mu\rho_M\frac{k^2}{\varepsilon}S_{ij}+C_{BR}\frac{1}{\rho_M}\frac{k^3}{\varepsilon^2}B_{ij}, \tag{22}$$

$$H=-C_\kappa\rho_M\frac{k^2}{\varepsilon}\nabla E-C_{BH}\frac{k_\rho}{\rho_M}\frac{k^3}{\varepsilon^2}Eg, \tag{23}$$

$$\chi=0. \tag{24}$$

ここで，

$$B_{ij}=g_i\frac{\partial k_\rho}{\partial x_j}+g_j\frac{\partial k_\rho}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}g\cdot\nabla k_\rho. \tag{25}$$

(24)において，χは浮力に関連した項は持たないが，航空力学等の強い圧縮性を伴う高速流においては重要となりうることを注意しておく．

k, ε, k_ρに対するモデル方程式は，

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_M k+\nabla\cdot(\rho_M \boldsymbol{U}k)=P_k-(\rho_M\varepsilon+\chi) +\nabla\cdot\left[C_k\rho_M\frac{k^2}{\varepsilon}\nabla k\right], \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_M\varepsilon+\nabla\cdot(\rho_M \boldsymbol{U}\varepsilon)=C_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{k}P_k-C_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon}{k}(\rho_M\varepsilon+\chi) +\nabla\cdot\left[C_{\varepsilon3}\rho_M\frac{k^2}{\varepsilon}\nabla\varepsilon\right], \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}k_\rho+\nabla\cdot(k_\rho\boldsymbol{U})=-k_\rho\nabla\cdot\boldsymbol{U}-C_{\rho1}\frac{\varepsilon}{k}k_\rho +\nabla\cdot\left[C_{\rho2}\frac{k^2}{\varepsilon}\nabla k_\rho\right]. \tag{28}$$

ここで，C_k等はモデル定数である．

5．補 足 と 考 察

(24)より(26)，(27)においてχは必要としない．しかし，正しくは(26)の形で現れるため，この項が必要なときは，ε方程式も(27)となることを示すためにあえてχを残した．また，(26)，(27)にはそれぞれ，

$$g\cdot\langle\rho'\boldsymbol{u}'\rangle,\ C_{\varepsilon4}\frac{\varepsilon}{k}g\cdot\langle\rho'\boldsymbol{u}'\rangle \tag{29}$$

が付加されるべきである．しかし，統計理論[1]からの示唆によると，$\langle\rho'\boldsymbol{u}'\rangle$は乱流エネルギーの圧縮性部分の空間勾配と関係付けられることがわかる．本モデルでは，乱流エネルギーの圧縮および非圧縮部分を区別していないこと，高速流以外の場合は前者は後者に比べて小さいと予想されるので，これに関連した項を落とした．ブジネスク近似においては，この事情は大いに異なっている．同近似においては，$g\cdot\langle\rho'\boldsymbol{u}'\rangle$に対応して$g\cdot\langle\theta'\boldsymbol{u}'\rangle$に比例する項が現れ，後者は (23) の第一項を用いると温度勾配と関係づけられる．すなわち，ブジネスク近似では温度勾配があると浮力効果と乱流エネルギー輸送方程式が直ちに結び付き，温度に大変敏感である．他方，本来の浮力作用下で乱流エネルギーの圧縮性部分の勾配が大きくないかぎり，この効果は重要とはならない．この点は，2節で述べたブジネスク近似の整合性と併せて留意すべき点と思われる．

最後に，モデル定数について述べる．本モデルでは，

R_{ij}：$C_\mu(\fallingdotseq0.09), C_{BR}$；

H：$C_\kappa(\fallingdotseq0.12), C_{BH}$；

k方程式：$C_k(\fallingdotseq0.09)$；

ε方程式：$C_{\varepsilon1}$ $(\fallingdotseq1.4), C_{\varepsilon2}(\fallingdotseq1.9)$,

$C_{\varepsilon3}(\fallingdotseq0.069)$；

ρ方程式：$C_{\rho n}(n=1.2)$.

ここで，括弧内の数値は非圧縮性乱流において通常用いられるものである[2]．

謝　辞

本研究の基本部分となった理論的研究に関しては，故竹光信正富山県立大学助教授より多大の示唆を受けましたことを記し，謹んで哀悼の意を表します．

(1990年10月1日受理)

参考文献

1) A. Yoshizawa: Phys. Fluids **A2**, 838 (1990).
2) P. Bradshaw, et al.: Engineering Methods for Turbulent Flow (Academic, 1981).