

# バックステップ流れにおける $k-\epsilon$ モデルの検討

## —LES データベースを用いた評価—

Assessment of  $k-\epsilon$  Model on the Backward-Facing Step Flow  
—Estimation using LES data base—

森 西 洋 平\*・小 林 敏 雄\*・富 樫 盛 典\*\*  
Youhei MORINISHI, Toshio KOBAYASHI and Shigenori TOGASHI

### 1. 緒 言

バックステップ乱流は、はく離を含む乱流場の中で最も基本的なものであり、また流れ場形状が単純であることもあって、乱流モデルの検討を行う流れ場の一つとして用いられてきた。しかしながら、はく離域をも網羅した乱流量の詳細なデータはごく最近の一部の実験を除き存在せず、この流れ場における乱流量をも含めたモデルの評価には限界があった。著者らは近年、バックステップ乱流の LES 計算を実行し、速度場、レイノルズ応力の各成分等に関する詳細なデータを得た<sup>1)2)</sup>。

一方、従来より多くの応用問題に適用されてきた  $k-\epsilon$  モデルでは、バックステップ流れの最も代表的な要素である再付着距離さえも十分に再現できないことが知られている。この原因の一つとして、レイノルズ応力に対する等方的渦粘性表現の使用が考えられる。これに対し、 $k-\epsilon$  モデルにおける渦粘性表現を改善するため、レイノルズ応力の非等方表現が提案され<sup>3)</sup>、チャンネル乱流<sup>4)</sup>やダクト内乱流<sup>5)</sup>によりモデルの最適化が行われてきた。

本報では、レイノルズ応力の等方および非等方表現を用いた  $k-\epsilon$  モデルをバックステップ流れに適用し、解析結果を LES のデータと比較することにより、非等方  $k-\epsilon$  モデルの検討を行う。

### 2. レイノルズ応力の等方・非等方表現

通常の 2 次元  $k-\epsilon$  モデルでは、レイノルズ応力の各成分に対し次の等方的渦粘性近似が仮定される。

等方モデル

$$\overline{u'u'} = \frac{2}{3}k - 2\nu_t \frac{\partial U}{\partial x} \tag{1}$$

$$\overline{v'v'} = \frac{2}{3}k - 2\nu_t \frac{\partial V}{\partial y} \tag{2}$$

$$\overline{u'v'} = -\nu_t \left[ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right] \tag{3}$$

ここで、渦粘性係数  $\nu_t$  は次式で表現される。

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad C_\mu = 0.09 \tag{4}$$

このモデルに対し、レイノルズ応力の非等方的挙動を再現するモデルが提案され<sup>3)</sup>、モデルの最適化も行われてきている<sup>4)5)</sup>。このモデルを二次元問題に対して書き下し、連続の式を用いて整理すると以下ようになる<sup>6)</sup>。

非等方モデル

$$\begin{aligned} \overline{u'u'} = & \frac{2}{3}k - 2\nu_t \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{k}{\epsilon} \nu_t \{ (C_1 + C_2 + C_3) \cdot \\ & \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \right]^2 + (2C_1 - C_3) \cdot \left[ \frac{\partial U}{\partial y} \right]^2 + C_2 \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \\ & + (-C_1 + 2C_3) \cdot \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \right]^2 \} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \overline{v'v'} = & \frac{2}{3}k - 2\nu_t \frac{\partial V}{\partial y} \\ & + \frac{1}{3} \frac{k}{\epsilon} \nu_t \{ (C_1 + C_2 + C_3) \cdot \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \right]^2 \\ & + (2C_1 - C_3) \cdot \left[ \frac{\partial V}{\partial y} \right]^2 + C_2 \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \\ & + (-C_1 + 2C_3) \cdot \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \right]^2 \} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \overline{u'v'} = & -\nu_t \left[ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right] \\ & + \frac{k}{\epsilon} \nu_t (C_1 - C_3) \cdot \left[ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right] \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned} \tag{7}$$

式(5)~(7)それぞれの二行目以降が非等方表現のために付加された項である。非等方モデル中の新たなモデル定数として次の値が提案されている<sup>4)5)</sup>。

$$C_1 = 0.63, \quad C_2 = -3.67, \quad C_3 = -0.07.$$

### 3. バックステップ乱流の数値解析手法

$k-\epsilon$  モデルによる乱流解析の基礎式は、連続の式、 $x$  方

\*東京大学生産技術研究所 第 2 部

\*\*東京大学大学院工学系研究科

研 究 速 報

向速度  $U$  と  $y$  方向速度  $V$  の運動方程式および乱流エネルギー  $k$  と乱流散逸率  $\epsilon$  の輸送方程式で、本報で取り扱う 2 次元非圧縮流の場合、以下のように記述される<sup>7)</sup>。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial(UU)}{\partial x} + \frac{\partial(VU)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial(-u'u')}{\partial x} + \frac{\partial(-u'v')}{\partial y} \tag{9}$$

$$\frac{\partial(UV)}{\partial x} + \frac{\partial(VV)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial(-u'v')}{\partial x} + \frac{\partial(-v'v')}{\partial y} \tag{10}$$

$$\frac{\partial(Uk)}{\partial x} + \frac{\partial(Vk)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right] + G - \epsilon \tag{11}$$

$$\frac{\partial(U\epsilon)}{\partial x} + \frac{\partial(V\epsilon)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] + C_{E1} \frac{\epsilon}{k} G - C_{E2} \frac{\epsilon^2}{k} \tag{12}$$

ここで、

$$G = \overline{u'u'} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{v'v'} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{u'v'} \cdot \left[ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right] \tag{13}$$

また、モデル定数として

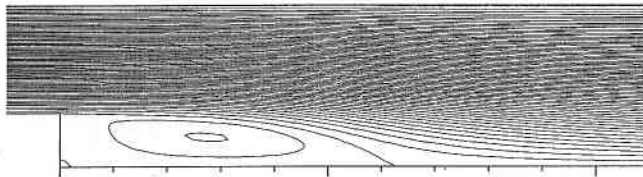
$$\sigma_k = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3, C_{E1} = 1.44, C_{E2} = 1.92$$

を用いる<sup>7)</sup>。

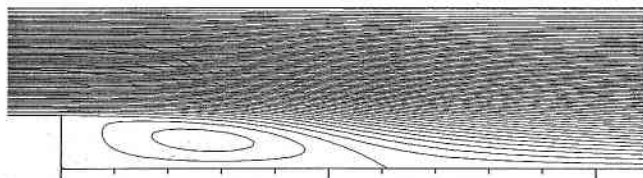
解析対象はステップ拡大率 1.5 のバックステップを有するチャンネル内流れで、ステップ高さ  $H$  と流入部最大速度  $U_0$  によるレイノルズ数は 46000 に設定されている。解析領域は流入部からステップまで  $4H$ 、ステップから流出部までが  $30H$  となっている。この領域を  $230 \times 50$  の不等間差分格子で離散化し、スタガード格子系により流れ場を表現する。レイノルズ応力の近似としては、式 (1)~(3) の等方モデル、および式 (5)~(7) の非等方モデルを導入する。非等方表現の高次項の影響を正確に取り入れるため、対流項の離散化には高精度差分である QUICK スキームを導入している<sup>8)</sup>。流入部の流れ場には LES の計算により求めた十分に発達したチャンネル乱流の結果を用い、流出部では流れ場の一次微分係数を零に設定する。壁面は壁関数<sup>7)</sup>により表現する。離散式系は SIMPLE アルゴリズム<sup>9)</sup>により解かれる。収束判定条件としては、すべての輸送量  $\phi$  に関する離散化式  $A\phi = b$  に対し、

$$\frac{\|A\phi - b\|_2}{\|b\|_2} < 10^{-6}$$

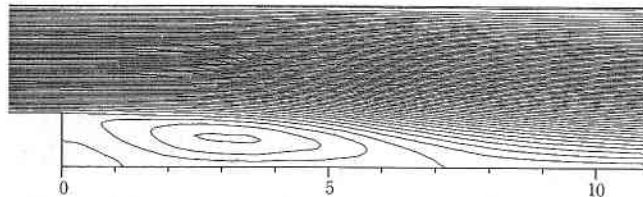
が課されている。ここで、 $\|\cdot\|_2$  はベクトルの二乗ノル



(c) 非等方モデル



(b) 等方モデル



(a) LES データ

図 1 流線図

ムである。

4. 解析結果および考察

レイノルズ応力の等方および非等方表現を用いた  $k-\epsilon$  モデルの計算結果を, LES によるデータ<sup>10,11)</sup>と比較して示す。LES データの信頼性については, 実験結果<sup>10,11)</sup>との比較によりすでに論じられている。

図 1 に流線図を示す。LES データによる再付着距離  $h_R$  は  $7.2H$  で, 従来の実験結果<sup>10,11)</sup>とほぼ一致している。等方モデル使用による  $h_R$  は  $6.1H$  で再付着距離を正しく再現できていない。非等方モデルの使用によっても  $h_R$  は  $6.3H$  で, 再付着距離はわずかに改善されるのみである。これは図 2 の平均速度分布によっても確認できる。非等方モデルの使用による平均速度場の改善はステップ後方の剪断層のわずかな部分にとどまる。図 3 のレイノルズ応力についても, 非等方モデル使用による改善はあまり見られない。

図 4 に乱流エネルギーの分布, 図 5 に主流方向の乱流強度の分布を示す。再循環領域で非等方モデルの使用による乱流エネルギーの改善が見られる。主流方向乱流強度分布では, 非等方モデルの使用により, 再循環領域での改善に加え, 上壁面近傍やステップ直後の非等方的挙動についても改善されている。

ここで非常に興味深いのは, 平均速度場があまり改善されていないにもかかわらず, 図 6 に示される壁面圧力分布については非等方モデルの使用によりかなりの改善が見られることである。これは, 平均速度場と独立に, 非等方モデルが垂直応力成分について確実に改善をもたらしていることを意味している。

以上の非等方モデル使用による結果は, レイノルズ応力の非等方表現を流線座標で表示すると理解しやすくなる。流線の接線方向を  $S$ , それに垂直な方向を  $N$ , それぞれの方向の速度を  $U_S$  と  $U_N$  と定め, 等方モデルの式 (1) ~ (3) と非等方モデルの式 (5) ~ (7) を流線座標上へ変換し, 剪断応力, および二次流れに影響を及ぼす垂直応力の差を記述すると以下ようになる<sup>9)</sup>。

等方モデル

$$\overline{u_s' u_s'} - \overline{u_n' u_n'} = -2 \cdot \nu_t \cdot \left[ \frac{\partial(U_S)}{\partial S} - \frac{\partial(U_N)}{\partial N} \right] \quad (14)$$

$$\overline{u_s' u_n'} = -2 \cdot \nu_t \cdot \left[ \frac{\partial(U_S)}{\partial N} + \frac{\partial(U_N)}{\partial S} \right] \quad (15)$$

非等方モデル

$$\begin{aligned} \overline{u_s' u_s'} - \overline{u_n' u_n'} &= -2 \cdot \nu_t \cdot \left[ \frac{\partial(U_S)}{\partial S} - \frac{\partial(U_N)}{\partial N} \right] \\ &+ \frac{k}{\epsilon} \cdot \nu_t \cdot (C_1 - C_3) \cdot \left[ \frac{\partial(U_S)}{\partial N} - \frac{\partial(U_N)}{\partial S} \right] \cdot 2. \end{aligned}$$

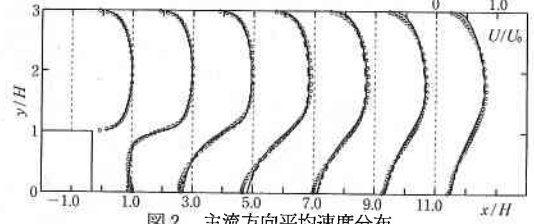


図 2 主流方向平均速度分布

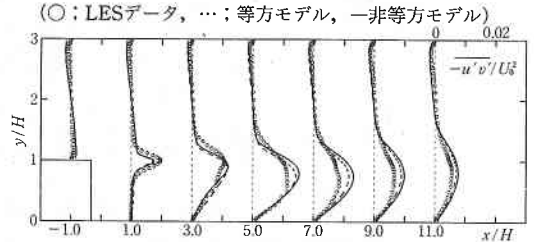


図 3 レイノルズ応力分布

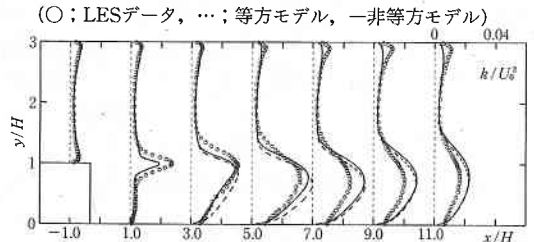


図 4 乱流エネルギー分布

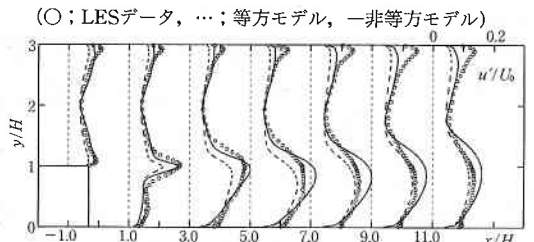


図 5 主流方向乱流強度分布

(○; LESデータ, …; 等方モデル, —非等方モデル)

$$\left[ \frac{\partial(U_S)}{\partial N} + \frac{\partial(U_N)}{\partial S} \right] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \overline{u_s' u_n'} &= -2 \cdot \nu_t \cdot \left[ \frac{\partial(U_S)}{\partial N} + \frac{\partial(U_N)}{\partial S} \right] \\ &- \frac{k}{\epsilon} \cdot \nu_t \cdot (C_1 - C_3) \cdot \left[ \frac{\partial(U_S)}{\partial N} - \frac{\partial(U_N)}{\partial S} \right] \\ &\cdot \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\partial(U_S)}{\partial S} - \frac{\partial(U_N)}{\partial N} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

式 (16) と (17) 中で, 右辺第二項目が非等方表現による付加項に対応する。ところで, 式 (14) の等方モデルでの垂直応力の差は流線が平行な所で小さな値となるが, 式 (16) では非等方表現による付加項が垂直応力の予測値改善をもたらす, 二次流れ等が表現できるものとなる。一

研究速報

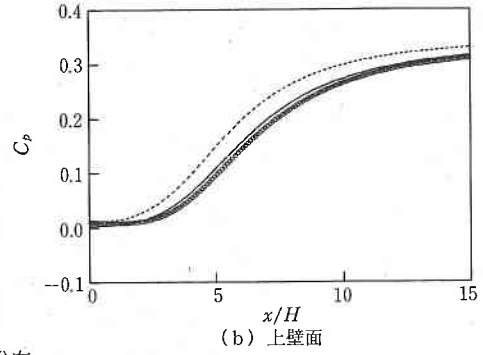
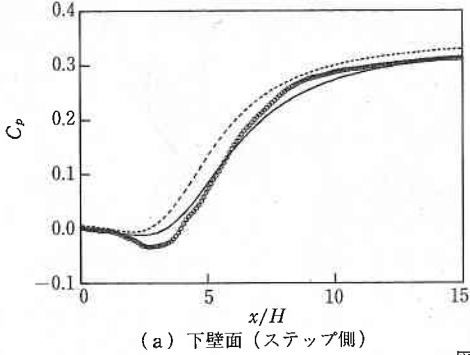


図6 壁面圧力分布

(○: LESデータ, ...: 等方モデル, —非等方モデル)

方, 式(17)の剪断応力における非等方表現の付加項は, 流線が平行な所で式(16)の付加項と比較して小さく, 式(15)の等方モデルに対してあまり改善を与えない。

以上の理由により, ステップ後方の流線方向の剪断応力が平均速度場に対して支配的なバックステップ乱流では, 非等方モデルの使用によっても平均速度場にあまり改善が見られなかったものと考えられる。これより, バックステップ乱流の再付着距離をより正確に予測するためには, レイノルズ応力の非等方表現以外に, 流線方向の剪断応力の予測精度の改善が必要なることがわかる。一方, 垂直応力成分については非等方モデルにより予測精度が改善され, これより速度場とは独立に壁面圧力分布が改善されたものと考えられる。

5. 結 論

バックステップ乱流について, レイノルズ応力の等方および非等方表現を用いた $k-\epsilon$ モデルによる解析を行い, 計算結果をLESのデータと比較することにより非等方モデルの検討を行った。その結果, 非等方モデルはステップ後方の流線方向に働く剪断応力成分にあまり改善を与えないため, 非等方モデルの導入のみでは, 再付着距離の予測値を大きく改善することはできないこと, 非等方

モデルは乱流エネルギーや乱流強度に加え, 垂直応力に關係する圧力分布についても速度場と独立に改善を与えること, 等が確認された。(1990年10月18日受理)

参 考 文 献

- 1) Morinishi, M., and Kobayashi, T., "Engineering Turbulence Modelling and Experiments (Rodi and Ganic)", Elsevier, p 245-248 (1990).
- 2) 森西, 小林, 生産研究, 43-1, p 4-11 (1991).
- 3) Yoshizawa, A., Phys. Fluids 27, p 279-286 (1984).
- 4) Nishijima, S. and Yoshizawa, A., AIAA J. 25, p 414-420 (1987).
- 5) 西島勝一, 機論(B編) 55巻512号, p 991-998 (1989).
- 6) 大町真義, 東京大学修士論文(1990).
- 7) Launder, B.E. and Spalding, D.B., Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. 3, p 269-289 (1976).
- 8) Leonard, B.P., Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. 19, p 59-98 (1979).
- 9) Patankar, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere, p 113-135 (1980).
- 10) Kim, J., Kline, S.J. and Johnston, J.P., Technical Report MD-37, Thermosciences Div., Dept. of Mech. Eng., Stanford University, (1978).
- 11) 伊藤信明, 笠木伸英, 流れの可視化 9, No. 34, p 245-248 (1989).