

研究速報

$$v_e = \frac{3}{2} C_\nu \frac{k}{\varepsilon} \left[\frac{2}{3} k - \frac{2}{3} \frac{1}{C_\nu} \frac{k^3}{\varepsilon^2} \right. \\ \left. \left\{ \frac{C_{A1} + C_{A2}}{4} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_m} + \frac{\partial U_m}{\partial x_i} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{C_{A1} - C_{A2}}{4} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_m} - \frac{\partial U_m}{\partial x_i} \right)^2 \right\} \right]. \quad (3)$$

となる。(3)の第2項は通常正であり、渦粘性係数の強度を減少させる役割を果たす。ここに、[]括弧内の項は、乱流強度の2次の非等方表現に対応することに留意されたい。C_{A1}とC_{A2}の理論値は、おのおの0.119, 0.0424である。ここで、非等方表現と代数応力モデル(ASM)⁹⁾との関係に言及したい。ASMでは、レイノルズ応力u_iu_jの輸送方程式を代数化して、次のようなモデル化を行う。

$$\langle u_i u_j \rangle \frac{P - \varepsilon}{k} = P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{k} (\langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} k) \\ - \gamma k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ - \alpha \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \\ - \beta \left(D_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right). \quad (4)$$

ここに、

$$P_{ij} = -\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \langle u_j u_i \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \\ D_{ij} = -\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \langle u_j u_i \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \quad P = P_{nm}/2.$$

である。(4)式の左辺は、レイノルズ応力の輸送および拡散項にたいするモデル⁹⁾であり、右辺の第1項は生成項、第2項は散逸項、第3項から第6項はpressure-strain項のモデル¹¹⁾である。このモデルは、実際上u_iu_jの6成分が複雑にカップルしているので、数値的には通常u_iu_j⁽⁰⁾の初期値を2δ_{ij}k/3と置き、(4)式への反復代入を繰り返すことにより収束させ解を求めている。ここに、右上の()内の数字は、反復の回数を示す。ここでは、この過程を解析的に追ってみる。反復を2回繰り返した後、u_iu_jは次式のように表現される：

$$\langle u_i u_j \rangle^{(2)} = \delta_{ij} \left[\frac{2}{3} k - \frac{2}{3} \frac{1}{C_1^2} \bar{\gamma} (1 - \alpha - \beta) \right. \\ \left. \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_m} + \frac{\partial U_m}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right] \\ - \left[\left\{ \frac{1}{C_1} \left(1 + \frac{1}{C_1} \right) \bar{\gamma} \frac{k^2}{\varepsilon} - \frac{1}{C_1^2} \bar{\gamma} \frac{k^4}{\varepsilon^3} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\partial U_m}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right\} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

$$+ \left[\frac{\gamma}{C_1^2} \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left\{ 2(1 - \alpha) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \alpha - \beta) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + 2\beta \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right\} \right]. \quad (5)$$

ここに、 $\bar{\gamma} = \gamma + 2(1 - \alpha - \beta)/3$ である。ここで、非等方表現(3)式とASM(5)式の類似性に注意されたい。ただし、(3)式は、過度に関係した項を含んでおり、レイノルズ応力の座標の回転にたいする不変性を破っている¹²⁾。同様な展開手法により2次の非等方表現が得られることは、Rubinstein等¹³⁾によっても指摘されているが、そこでは、渦粘性係数にたいする付加項については、まったく言及されていない。DIAによるアプローチでは、(3)式の各項の起源を探るのは容易ではないので、ここでは、ASMに従ってたどってみる。ASMにおけるpressure-strain項のモデル¹¹⁾のチャンネル流の直接シミュレーション・データ・ベースを用いた検証は、壁の極近くを除いては、許容できる精度をもっていることを明らかにした¹⁴⁾。ここでは、ASMにおける輸送および拡散項のモデル⁹⁾をラージ・エディ・シミュレーション(LES)により生成されたチャンネル流のデータ・ベース^{15),16)}を用いて検証してみる。このLESデータ・ベースの生成には、下流方向(x)に128、壁方向(y)に129、横断方向に128の格子点を用い、壁面摩擦速度とチャンネル幅にもとづいたレイノルズ数(Re)を1280としてある。壁座標を以下y₊で示し、最初の格子点はy₊~0.8に配置してある。図1は、レイノルズ応力方程式中の拡散項のLESデータから得られた値と、(4)式の左辺によるASMモデル値の分布を示す。両者の一致は、u_iu_j/kの変化が大きい壁の極近くを除いては良好であり、ASMにおけるモデルがある程度信頼できることを示している。2次の非等方表現、(5)式の[]括弧内の項は、(4)式の生成およびpressure-strain項に由来している。(5)式中の渦粘性係数は

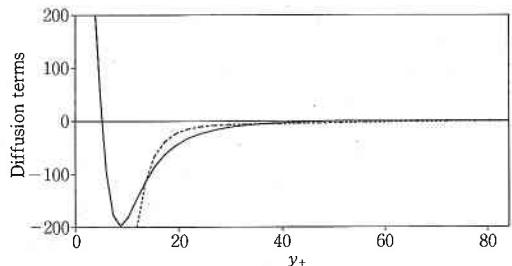


図1 レイノルズ応力の(1,1)成分のバランス方程式中の拡散項の分布。—; LESデータから得られた値, —(4)式左辺によるモデル値。

研究速報
 次式のように書き換えられる。

$$\nu_e^{(2)} = \frac{\bar{\gamma}}{C_1} \frac{k^2}{\epsilon} - \frac{\bar{\gamma}}{C_1^2} \frac{P^{(1)} - \epsilon k^2}{\epsilon},$$

$$P^{(1)} = \frac{\bar{\gamma}}{C_1} \frac{k^2}{\epsilon} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_m} + \frac{\partial U_m}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_m}. \quad (6)$$

すなわち、生成項と散逸項の不均衡が渦粘性係数に入ってくることになる。3 回目の反復での渦粘性係数は、

$$\nu_e^{(3)} = \frac{\bar{\gamma}}{C_1} \frac{k^2}{\epsilon} - \frac{1}{C_1} \nu_e^{(2)} \frac{P^{(2)} - \epsilon}{\epsilon} - \frac{1}{C_1^2} (1 - \alpha - \beta)^2 \frac{k^2}{\epsilon^2} P^{(1)}, \quad (7)$$

となる。ここに、

$$P^{(2)} = -\langle u_i u_m \rangle^{(2)} \frac{\partial U_i}{\partial x_m}$$

である。(7)式の第2および3項は3次の非等方表現を含んでいる。(6)式の場合と同様に、第2項は生成項と散逸項の不均衡から生じているが、第3項は(5)式中の δ_{ij} 項と $\partial U_j / \partial x_i$ との積、および、 δ_{ij} 項と $\partial U_i / \partial x_j$ との積に由来しており、乱流強度の非等方性に関係している。以上より、3次の非等方表現は、生成・散逸の均衡からのズレと乱流強度の非等方性に由来しているものと考えられる。(7)式は、2次および3次の非等方表現に加え、derivative skewnessに関係した4次の非等方表現も含んでいる。ここで、ASMは、平均速度の一階微分とその積のみから成るのにたいし、非等方表現は、高階の微分を含んでいる²⁻⁴⁾という両者の重要な相違に留意されたい。しかしながら、数値計算への高階微分の導入は、余分な境界条件を必要とするため、実用上はあまり望ましくないとと思われる。

3. LESデータ・ベースを用いた検証

1次元の場合には、(3)および(6)は、

$$C_\nu \frac{k}{\epsilon} \left[\frac{2}{3} k - C_{A3} \frac{k^3}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

となる。 C_{A3} を0.033とすれば、渦粘性係数中のエネルギー・スケールとしては、乱流エネルギーのノーマル成分 $\langle u_1 u_2 \rangle$ を選んだことになる⁵⁾。Rodi¹⁷⁾はエネルギー・スケールとしてノーマル成分を選ぶ次元モデル

$$\langle u_1 u_2 \rangle = -C_R \frac{\kappa}{\epsilon} \langle u_2 u_2 \rangle \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (9)$$

を提案した。ここに、 C_R は定数である。このモデルの原点は、 $\langle u_i u_j \rangle$ のバランス式中の生成項が $-\langle u_i u_i \rangle \partial U_j / \partial x_i - \langle u_j u_i \rangle \partial U_i / \partial x_j$ と与えられることにある。(7)式の第3項は、同じ生成項に由来しており、 k 以外のエネルギー・スケールの選択は、3次の非等方表現にこのように反映されている。しかしながら、Rodiのモデル(9)

は、一般の場合には、レイノルズ応力の渦粘性係数表現とは合致しない。それは、(9)が、渦粘性係数と平均ストレインの積としては書かれていないからである。ここで提案されたモデルは、レイノルズ応力がこうした型で書かれている。

次に、(8)式の第2項の役割をチャンネル流で調べてみる。ここでは、 $k-\epsilon$ モデルで通常導入されている減衰関数

$$f_d = -\langle u_1 u_2 \rangle / C_\nu \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (10)$$

にたいしての検証を行う。本速報では、前述のLESデータとの相関を調べる'a priori'testのみを報告する。(10)式の C_ν はチャンネル流において平均速度分布が対数則に従う領域で最小二乗法を用いて最適化したところ、0.07となった。これは、広く用いられている値0.09^{4,5)}よりも小さい値となっているが、このこと自体が、エネルギー・スケールとしてのノーマル・ストレスの選択が望ましいことを示していると考えられる。ノーマル・ストレスの値はチャンネル流においては k よりもかなり小さく、この差異を補うため、小さな C_ν が選択されなければならなかったものと思われる。 C_ν あるいは C_R は流れ場によらない普遍定数になりうる可能性はあるが、 C_ν そのものはそうではないと考えられる⁹⁾。ただし、LESの行われたレイノルズ数が比較的小さいことも原因の一つとして考えられる。4つのケースの減衰関数 f_d の分布を図2に示した。ケース1では、 $\langle u_1 u_2 \rangle$ はLESデータ・ベースから得られた値を用いている。ケース2では、 $\langle u_1 u_2 \rangle$ を(8)式によって近似しており、 C_ν と C_{A3} はおのおの0.16, 0.016とした。 C_{A3} をより大きな値に設定すると f_d は負値をとる。 C_{A3} を0.016とすることは、Launder等¹¹⁾の C_1 を約3.0とすることに相当するが、この値は、通常用いられている1.5から2.5よりもやや大ききな値になっている。

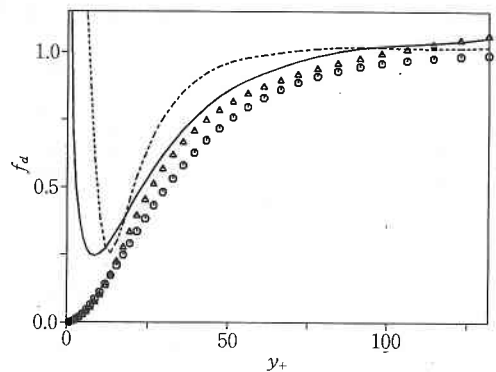


図2 減衰関数 f_d の分布。—: ケース1, - - -: ケース2 ((8)式), Δ : ケース3 ((9)式), \circ : ケース4.

研 究 速 報

ケース 3 は (9) 式を用いた場合で, C_R は 0.21 である。
 ケース 4 は, Van Driest 型の関数 $f_d = (1 - \exp(-y_+ / 25))^2$ である。

図からわかるように, 3 次の非等方表現は, buffer layer において, 渦粘性係数の強度を効果的に減少させており, 生成項が散逸項を大きく上回る領域において LES データと高い相関を示している。buffer layer における平均速度分布を近似するさまざまな関数, たとえば Spalding 則¹⁾を (8) 式に代入することにより種々の減衰関数公式が得られる。ケース 2 から 4 のうち, ケース 3 は LES データと buffer layer において最も良い近似を与える。このことにより, ノーマル・ストレスがエネルギー・スケールとして望ましいことは確認できるが, ケース 3 は $y_+ \sim 150$ の近辺で, LES データより大きめとなっている。ケース 4 において, 通常の渦粘性係数 $C_\nu k^2 / \epsilon$ に Van Driest 減衰関数を乗じないとき, $\langle u_1 u_2 \rangle$ は, $y_+ \sim 20$ でかなり大きなピークを示す。本速報では, $\langle u_1 u_2 \rangle$ のグラフは省略するが, Van Driest 減衰関数を乗じることにより, このピークが押さえられ, LES データと適度に高い相関が得られる。しかし, Van Driest 減衰関数自体はかなり経験的な関数であり, チャンネル流あるいははく離のない境界層流以外への適用可能性は疑問な点もある。これにたいして, ケース 2 の 3 次非等方表現の導出には, 経験的な公式は利用されていない。ところで, LES データから計算された f_d は, 壁のごく近くで $1/y_+$ の上方発散を示す。これは $\langle u_1 u_2 \rangle$ の壁での漸近挙動が y_+^3 であるのにたいし, k^2 / ϵ , U/y_+ がおのおの, y_+^4 , Re のように振る舞うためである¹⁾。図 2 では, 3 次の非等方表現も壁近くで同様な上方発散を示すが, その振る舞いは同じではなく, $1.5 - 0.00225y_+^4$ となっている点に留意されたい。この差異は, 壁の近くで (4) 式が拡散項を精度良く近似できないことに起因しているものと思われる。粘性拡散が支配的な壁のごく近辺は, DIA のアプローチも ASM も適用不可能な領域であり, この領域にたいするより詳細な検討が今後必要である。

4. お わ り に

レイノルズ応力の 3 次非等方表現の重要性を指摘した。3 次非等方表現は, 渦粘性係数の強度を効果的に減少させ, 2 次非等方表現と合わせて, 通常の渦粘性モデルの

欠点を克服することができる。非等方表現と ASM の関係を指摘すると共に, 渦粘性モデルを ASM から得る新しいアプローチを提案した。提案されたモデルは, チャンネル流において LES データと比較することにより, その妥当性を検証した。詳細については, Horiuti¹⁰⁾を参照されたい。また, 本モデルの LES における Smagorinsky モデルへの導入¹⁸⁻²⁰⁾および, passive scalar 輸送モデルへの導入^{8,16)}については, 他の文献を参照されたい。

なお, 本研究は科学研究費重点領域研究『数値流体力学』の援助を受けたことを付記する。

(1990年10月5日受理)

参 考 文 献

- 1) H. Tennekes and J.L. Lumley, A First Course in Turbulence, The MIT Press, Cambridge 1972.
- 2) D.C. Leslie, Developments in the theory of turbulence, Clarendon Press, Oxford 1973.
- 3) A. Yoshizawa, Phys. Fluids 27, 1377 (1984).
- 4) C.G. Speziale, J Fluid Mech. 178, 459 (1987).
- 5) S. Nisizima and A. Yoshizawa, AIAA J. 25, 414 (1987).
- 6) 西島勝一: 非等方 $k-\epsilon$ モデル, 生産研究 本号 (1991).
- 7) E.R. Van Driest, J. Aero. Sci. 23, 1007 (1956).
- 8) 堀内 潔: 第 3 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, p. 3351 (1989).
- 9) W. Rodi, ZAMM 56, T219 (1976).
- 10) K. Horiuti, Phys. Fluids A2, 1708 (1990).
- 11) B.E. Launder, G.J. Reece, W. Rodi, J. Fluid Mech. 68, 537 (1980).
- 12) C.G. Speziale, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 33, 199 (1985).
- 13) R. Rubinstein and J.M. Barton, Phys. Fluids A2, 1472 (1990).
- 14) N.N. Mansour, J. Kim and P. Moin, J. Fluid Mech. 194, 15 (1988).
- 15) K. Horiuti, J. Comp. Phys. 71, 343 (1987).
- 16) K. Horiuti, submitted to J. Fluid Mech. (1990).
- 17) W. Rodi, AIAA J. 20, 872 (1982).
- 18) K. Horiuti, Phys. Fluids A1, 462 (1989).
- 19) 堀内 潔: 日本機学会第 68 期全国大会講演論文集 Vol. B, 237 (1990).
- 20) K. Horiuti, Proc. International Workshop "Large Eddy Simulation...Where Do We Stand?", Florida, Dec. 19-21, Lecture Notes in Engineering (1990) also submitted to Phys. Fluids. A (1990).