研　究　速　報
特 集 15
UDC 533.6.011.1 : 519.6

3次精度風上差分法による乱流予測の可能性について (第3報)
——フィルタ理論について——

On Possibility of the Simulation of Turbulent Flows by the Third Order Upwind Finite-Difference Method
——On the Filtering Theory——

小　林　敏　雄*・水　尾　　勝*・谷　口　伸　行*
Toshio KOBAYASHI, Masaru MIZUO and Nobuyuki TANIGUCHI

1. 序

第2報[1]でFTS (Full Turbulence Simulation) の誤差解析を行い，ある種の風上スキーム的効果はエネルギ・カスケードを破壊することなく正則化を行う性質がある可能性を示した．ここでは風上スキームの持つフィルタリング効果についてみる．

2. Differential Filter

1986年Germanoは新たなフィルタ理論DF (Differential Filter)[2]を提案した．

次のような線形楕円型偏微分方程式（3次元）を考える．

$$f-a^2 f_{,xjxj}=g \tag{1}$$

(1)式の無限領域に対するグリーン関数G_0は，

$$G_0(\mathbf{x},\ \mathbf{x}')=\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\exp(-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/a)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{2}$$

であるから，(1)式の一般解は形式的に，

$$f(\mathbf{x})=\int G_0(\mathbf{x},\ \mathbf{x}')\cdot g(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' \tag{3}$$

となる．ここでgを速度u_iと置き換えて考えると，(3)式はLESで用いるフィルタリングを表す積分変換と見なせ，fは$\overline{u}_i$，G_0はフィルタ核に対応することがわかる．ところで，fとgとは元々(1)式による微分関係を持つから，G_0をフィルタとしたとき，

$$u_i=\overline{u}_i-a^2\overline{u}_{i,xjxj} \tag{4}$$

となる．すなわち，(4)式は(3)式で表されるフィルタリングの逆変換式である．これにより変動分u_i'は次式のようになる．

$$u_i'=u_i-\overline{u}_i=-a^2\overline{u}_{i,xjxj} \tag{5}$$

したがって，変動分が物理モデルなしで記述されたことがわかる．

LESでは，Low-passフィルタのみを用いる．(3)式のフィルタがLow-passフィルタであることを確認するために，(3)式（または(1)式の方が簡単）をフーリエ積分して次式を得る．

$$\widetilde{\overline{u}}_i(\boldsymbol{k})=\widetilde{u}_i(\boldsymbol{k})\cdot\frac{1}{1+a^2|\boldsymbol{k}|^2}=\widetilde{u}_i(\boldsymbol{k})\cdot F_{low}(|\boldsymbol{k}|) \tag{6}$$

ただし，添字～はフーリエ変換を表す．またF_{low}はLow-pass関数と定義して導入したものである．*LES*におけるLow-passフィルタとは，Low-pass関数が次の条件を満足するフィルタである．

$$|F_{low}(|\boldsymbol{k}|)|\ll 1 \quad \text{when } |k_i|>k_i^* \tag{7-a}$$

$$|F_{low}(|\boldsymbol{k}|)|\ll 1 \quad \text{when } |k_i|\fallingdotseq k_i^* \tag{7-b}$$

$$|F_{low}(\infty)|<0(|\boldsymbol{k}|^{-n}) \tag{8}$$

ただし，減衰定数$n\geqq 1$で，k_i^*はi方向格子間隔に対応する正の波数ベクトル成分である．ここで(7-b)式は，スペクトル法を用いるLESでは必要としないが，差分法ではナイキスト波数問題への対応から必要条件となる．たとえば，フーリエ・シャープ・カットオフ・フィルタは(7-b)式を満たしていない．(6)式のLow-pass関数はこれらの条件を満たし$n=2$になる．上述のような線形楕円型微分方程式から作られるDFの減衰定数nは，その微分方程式の階数に等しいことは明らかである．

GermanoによるDFの理論には，このほかに(時間方向も含めた）非等方フィルタの考察などがある．

ところで等方ガウシアン・フィルタのLow-pass関数F_Gは，

$$\begin{aligned}F_G(|\boldsymbol{k}|)&=\exp\left(-\frac{\lambda^2|\boldsymbol{k}|^2}{24}\right)\\&=1/\exp\left(\frac{\lambda^2|\boldsymbol{k}|^2}{24}\right)\\&=1/\left[1+\left(\frac{\lambda^2k_j^2}{24}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2k_j^2}{24}\right)\left(\frac{\lambda^2k_k^2}{24}\right)+\cdots\right]\end{aligned} \tag{9}$$

と展開できるので，ガウシアン・フィルタの逆変換式は，

$$u_i=\overline{u}_i-\frac{1}{24}\lambda^2\overline{u}_{i,xjxj}+\frac{1}{1152}\lambda^4\overline{u}_{i,xjxjxkxk}\cdots \tag{10}$$

および，

*東京大学生産技術研究所　第2部

研　究　速　報

$$\overline{u}_i=u_i+\frac{1}{24}\lambda^2 u_{i,xjxj}+\frac{1}{1152}\lambda^4 u_{i,xjxjxkxk}\cdots \tag{11}$$

である．よってガウシアン・フィルタを用いた際のフィルタ値と変動値の関係が陽的に記述できた．トップ・ハット・フィルタの場合も同様（シャープ・カットオフ・フィルタ以外は同様）に記述できる．(11)式右辺第2項までの展開が，すでにレナード項の差分表現に用いられている[3]ことが重要である．

以上のように，DFによればSGS項を物理的仮定なしに厳密に表現できる．実際GermanoによるDFの提案はこの事実をねらったものであった．しかしこのような線形のDFそのものは無意味である．対流項はフィルタリングによって，

$$\overline{u_j\cdot u_{i,xj}}= \overline{\overline{u}_j\cdot\overline{u}_{i,xj}}+\overline{u_j'\cdot\overline{u}_{i,xj}}+\overline{\overline{u}_j\cdot u_{i}',_{xj}}+\overline{u_j'\cdot u_i',_{xj}} \tag{12}$$

となる．またu_i'のフーリエ変換は，(5)および(6)式より，

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_i'(\boldsymbol{k})&=\widetilde{u}_i(\boldsymbol{k})-\widetilde{\overline{u}}_i(\boldsymbol{k})\\&=\widetilde{u}_i(\boldsymbol{k})\cdot(1-F_{low}(|\boldsymbol{k}|))\\&=\widetilde{u}_i(\boldsymbol{k})\cdot F_{low}'(|\boldsymbol{k}|)\end{aligned} \tag{13}$$

よって，(12)式右辺のフーリエ変換は，

$$\begin{aligned}\Big[&\iint\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot\widetilde{u}_j(\boldsymbol{p})\cdot iq_j\widetilde{u}_i(\boldsymbol{q})\,d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}\\&+\iint\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot F_{low}'(|\boldsymbol{p}|)\widetilde{u}_j(|\boldsymbol{p}|)\cdot iq_j\widetilde{u}_i(\boldsymbol{q})\,d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}\\&+\iint\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot\widetilde{u}_j(\boldsymbol{p})\cdot iq_jF_{low}'(|\boldsymbol{q}|)\widetilde{u}_i(\boldsymbol{q})\,d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}\\&+\iint\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot F_{low}'(|\boldsymbol{p}|)\widetilde{u}_j(\boldsymbol{p})\cdot\\&\qquad iq_jF_{low}'(|\boldsymbol{q}|)\widetilde{u}_i(\boldsymbol{q})\,d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}\Big]\cdot F_{low}(|\boldsymbol{k}|)\end{aligned} \tag{14}$$

ここで，数値計算とは次の近似を行うものである．

$$\begin{aligned}\bar{u}_i(\boldsymbol{x})&=u_i^N(\boldsymbol{x})\\&=\sum_{i=0}^{N_l}\sum_{m=0}^{N_n}\sum_{n=0}^{N_m}u_i{}^N{}_{lmn}\cdot E_l(x_1)\cdot E_m(x_2)\cdot E_n(x_3)\end{aligned} \tag{15}$$

ただし，E_lはl次の固有関数である．三角関数を用いる数値計算では，(15)式の近似は，(14)式の積分範囲を，$|p_l|<k_l^*$，$|q_l|<k_l^*$に制限することを意味する

したがって，(14)式は最終的に，

$$\begin{aligned}&F_{low}(|\boldsymbol{k}|)\cdot\int_{|p_l|<kl^*}d\boldsymbol{p}\int_{|q_l|<kl^*}d\boldsymbol{q}\\&\quad\cdot\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\cdot\widetilde{u}_j(\boldsymbol{p})\cdot iq_j\widetilde{u}_i(\boldsymbol{q})\end{aligned} \tag{16}$$

となり正則化の効果はない．このようなことが起きる根本的な原因は，フィルタが線形であることのみに基づく．線形のフィルタのもつ意味を模式的に示したのがFig. 1である．

また数式的には(6)式であり$\widetilde{\overline{u}}_i$と$\widetilde{u}_i$とが線形となる．これより線形のフィルタはGS (Grid Scale) 内の波数間の関係の評価しかできないことがわかる．つまり，テイラ展開と同値である．したがって非線形の方程式を解こうとするときガウシアン・フィルタ等の線形のフィルタをかける行為そのものには正則化の効果はなく，その意味でいわゆる物理モデルの導入が初めて正則化をもたらす．

3．風　上　効　果

次に風上スキームについて検討を行う．フーリエ積分における『移動の公式』を用いると，$u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})$のフーリエ変換$\widetilde{u}_a$は$u(\boldsymbol{x})$の変換を$\widetilde{u}$とすると，

$$\begin{aligned}\widetilde{u_a}(\boldsymbol{k})&=\widetilde{u}(\boldsymbol{k})\exp^{ia_jk_j}\\&=\widetilde{u}(\boldsymbol{k})/\exp(-ia_jk_j)\\&=\widetilde{u}(\boldsymbol{k})/[1-ia_jk_j-\frac{1}{2}(a_jk_j)(a_kk_k)+\cdots]\end{aligned} \tag{17}$$

よって，単純移動を行うフィルタの逆変換式は，

$$u=\overline{u}+a_j\overline{u}_{,xj}+\frac{1}{2}a_ja_k\overline{u}_{,xjxk}\cdots \tag{18}$$

となり，方向性を持つ微分係数が現れることがわかる．

また，(18)式を簡単かつ1次元化した，

$$f+af_{,x}=g \tag{19}$$

のグリーン関数を用いた一般解の形式的表現は，

$$f(x)=\frac{1}{a}\int_{\infty}^{x}\exp(-\frac{x-x'}{a})\cdot g(x')\,dx' \tag{20}$$

である．これより，逆変化式が方向性微分係数を持つフィルタと風上スキームで上流に前進差分を行うこととの関係がわかる．また，最も重要なのは，(17)式に示されるようなフィルタが位相に対して働く効果と，前報の数値実験で得られたDSの位相誤差とが非常によく似ていることである．風上差分が(17)式のような位相誤差を持っていることは古典的なノイマンの安定解析からでも十分わかる[4]．ところが通常の教科書でこの安定解析を説明している場合線形化された対流項$Cu_{,x}$を扱う事に注意が必要．

前述のように線形のフィルタからは正則化につながる効果は生まれない．一方風上スキームを用いると十分に計算が安定することを我々は経験的に知っているので，このスキームには正規化の効果がある．したがって風上スキームが持つフィルタ効果は本質的に非線形から生まれる．すなわち風上スキームの正則化は形式的に位相をずらした際にでてくる偶数階の微係数のみによるのでなくその非線形効果に本質を持つ．そして第1報[5](6)式の関係が非線形の微分関係になっていることが重要である．このような取り扱いはフィルタリング効果を微分関

係に帰着させるものであって，後述の逆変換を可能にする．

4．第3報までのまとめ

ここでは本研究の意図することのイメージを説明する．

N-S方程式は準線形であるから，その解は初期条件および境界条件の十分な滑らかさにもかかわらず波数空間の広い範囲で充分大きなエネルギを持つ．つまり計算に無限個の自由度を必要とする．しかし，各自由度点上の情報間には1つの規則性があって，その規則とはN-S方程式で拘束される波数間の関係である．この波数間の構造が認識しやすい代表的な例が，フラクタル性とかエネルギ・カスケード性などである．

実際の無限の自由度を持つ解に対して，我々の最も頼りにしている数値計算は有限個の自由度しか持たない．十分に注意深く計算を行ったときでさえ，その自由度の個数N_{com}は格子数N_Gしかない．よって，無限の自由度を持つ解を自由度N_{com}個で近似しようとしているのであるから随分無理なことを行っているわけである．しかしあくまで自由度N_{com}個できちんとした近似を行うためには，どうしてもこれ以上は減らせない最小の自由度の個数N_Kが存在して，このN_K個の自由度は少なくとも用意してやらねばならない．このN_Kは，次の有名な概算式で与えられるかもしれない．

$$N_K = O(Re^{9/4}) \tag{21}$$

この(21)式ですら随分甘い評価であって，本当にこれで十分かはわからない．方程式が線形あるいは(21)式が十分すぎるほど満たされる場合にはおそらくスペクトル法にまさる計算法はない．ところがN-S方程式の解析でそのように十分な格子を用いて計算される例は3次元一様場で非常に特殊な対象性を課す場合[6]しかない．一般にスペクトル法による乱流のDSと呼ばれている計算でも(21)式すら十分な余裕でクリアされてない．このようなときにスペクトル法が適切かあるいは4次の中心差分の

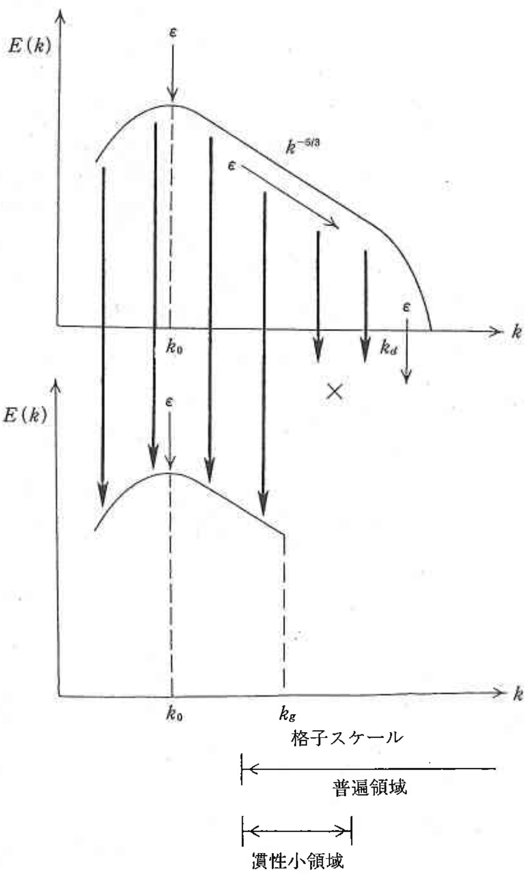

Fig.1　線形フィルタ

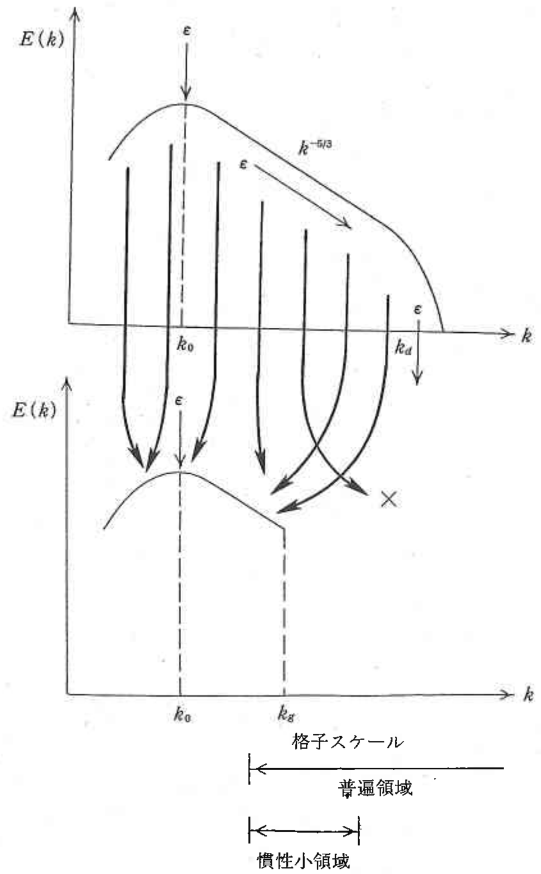

Fig.2　非線形フィルタ

打ち切り誤差が適切か問題になる状態であるのだから高レイノルズ数になって(21)式どころの話ではなくなったときにはいずれかの工夫をすることになる．つまりN_K個よりさらに少ない自由度で解を無理やり追跡しなければならない．そのときに現在の乱流モデルが行っているのは以下のことである．我々の用いている平均化はFig. 1のように可視化できる．つまり，解こうとするN-S方程式の解からN_{com}個の自由度に載せられるだけの情報を持ってきて，後はすべて捨ててしまう．乱流ではよく知られているように無限の自由度点上の情報も大まかに3つのグループとして分けることができる．つまりEnergy Containing Range, Dissipation Range, Inertial Rangeの3グループである．しかしながら，上述したような平均化を行ったために，新しい解のN_{com}個の自由度に保存されている情報はせいぜいこのうちの2グループのみである．つまり，新たな解にはDissipation Rangeの情報を保存している自由度点はもはや存在しない．したがってこの自由度点の情報が不足していることになる．よって，このままの状態では実際に乱流を解くどころか安定に計算すらできないわけで，この意味で乱流モデルと呼ばれるものが重要となる．すなわち，N_{com}個の自由度点にある2つのグループの情報だけから第3のグループの情報を強引に推定してやろうとする大変な課題である．しかしながら，幸いにも我々は第3グループの情報そのものをすべて完全に推定してやる必要はない．なぜならば，我々が実際に推定しなければならないのは，この第3グループの情報そのものではなくて，この情報がN_{com}の自由度点上の情報に与える影響であるからである．このような影響だけを推定すれば良いのであれば，エネルギの散逸量の付加などの物理的な考察を使って研究を行うことができる．

このような方法とは異なり，本研究で扱おうとしているのは，Fig. 2のような情報の流れを作ることである．つまり，本質的に非線形の平均を扱う．このときこの研究でのもっとも重要な焦点は計算スキームの持つ打ち切りに基づく方程式の変換の中に適切な情報変換を行うものがあるのかを調べることである．中心スキームの計算が不安定であるから風上スキームを開発したという事情を考えればわかるように中心スキームにはもはや可能性すらない．したがって適切なものがあるとすればいずれかの風上スキームの非線形効果にもとづくものである．

そして次に問題となるのが逆変換の問題である．非線形な変換の安定化で求めた離散解は逆変換で再構成しなければならない．このとき逆変換されたものがもはや乱流解でないことは十分に有りうる（第1報）．なぜならば厳密解のすべての情報を非線形の変換でN_{com}個の自由度点上に圧縮できるわけではない．したがって，非線形の変換による安定化でその質が変化することはある．よって我々が最終的に必要とする厳密解のラージ・スケールの部分の情報については十分な精度で保存されるものでなければならない．

非線形の現象はフラクタル性を持つことがしばしばあって，また打ち切り誤差が偶然（？）にうまく作用することが摂動展開のときに起こる．ところが大切なことは実際の乱流が非線形の対流項と運動エネルギの散逸項との複合作用で生じるように，離散化系でもまた対流項と粘性項のスキームの組み合わせが適当なときのみ偶然が起こりうる．したがって風上スキームのみの考察は意味を持たない．そして非線形の解析学がそうであるように，このような離散化系の研究でも一般的な考察は無理で，N-S方程式の十分に発達した乱流解ということに限定したところから話が始まる．したがってたとえばスケールの相似性が成り立っているある領域で，こういう打ち切り方をしたときスキームが十分に精度よく成り立っているとかの議論が行わなければならない．N-S方程式ではその次元によっても現象が変わることにも気を付けなければならない．

（1990年10月30日受理）

参 考 文 献

1) 小林，水尾，谷口，生産研究，**42**-12（1990）30
2) M. Germano, Phys. Fluids, **29**-6（1986）1755-1758
3) 堀内，生産研究，**42**-1（1990）44
4) P.J.ローチェ著，高橋他訳，コンピュータによる流体力学(上)，構造計画研究所，（1978）
5) 小林，水尾，谷口，生産研究，**42**-10（1990）32
6) S. Kida, J. Phy. Soc. Japan, **54**-6（1985），2132-2136