

Schwarz法によるLES用スペクトル法の形状適合化

Spectral Method for LES toward Complicated Geometries by the Schwarz Method

小 林 敏 雄*・戴 毅*・水 尾 勝*

Toshio KOBAYASHI, Yi DAI and Masaru MIZUO

1. 序

乱流の数値計算のための計算法 (Method) の 1 つにスペクトル法があるが、この方法の重大な欠点の 1 つは形状適合性の極端な低さであった。しかしこの問題の克服に対する研究はここ最近急速な進歩を遂げている¹⁾²⁾。スペクトル法では、計算効率と精度を維持するという意味で、複雑で高価であるマッピングのみによる形状適合化は適切でない。したがって領域分割法 (Domain Decomposition Technique) というアプローチが自然に選択された。適切な領域分割法と適切なマッピング³⁾の組み合わせがこの問題を解決すると考えられている。

領域分割法は小領域 (Subdomain) ごとにスペクトルアルゴリズムが適応されるので、隣接する小領域間での情報伝達の法則をいかに定義するかということが問題である。もちろんこの定義は現実的で計算効率の良いものであるべきである。まず分割領域の様相から大きく 2 つに分類されている⁴⁾。第 1 の方法は接触する (Touching) 小領域に分割する (Fig. 1) ものである。このとき情報伝達方法の定義は接触面 (Interface) での適切な連続条件で表現される。代表的なものは、Orszagによって提案された Patching 法⁵⁾で、微分方程式の古典的観点から d 階の方程式に対して $d-1$ 階までの微係数の連続性を要求する。また変分式定式化を小領域ごとの積分の総和で近似する Variational 法⁶⁾では、試行関数 (Trial Function) の選択によって接触面での連続性が与えられる。Pateraによる (狭義の) Spectral Element 法¹¹⁾⁴⁾は C^0 級の試行関数を用いる。Phillips と Davies による同じく Spectral Element 法⁹⁾と呼ばれるものでは少なくとも C^1 級の試行関数がいられる。ただし C^n は n 階まで連続な導関数を持つ関数空間。

第 2 の方法は、重なり合った (Overlapping) 小領域に分割する (Fig. 2) ものである。これには Alternating Schwarz 法¹⁾と呼ばれるものがある。本報では Schwarz

法に関して、飛躍的にその計算量を減らすことのできるアルゴリズムを提案する。そして同じアルゴリズムが非圧縮流の連続の式の取り扱いにも有効であることを示す。

2. Alternating Schwarz法

Alternating Schwarz法は楕円型境界値問題の解の存在証明のための理論的ツールとして H.A. Schwarz によって導入された。最初にスペクトル法に導入したのは Morchoisne で非圧縮 N-S 方程式の計算を行った。それ以降の流体計算例はあまりない⁶⁾。

簡単化のため 2 次元の楕円型境界値問題、さらに単純化して以下のような正方領域での非同次 Helmholtz 方程式を考える。しかしこの議論は一般の 2 階楕円型境界値問題で成り立つ。

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

ただし $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ 。ここで Ω を Fig. 2 のように分割する。ただし $-1 < \alpha < \beta < 1$ で $\Gamma^\pm = \partial\Omega^\pm - \partial\Omega$ である。自由項 f を十分に滑らかとして、(2) 式を満たす任意の関数 u^0 から始まる関数列 $\{u^{2n-1}\}, \{u^{2n}\}$ を $n \geq 1$ で以下のように定義する。

$$\begin{cases} \Delta u^{2n-1} + \lambda u^{2n-1} = f & \text{in } \Omega^+ \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega^+ - \Gamma^+ \\ u = u^{2n-2} & \text{on } \Gamma^+ \end{cases} \quad (3)$$

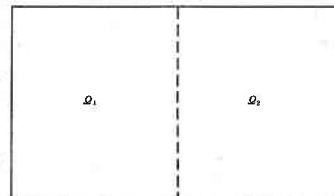


Fig. 1 A touching domain decomposition

*東京大学生産技術研究所 第 2 部

研 究 速 報

$$\begin{cases} \Delta u^{2n} + \lambda u^{2n} = f & \text{in } \Omega^- \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega^- - \Gamma^- \\ u = u^{2n-1} & \text{on } \Gamma^- \end{cases} \quad (4)$$

このとき関数列の収束性に関して以下の誤差ノルム評価式で $0 < k < 1$ を満たす定数 k が存在することが示された。

$$\|u^{2n} - u\|_{H^1(\Omega^-)} + \|u^{2n-1} - u\|_{H^1(\Omega^+)} \leq Ck^n \|u^0 - u\|_{H^1(\Omega^-)} \quad (5)$$

ただし $H^1(\Omega)$ は Ω の上の 1 位のソボレフ空間で u は (1), (2) 式の解。したがって関数列は u に収束する。

Alternating Schwarz スペクトル法でも、離散解の列 $\{(u^{N+})^{2n-1}\}$, $\{(u^{N-})^{2n}\}$ が (5) 式と類似の形で収束することがモデル Poisson 方程式問題で示された⁷⁾。さらにこのとき 1 次元では離散解 $((u^{N+})^\infty, (u^{N-})^\infty)$ は N^+ , N^- が無限大で厳密解に収束することが示された。また収束速度に関して、Zanolli は共有領域 $\Omega^+ \cap \Omega^-$ が広いほど収束が速いことを数値実験で示した¹⁾。

3. 非圧縮 N-S 方程式への応用

実際に Alternating Schwarz 法を非圧縮 N-S 方程式の解析に用いた計算例を示す。なお連続の式の取り扱いには文献⁸⁾のもの、スキームも同様。

計算モデルは 2 次元非定常非圧縮 N-S 方程式の以下の厳密解⁹⁾である。

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= -\cos x \cdot \sin y \cdot e^{-2t} \\ v(x, y, t) &= \sin x \cdot \cos y \cdot e^{-2t} \\ p(x, y, t) &= -1/4(\cos 2x + \cos 2y) e^{-4t} \end{aligned} \quad (6)$$

ただし計算領域は $(0, \pi) \times (0, \pi)$ (Fig. 3)。数値実験の際、速度と圧力の初期値、速度の境界値は (6) 式から与え、共有領域は $(0.45\pi, 0.55\pi) \times (0, \pi)$ とした。Schwarz 法の反復計算の過程で、

$$\epsilon_k = (\sum (u^{k+1} - u^k)^2)^{1/2} / (N_y - 2) \quad (7)$$

を反復残差として定義し、各時間ステップで $\epsilon^k \leq 10^{-10}$ ま

で反復を行った。ただし \sum は内部境界上格子点の和の意味。格子数は非分割法が $N_x \times N_y = 15 \times 15$ 、Alternating Schwarz 法が $N_x^+ \times N_y^+ = N_x^- \times N_y^- = 11 \times 15$ である。また $\Delta t = 10^{-5}$ とした。

Fig. 4 は Alternating Schwarz 法で時間ステップ 5000 での速度ベクトル図である。Table 1 には同ステップでの解析解との最大誤差を非分割法の場合もあわせて示した。両方とも十分に良い結果が得られ Alternating Schwarz 法が有効であることがわかる。

しかし、本計算の反復判定基準である $\epsilon_k \leq 10^{-10}$ の場合 1 ステップに約 20 回程度の Poisson 方程式の反復計算を要した。非分割法と比べると計算時間は約 8 倍である。

4. Schwarz 法の一般化

4.1 反復過程の一般化 (反復の省略)

Influence - Matrix Technique¹⁾ (あるいは Green - function Technique) は Kleiser - Schumann 法¹⁰⁾ では連続の式の取り扱いに非常に有効に使われた。また領域分割法では、接触面での連続条件の取り扱いの簡略化のために Patching 法等に組み合わせられている²⁾。ここでは Influence - Matrix Technique を用いると Alternating Schwarz 法の反復計算を省略できることを示す。我々の経験では、Alternating Schwarz 法での反復に要する計算量は実用的なレベルとは言えないと考えている。

簡単化のため 1 次元 (Fig. 5) で考える。

$$\begin{cases} L(u) = f & \text{in } \Omega \\ u = u_0 \text{ (is given)} & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

ただし $\Omega = (-1, 1)$, L は線形の微分オペレータ。この問題を直接解かず以下の 6 つの問題を解く。

$$\begin{cases} L(u^i) = f & \text{in } \Omega_i, i = 1, 2 \\ u^i = 0 & \text{on } \partial\Omega_i \end{cases} \quad (9)$$

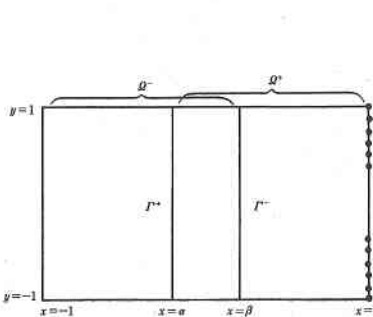


Fig. 2 A overlapping domain decomposition

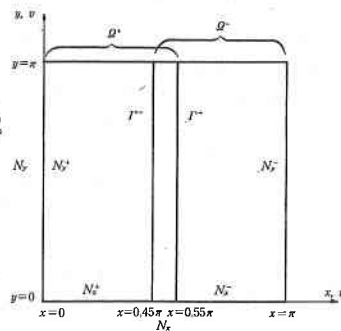


Fig. 3 A domain decomposition for eq. (6)

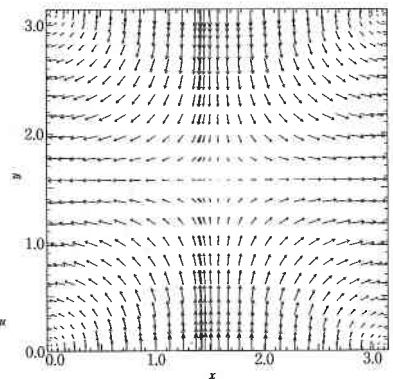


Fig. 4 Velocity vector

研 究 速 報
Table 1 Maximum error after 5000 steps

	One domain	Schwarz
max. err. u/max. u	2.605(6)	2.190(7)
max. err. v/max. v	2.613(6)	2.309(7)

注) (n)は×10⁻ⁿ

$$\begin{cases} L(u^+_i) = 0 & \text{in } \Omega_i \\ u^+_i = 1 & \text{on } \Gamma_i \\ u^+_i = 0 & \text{on } \partial\Omega_i - \Gamma_i \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

$$\begin{cases} L(u^-_i) = 0 & \text{in } \Omega_i \\ u^-_i = 0 & \text{on } \Gamma_i \\ u^-_i = 1 & \text{on } \partial\Omega_i - \Gamma_i \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (11)$$

ただし $\Gamma_i = \partial\Omega_i - \partial\Omega$, このとき求めるべき(8)式の Alternating Schwarz手順で定義される関数列は次式で一般化される。

$$u = \begin{cases} u_1(x) = u^f_1 + a_1 u^+_1 + u_0 & |_{x=-1} u^-_1 & \text{in } \Omega_1 \\ u_2(x) = u^f_2 + a_2 u^+_2 + u_0 & |_{x=-1} u^-_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases} \quad (12)$$

ただし $a_i = u^{2n-1}(\beta)$ のとき $u_i = u^{2n}$ で a_2 も同様。今 a_i を未定係数と考える。ここで収束関数の状態を示す以下の連立方程式(Schwarz condition),

$$\begin{cases} u_1(\alpha) = u_2(\alpha) \\ u_1(\beta) = u_2(\beta) \end{cases} \quad (13)$$

を解くことで未定係数 a_i を定めれば反復を省略できる。ちなみに Patching法に Influence-Matrix Techniqueを用いる場合は, Schwarz法での連続条件(13)式の代わりに Patching Conditionを表す連立方程式を解く。それ以外の Green関数を求める手順はまったく同じである。このように Influence-Matrix Techniqueを用いた場合の Schwarz法と Patching法の実際の手順がきわめて類似であることが後で重要となる。

4.2 連続条件の一般化

次に以下の1次元モデルで Schwarz法の精度を調べた。

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi^2 \sin(2\pi x) + e^x \\ u = e^{-1} & \text{when } x = -1 \\ u = e^1 & \text{when } x = 1 \end{cases} \quad (14)$$

このとき厳密解 u は,

$$u = \sin(2\pi x) + e^x \quad (15)$$

計算結果を Table 2 に示す。ここでは格子数 N の非分割法の解と格子数 $N_1 = N_2 = N/2$ の領域分割法の解を比較した。また Schwarz法では $-\alpha = \beta = 0.1$, Patching法では $\alpha = \beta = 0$ とした。表からわかるように Schwarz法はスペクトル精度を持っている⁷⁾。ここで注目すべきは Schwarz法と Patching法との比較である。この数値実験では一般に Patching法のほうが精度が良い。直観的には、 α, β が近づいたとき Schwarz法の離散解は Patching法の離散解に漸近するであろう (Table 3)。また、 α, β が離れてたとえば $-\alpha = \beta = 1$ のとき明らかに Schwarz法の解は $N/2$ の格子数の非分割法の解である。したがって、この間の $\beta - \alpha$ で Schwarz法の誤差が単調に変化する場合は Schwarz法は Patching法よりも劣る。逆にこの間で誤差に最小値が存在すれば Schwarz法の方が精度が良い。このようなことは、関数解析的手法で取り扱

われなければならない。どちらにしても実用上次の一般化が有効である。今 Schwarz法を $-1 < \alpha \leq \beta < 1$ で定義する。このとき $\alpha < \beta$ で通常の Schwarz法の連続条件を、 $\alpha = \beta$ で Patching Conditionを用いるものとする。Influence-Matrix Techniqueを用いた場合、一般化された Schwarz法の定義内で同じ計算手順となる。

4.3 非圧縮 N-S 方程式への応用の一般化

前述のように Influence-Matrix Techniqueは連続の式の取り扱いにもきわめて有効である。Schwarz法の連続条件のためにこの技法を導入したので、同時に連続の式も扱えば大変効率が良い。簡単化のため2次元正方領域を $N \times N$ の格子で解折するとする。解くべき運動方程式は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = F_i \quad (16)$$

ただし、

$$F_i = v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (17)$$

文献8)のアルゴリズムでは F_i は陽解法で扱われ、このとき次の時刻の速度と圧力は以下ようになる。

$$LP = D + B_u u_b + B_v v_b \quad (18)$$

$$u = G_u p, \quad v = G_v p \quad (19)$$

ただし u, v は領域内部の格子点上の速度を1列に並べた $(N-2)^2$ 次元ベクトル、 p は全領域の圧力の N^2 次元ベクトル、 u_b, v_b は境界格子点上の速度の $4(N-1)$ 次元ベクトルである。ここでは角点問題は触れない。また L, D, B, G は微分オペレータを反映する行列で具体的な型はアルゴリズムによる。各行列の大きさはそれぞれ $N^2 \times N^2, N^2 \times N^2, N^2 \times 4(N-1), (N-2)^2 \times N^2$ で文献8)を参照。 $4(N-1)$ 次元の基本ベクトルを e_i とすると(18)式の解は次のように Green関数表現できる。

$$p = p^D + \sum_i u_{bi} p^B u_i + \sum_i v_{bi} p^B v_i \quad (20)$$

ただし、

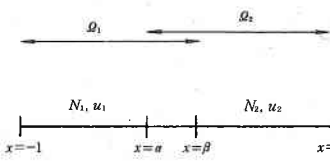
$$p^D = L^{-1} D \quad (21)$$

$$p^B u_i = L^{-1} B_u e_i \quad (22)$$

$$p^B v_i = L^{-1} B_v e_i \quad (23)$$

ここで u_{bi}, v_{bi} は u_b, v_b の1成分。一般に境界条件 u_b, v_b は既知であるが領域分割法では小領域の境界が計算領域内部となる場合があり、 u_b, v_b の成分中に未知のものが存在

Table 2 計算モデルでのMaximum error



N	2nd-order finite-difference	4th-order finite-difference	Chebyshev collocation	Schwarz Chebyshev collocation	Patching Chebyshev collocation	(Legendre collocation)
8	2.366(1)	3.352(1)	3.495(2)	2.903(1)	1.515(1)	(1.442(2))
12	8.497(2)	7.524(2)	1.333(4)	8.914(3)	4.412(3)	(2.701(5))
16	5.375(2)	2.178(2)	2.147(7)	8.813(4)	1.230(4)	(2.196(8))
20	3.238(2)	8.202(3)	1.754(9)	8.720(6)	2.403(6)	(8.318(12))
40	8.381(3)	3.315(4)	3.844(10)	3.866(9)	5.644(7)	(5.289(13))

Fig. 5 A one-dimensional domain decomposition

注) (n)は $\times 10^{-n}$

Table 3 計算モデルでの共有領域 $\beta-\alpha$ の影響

	Patching	$-\alpha=\beta=$	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
Maximum Error	2.403(6)		2.66(6)	4.38(6)	8.98(6)	8.72(6)	7.93(5)	1.30(4)	1.39(3)	2.37(3)

注) $N=20$, (n)は $\times 10^{-n}$

する。SchwarzまたはPatching Conditionを適用することでこの成分を求めることになる。以下にFig.2のような状況でSchwarz法を適用した場合の未知成分の連立式の作り方の一部を示しておく。ただし領域 Ω^+ , Ω^- とも $N \times N$ の格子を用いたとした。また \mathbf{p} (あるいは \mathbf{u}, \mathbf{v})は領域での分布を示すベクトルであり、これから (x, y) の位置の物理量 p の値を抽出する行為を、

$$p = F(\mathbf{p}, x, y) \tag{24}$$

と記号化する。さらに \mathbf{u}_b^+ , \mathbf{v}_b^+ の中で Γ^+ 上の値は1から $N-2$ 成分までに配列されているとする。

$$F \left(\mathbf{G}_u^{-1} (\mathbf{p}^D + \sum_{i=N-1}^{4(N-1)} \mathbf{u}_b^+ \mathbf{p}^{B^+ u_i} + \sum_{i=N-1}^{4(N-1)} \mathbf{v}_b^+ \mathbf{p}^{B^+ v_i}), \beta, y_j \right) + \sum_{i=1}^{N-2} F(\mathbf{u}_b^+ \mathbf{G}_u^{-1} \mathbf{p}^{B^+ u_i}, \beta, y_j) + \sum_{i=1}^{N-2} F(\mathbf{v}_b^+ \mathbf{G}_u^{-1} \mathbf{p}^{B^+ v_i}, \beta, y_j) = \mathbf{u}_b^- \tag{25}$$

4.4 ま と め

オリジナルのKleiser-Schumann法は1つの非一様な方向を持つ。一般に非一様な方向が2以上の場合Green関数を保存するために必要な記憶容量は相当大きい。そのためこのような場合には連続の式の取り扱いにInfluence-Matrix Techniqueを用いることは好ましいとは思われなかった。しかしこの研究のような領域分割法を用いた場合、各小領域の格子数を同じに限定(限定1)すれば同じGreen関数を全ての小領域に用いることがで

きる。つまりInfluence-Matrix Techniqueはこのような領域分割法でこそ本当に有効であると思われる。そして一般化されたSchwarz法では、安定的に精度の高いPatching Conditionを連続条件として採用することを推奨するものとする(限定2)。このとき限定1, 2を重視することで格子生成が困難になるときは、限定2を緩めて本来のSchwarz法を用いることで自由に領域を重ねて格子の配置を調節することができる。

(1990年10月30日受理)

参 考 文 献

- 1) C. Canuto, ほかに3名Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, (1988)
- 2) J.P. Boyd, Chebyshev and Fourier Spectral Methods, Springer-Verlag, (1989)
- 3) K.Z. Korczak and A.T. Patera, J. Comput. Phys., **62** (1986), 361-382
- 4) 小林, 玉川, 生産研究, **42-1** (1990), 31-34
- 5) T.N. Phillips and A.R. Davies, J. Comput. Appl. Math., **21** (1988), 173-188
- 6) H.C. Ku and T.D. Taylor, Proc. ISCFD NAGOYA, (1989), 329-334
- 7) C. Canuto and D. Funaro, SIAM J. Numer. Anal., **25-1** (1988), 24-40
- 8) 戴, 小林, 水尾, 生産研究, **43-1** (1991), 84-87
- 9) J.kim and P. Hoin, J. Comput. Phys., **59**(1985), 308-323
- 10) L. Kleiser and U. Schumann, Proc. 3rd GAMM Conf. Numerical Methods in Fluid Mechanics, ed. by E.H. Hirschel, Vieweg, (1980), 165-173