研究速報

UDC 532.517.4

3次精度風上差分法による乱流予測の可能性について（第2報）
——FTSの誤差解析——

On Possibility of the Simulation of Turbulent Flows by the Third Order Upwind Finite-Difference Method
——Error Analyses of FTS——

小林敏雄*・水尾　勝**・谷口伸行*
Toshio KOBAYASHI, Masaru MIZUO and Nobuyuki TANIGUCHI

1．序

第1報[1]では3次精度風上差分法によるDS（Direct Simulation）を理論的に取り扱うために新たなアプローチ法を導入した．本報では，この問題に関係するスペクトル法によるDSの誤差解析の結果について述べる．スペクトル法のDSでは数値的な散逸は取り除ける．したがって少なくとも安定した解が得られることを十分保証するためには必然的にFTS（Full Turbulence Simulation）を行わなければならない．よってここでは現在最も厳密な意味でDSと呼ばれている計算の誤差について検討を行うことになる．

しかしこの誤差解析には数値実験を多用している．さらに計算モデルとして3次元N-S方程式を扱うことをあきらめ，以下のBurgers方程式を取り上げた．

$$\dot{u}+u\cdot u_{,x}=\nu u_{,xx} \qquad (1)$$

すなわち研究の焦点を，対流項と粘性項との調和で作られる広い波数範囲を持った解の数値解析誤差に限定した．渦のストレッチングのような3次元乱流と低次元の乱流の明白な違いは考慮しないで(1)式を用いた．

2．誤差の明瞭化

Burgers方程式は準線形で一般に波数空間で無限にエネルギを持つ．しかし，我々が数値計算を行う場合にはその解を有限項数の固有関数展開で近似することになる．つまりtruncation errorが生じる．以下我々はこの誤差の明瞭化を行うが展開の『収束性』[2]について考察しているのではない点に注意する必要がある．つまり，展開項数を増していったときに近似解が十分な速さで厳密解に漸近するかといった問題を扱っているのではない．現在のスペクトル法のDSのようにコルモゴロフ・スケールと同程度の格子を用いようとする計算はその精度に関して十分に余裕を持った計算であるとは言えない．本報では，このようなぎりぎりのスペクトル法によるDSにおいてどのような形態の誤差が発生しているかについて注目した．

スペクトル法を用いてBurgers方程式を解析したとき時間積分の離散化数値誤差が無視できるならば，実際にはBurgers方程式ではなくて次の方程式の厳密解を計算していることがわかる．

$$\dot{\bar{u}}^s+\overline{\bar{u}^s\cdot\bar{u}^s{}_{,x}}^{\,s}=\nu\bar{u}^s{}_{,xx} \qquad (2)$$

ただし$^{-s}$はシャープ・カットオフ・フィルタを意味する．ここで(2)式の左辺に適当な項（次式の①，②項）を付加すると本来のBurgers方程式(1)にシャープ・カットオフ・フィルタを作用したものになる．

$$\underbrace{\dot{\bar{u}}^s}_{\text{非定常項}}+\overline{\bar{u}^s\cdot\bar{u}^s{}_{,x}}^{\,s}+\underbrace{\overline{u'\cdot\bar{u}^s{}_{,x}}^{\,s}+\overline{\bar{u}^s\cdot u'{}_{,x}}^{\,s}}_{\text{クロス項①}}+\underbrace{\overline{u'\cdot u'{}_{,x}}^{\,s}}_{\text{レイノルズ応力項②}}$$

$$=\dot{\bar{u}}^s+\overline{u\cdot u_{,x}}^{\,s}=\nu\bar{u}^s{}_{,xx} \qquad (3)$$

ただし，

$$u=\bar{u}^s+u' \qquad (4)$$

すなわちスペクトル法のDSは，解析する方程式にシャープ・カットオフ・フィルタリングを行い，実際には物理モデルが必要であるSGS（Subgrid Scale）項を無視した場合の方程式を厳密に解いていると解釈できる．常微分方程式の数値計算理論[3]の教えるところによれば，局所的誤差は局所打ち切り誤差と丸めの誤差よりなりその集積として大域的誤差が発生する．しかしBurgers方程式のような準線形発展方程式のスペクトル法によるDSでは，時間発展に注目したときの局所的誤差は時間積分離散化の局所打ち切り誤差と丸めの誤差とSGS項の無視による誤差の3成分より構成されることになる．

本報では，コルモゴロフ・スケールに比べ極端に小さい格子を用いて解析したときの数値解を厳密解と見なし，スペクトル法のDSの（大域的）誤差の形態を調べた．

3．計算モデル

各変数を有次元で扱う．すなわち，uを速度，νを動粘

*東京大学生産技術研究所　第2部
**東京大学大学院

度，xを距離，tを時間と呼ぶ．Burgers方程式は多くの研究者達に扱われ[4]，数値計算の結果上は一様でランダムな初期条件のもとにスペクトルSが次式のように近似される慣性小領域的部分の存在が示されている[5]．

$$S \propto k^{-2} \qquad (5)$$

本報での計算モデルの詳細はAldamaによるもの[6]をまねた．一般に十分に発達した解はFig. 1のようにShock Frontsを持つ．このような解には2つの特徴的な長さスケールが存在する．一方は最もエネルギッシュな（ラージ）スケールL_sで，他方はコルモゴロフ・スケールに対応するShock Thickness δである．（ラージ）速度スケールU_sを用いてレイノルズ数R_eを，

$$R_e = \frac{U_s \cdot L_s}{\nu} \qquad (6)$$

と定義すると，Shock Density δ/L_sは，

$$\frac{\delta}{L_s} = O(R_e^{-1}) \qquad (7)$$

となる．よって，計算領域LをL_sの$2\pi n$倍に設定したとき必要な格子数Nの概算は以下のようになる．

$$N \sim \frac{L}{\delta} = \frac{2\pi n \cdot L_s}{\delta} \sim 2\pi n \cdot R_e \qquad (8)$$

境界条件には周期性を用いる．初期条件はJeng[7]の方法を用いて初期スペクトルS_0が次式を満たすように与える．

$$S_0 = Ak^4 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2\right) \qquad (9)$$

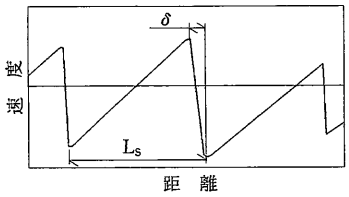

Fig. 1　Shock Fronts

ただしA，σは定数．L_sをS_0が最大値となる長さスケール，U_sを初期速度の2乗平均と定めると次式になる．

$$L_s = \sigma \qquad (10)$$

$$U_s = \frac{(18\pi)^{1/4} \cdot A^{1/2}}{\sigma^{5/2}} \qquad (11)$$

具体的にはTable1のような定数値を用いた．このとき，(8)式より必要な格子数Nは3000程度と見積られる．

4．計 算 手 法

計算法としてフーリエ・ガラーキン・スペクトル法を用いた．非線形項はPaddingによった．時間積分の離散化は，粘性項にはIntegrating-Factor Technique[2]を，対流項には4次のAdams-Bashforth法を用いた．丸めの誤差を支配するFFTの計算は倍精度で行った．格子数はTable2に挙げるものを用いた．この中でクラスCによる結果を厳密解と見なした．時間刻み幅は5×10^{-4}(s)で，t＝0～200(s)の区間の計算を行った．

5．計算結果の概要

Fig. 2にクラスCの結果を示す．t＝200(s)の時点で，Shock Frontsが完全に発達していることがわかる．ま

Table. 1　計算定数

R_e	L	ν	n
120	500(m)	0.02(m²/s)	4

Table. 2　計算格子数

クラス	A	B	C
格子数	5458	10920	43688

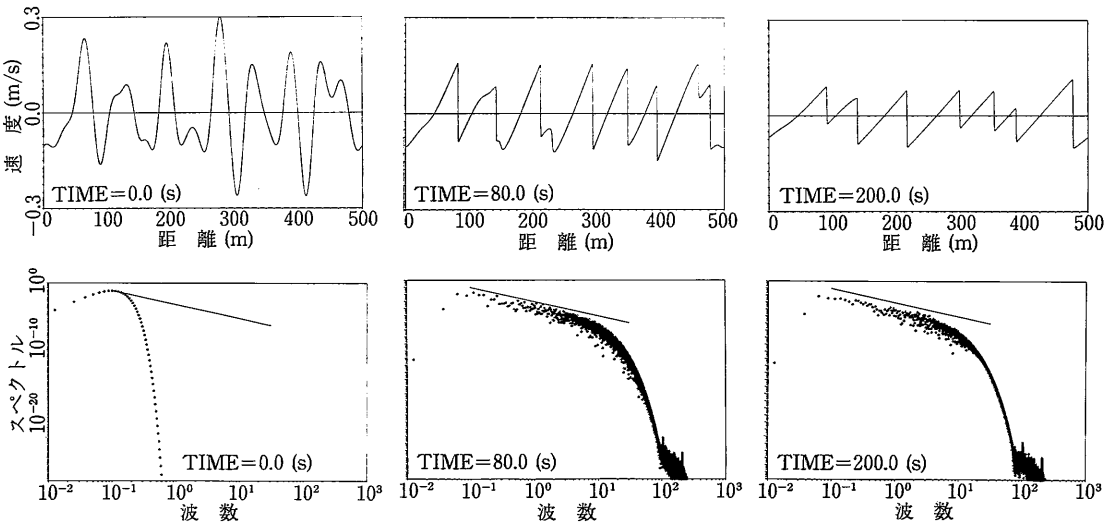

Fig. 2　クラスCの結果

た，慣性小領域のスペクトルの勾配も再現されている．時間積分の離散化数値誤差の確認のためさらに1/10の時間刻み幅（4次精度スキームにより局所打ち切り誤差は$1/10^4$倍）による計算を行い，フーリエ係数に現れる誤差の大きさが有効4桁以下であることを検証した．また，FFTの計算をさらに倍の精度で行い，フーリエ変換の際の丸めの誤差が上記誤差以下であることを確認した．

a）スペクトル誤差

現在のDSを模擬していると考えられるクラスAでは安定な解を得ることができず，クラスBによる結果をこの代用としてFig. 3に示した．Fig. 2とFig. 3との比較で特徴的なのはクラスBにおける格子スケール近傍でのスペクトルの挙動である．この部分において厳密解では急速に減少しているスペクトルがクラスBでは反対に増加し，いわゆるWiggleが発生していることがわかる．この発生機構を調べるために厳密解を用いてSGS項の評価を試みた．すなわち，(3)式において異なる3種類のフィルタ幅を用いたときのSGS項の厳密なスペクトルを算出した（Fig. 4）．(a)は慣性小領域スケール程度の格子を用いた計算（LESレベル）に対応し格子スケール周辺では非定常項に対してSGS項が十分なエネルギを持っていることがわかる．(b)はクラスAに対応し，依然格子スケール近傍でクロス項のエネルギが支配的である．(c)はクラスBに対応し，全スケールで一応非定常項がクロス項を上回っている．しかし，格子スケール極近傍のクロス項のエネルギは十分な効果を持っている．時間積分の離散化数値誤差が無視できることを検証しているので，局所的誤差はこれらSGS項の省略のみと考えられる．したがって，クラスAで安定な計算ができなかったことやクラスBでのWiggleの発生が解釈できる．さらに物理的説明を行うならば，実際にはSGSに送られるはずのエネルギが格子スケール近傍に累積しWiggleの成長に使用されたと考えられる．その意味で従来から用いられているコルモゴロフ・スケールによる必要格子数の概算方法は非常に適切であることがわかる．

幸いにもクラスBでは，このWiggleによって計算自体は破滅的結果を免れている．したがって，クラスBに見られるようなWiggleを良性のWiggleと呼ぶことにする．なぜならこのようなWiggleは，ある程度のエネルギで維持されて，我々の最も必要としているラージ・スケールには何ら影響を与えていないからである．Burgers方程式のDSにおいてこのような孤立性と安定性を持つWiggleが存在できることが重要である．ラージ・スケールに影響を与えないという孤立性は，エネルギ・カスケードのような強い方向性を持った波数空間構造によるものと考えられる．また，安定性については以下の位相誤差が関係してくる．

b）位相誤差

ここではさらに厳密解をもとにして位相誤差の検討を試みた．すなわち，厳密解に対してクラスBの結果が持つ位相誤差を算出してみた（Fig. 5）．これより位相誤差はかなりの規則性を持って発生していることがわかる．この誤差は格子スケール付近の限られた範囲にのみ発生し，高波数に向かうにつれて急激にこの誤差が大きくなる．そしてその波数範囲は前述のWiggleに比べて拡大している．この結果よりSGS項が無視された(2)式の解は本来のBurgers方程式(1)の解に比べ位相に関してFig. 5のような相違を持っていると解釈するべきである．そして重要な点は，このような位相誤差の形態が風上スキームにおける位相誤差の形態と類似であることである．

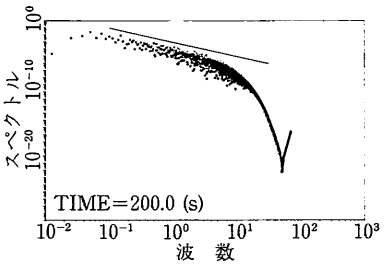

Fig. 3　クラスBのスペクトル

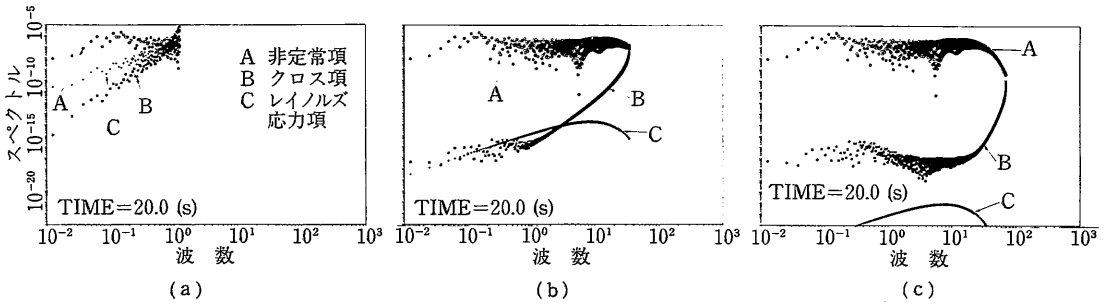

Fig. 4　SGS項の評価

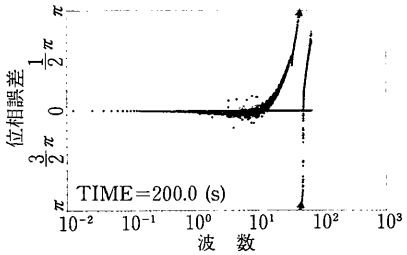

Fig. 5　位相誤差

6．議　　論

スペクトル法による計算は解のスペクトルを直接扱うという意味で最も洗練されたものであると考えられる．一方流体方程式は準線形であるから，数値計算の際ある波数部分のところで発生した誤差はその大小は別として他の波数部分のエネルギにも必ず影響を与える．つまり誤差がある波数領域に限って発生することは一般に困難であると思われる．したがってスペクトル法によるDSには次のような模式図が自然に考えられる．

流体方程式の厳密解をかなりの精度で再現するためには膨大の個数の計算格子を必要とする．この格子よりも格子数を減らして行くと，計算誤差が発生し各波数の持つエネルギが不正確になる．さらに格子数を減らすと安定な計算すら困難となる．したがって，ぎりぎり安定させたような解は全スケールのエネルギにかなりの誤差を含んでいるものと思われる．エネルギ的な観点で十分な意味を持つコルモゴロフ・スケールを用いた計算格子数の概算はこの安定計算の臨界点を与える目安となる．

しかしながら，前述した数値実験の結果はこのような模式図とは少し異なる．この結果では，安定計算が行われさえすれば，ラージ・スケールについては位相誤差も含めて文句のない結果が得られる．つまり，このとき発生する誤差は格子スケール極近傍に集中し，ラージ・スケールの部分には現れていないということである．このような事は流体方程式の解の持つカスケード過程からくるものであると考えるべきである．そして重要な点はこのようなメカニズムによって格子スケール近傍に累積されるエネルギを風上スキームと類似の位相誤差で対処しているということである．つまり，風上スキームと類似の効果による安定化が働いている際に，ラージ・スケールについては厳密解に十分に近い解が再現されている．このような事を考えるときに一つの期待を持つ．つまり，何らかの適切な風上効果を積極的に用いるとき，カスケード過程によって累積される格子スケール付近のエネルギをラージ・スケールに影響を与えることなく取り除くことができるのではないかと期待する．本来の物理的なカスケード過程が波数の2乗に比例して高波数側に偏る分子粘性の散逸効果によるものであるから，このカスケード過程を崩すことなく効果的に格子スケール付近の累積エネルギを取り除くためには，分子粘性より高階の微分係数による疑似的な散逸効果が理想的であると予想される．その意味で3次精度風上差分法による乱流計算は検討をする価値があると思われる．

(1990年9月25日受理)

参 考 文 献

1) 小林，水尾，谷口，生産研究，**42**-10(1990)
2) C. Canutoほか3名，Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, (1988)315-443
3) 三井，数値解析入門，朝倉書店，(1985)
4) J.M. Burgers, Adv. Appl. Mech., **1**(1948)171-199
5) W.C. Meechan and A. Siegel, Phys. Fluids, **7**(1964)1178-1190
6) A.A. Aldama, Lecture Notes in Engineering, Springer-Verlag, **56**(1990)126-141
7) D.T. Jeng, Phys. Fluids, **12**(1969)2006-2010