研究速報
UDC 532.517.4

3次精度風上差分法による乱流予測の可能性について（第1報）
——問題の明瞭化——

On Possibility of the Simulation of Turbulent Flows by the Third Order Upwind Finite-Difference Method
——Clarification of the Problem——

小林敏雄*・水尾　勝**・谷口伸行*
Toshio KOBAYASHI, Masaru MIZUO, Nobuyuki TANIGUCHI

1．序

CFD (Computational Fluid Dynamics) は，現在非常に注目されている分野で，理工学および工業界のかなり広い範囲をその対象領域あるいは応用領域としている．この分野の中で，実在の流れの多くが乱流であるという事実から，複雑乱流の数値計算方法の確立という課題は計り知れない価値を含んだ大難問である．この課題に取り組んできた従来の研究者達は，いわゆる"乱流モデル"の構成ということを共通の目標に掲げて，多くの成果を積み重ねてきた．

しかしながら，最近の日本の工業界(特に自動車業界)を中心として、このような路線とは少し趣を異にした計算方法が適用されるケースが目立ってきた．たとえば河村らによって提案された3次精度風上差分法[1]（以下K.K.スキーム）を使用した疑似DS[2] (Direct Simulation) の一連の流行である．このようなK.K.スキームの急速な普及は，我々数値乱流工学に携わる者にとって実は大変な問題である．つまり，この方法があまりに単純な技巧に基づいたものであるにも関わらず一見乱流現象を模擬しているように見え，この事実を理論的に取り扱おうとすることは大変困難で，したがってその結果の持つ意味についての考察は極めて少ないのが現状である．

本研究では，この方法について理論的な取り扱いを試み，この方法による計算結果の評価に際して何らかの有効な知見を得ようとするものである．まず第1段階として本報では，数値乱流工学に新たなアプローチ法を導入することから始める．

2．数値乱流工学とDS

乱流を数値計算するといっても，幾何学的に複雑な境界の中の十分高いレイノルズ数の乱流を解析しようとするには，すべてのスケールの渦の力学を扱わなければならず，計算機のみの力でこの問題を扱うことは現在のスーパ・コンピュータを駆使しても不可能で，将来的な見通しも明るくない．したがって，数値乱流工学の使命は，計算に取り入れられないスモール・スケールの影響をラージ・スケールのみでいかに反映するかという問題の解決であると信じられてきた．この思想を忠実に継承したのが①LES (Large Eddy Simulation) と k-ε モデルに代表される②RAS (Reynolds Averaged Simulation) である．これらの研究に流れる方法論についての説明は文献[3,4]を参照していただきたい．

これらに加えて近年，③pdfアプローチ[5]，④格子気体モデル[6]という新たな方法が注目されるようになった．これらは現在，その基本原理の部分が注意深く研究されている段階であり，工業界で即戦力として期待できるわけではない．このような新たな方法が研究され始めた駆動力となったのは，数値的不安定性のない計算法（モンテ・カルロ法，オートマトン）の利用への強い要望であるように思われる．ここでは，決定論的方法の放棄がなされていることになる．いずれにしても，これら4種の方法は物理的考察を基礎にしたものであった．

一方，スペクトル法を使ったDSは，強力な研究ツールとして重宝されている．物理学者には，一様乱流や2次元乱流等の理想的な乱流を発生させる数値実験用のツール，また非線形安定性問題の解析ツールとして，熱流体研究者には壁乱流の準秩序構造を可視化するためのツールとして用いられている．本研究は，十分に高いレイノルズ数の複雑乱流を直接にシミュレートするための手法を扱うものである．したがって必然的に，現在のDSよりも少ない格子数で計算できる手法であることが要求される．さらに，発展途上である計算法（スペクトル法）や確率論的計算法よりも，工業的使用に十分耐えうる計算法（差分法，有限要素法）と組み合わせることが可能な手法を志向している．

この研究の過程で，数学的アプローチと呼ぶべき新たな研究方法論を導入した．このアプローチを通して3次

*東京大学生産技術研究所　第2部
**東京大学大学院

精度風上差分法を眺めたとき，我々は一つの評価法を得ることが期待できる．すなわち，従来乱流に似た解が得られることが漠然と認識されていたこの手法について，理論的研究のための解析方法が提供される．以下ではこの考えに沿って，現在のLESとは異なる角度から乱流解析方法を構成する可能性について考察する．

3．K.K.スキームの既存の研究

ここでは説明の都合上，3次精度風上差分法の代表例としてK.K.スキームを取り上げる．

K.K.スキームとは非保存形式対流項を次のように5点差分近似するものである．

$$u_j \cdot \frac{\delta u_l}{\delta x_j} = u_j{}^j \frac{-u_l{}^{j+2} + 8\,(u_l{}^{j+1} - u_l{}^{j-1}) + u_l{}^{j-2}}{12 \triangle x_j}$$

$$+ C \mid u_j{}^j \mid \frac{u_l{}^{j+2} - 4u_l{}^{j+1} + 6u_l{}^j - 4u_l{}^{j-1} + u_l{}^{j-2}}{4 \triangle x_j} \quad (1)$$

ただし上付添字は格子の位置を表し，Cは定数，δは無限小dの有限差分である．(1)式の右辺を形式的にテイラ展開表示に戻すと，

$$u_j \cdot \frac{\delta u_l}{\delta u_j} = (u_j \cdot u_{l,xj})^j$$

$$+ \frac{C}{4} \triangle x_j{}^3 \mid u_j{}^j \mid u_{l,xjxjxjxj}{}^j + O(\triangle x_j{}^4) \quad (2)$$

となる．有限差分近似の過程で付加された(2)式右辺の4階微分係数を持つ第2項が運動エネルギを散逸し数値解を安定化することによって，十分に粗い格子でも直接にシミュレーションを行うことが可能であることが知られている．

このようなK.K.スキームを用いた応用計算は，現在では紹介しきれないほど多数存在している．代表的なものとしては，河村自身による遷移領域の計算[7]や，自動車外回りの空力計算等[8),9)]があり，工学上重要な臨界現象の予測にかなり良く対応できることが報告されている．

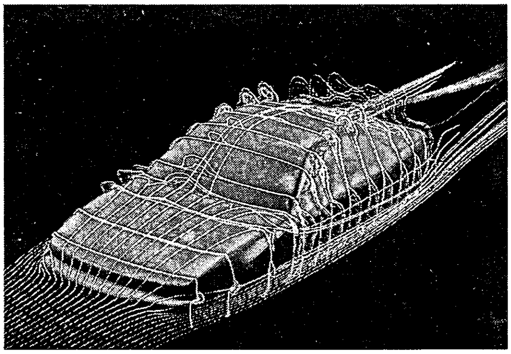

Fig. 1　空力計算例[8)]

しかし，この手法を理論的に取り扱った研究は極めて少なく，宮内らによる研究[10)]は貴重なものである．彼らは，K.K.スキームによる3次元一様等方性乱流の数値実験を行い，数値解のスペクトル解析からこの方法がガウシアン・フィルタのLESと等価であることを主張した．すなわち，スキームの誤差項がLESにおけるSGS (Sub grid Scale) 項の最も低級なモデルとなっていると解釈することでこの方法が実用に耐えうる可能性のあることを示した．しかし，このような解釈 (LES化) によるK.K.スキームの評価は，次の2つの物理的問題が解決されなければ完全なものと成らないとされている．

1) 乱流粘性が分子粘性より高階の微分係数 (超粘性) でモデル化できうるか？
2) K.K.スキームはフレーム不変性[11),12)]を満たせるか？

また，宮内らはLESとのアナロジからK.K.スキームによる計算結果の解釈を与えたもので，この解釈からK.K.スキームの使用に対しての有効な知見を引き出すことは困難なように思われる．そこで本研究では，LESとの関係を探そうといった従来の研究法をいったん捨てることにする．

4．数学的アプローチ

これまでの数値乱流工学は，経験的アプローチと物理的アプローチという2つの研究方法により進められてきた．前者では数値実験という強力な武器を駆使して物理実験結果との比較ということに力が注がれた．一方，後者では物理原則(フレーム不変性など)，統計力学，テンソル解析，次元解析を武器とした．このような2つの方法が発生したのは，流体支配方程式に“平均”を行うことで正則化された新たな方程式を得て，その中の未知相関を物理モデルで反映しようとする基礎概念があったからである．しかし，本研究ではこの基礎概念からいったん離れることになる．

一般に数値計算を行うとき，まず有限個数の計算格子を解析領域に設定する．解析学的な表現では有限項数の固有関数展開で解を近似することを意味する．有限差分法による場合には，さらに波数応答性[13)]の問題が付加されるが，いずれにしても格子系を定めた時点で解析できる解の滑らかさに絶対的な制限を与えたことになる．したがって，実際に計算する方程式 (平均N-S方程式) に必要とされるのは，この式の初期値-境界値問題が，設定格子によって定まる滑らかさを持つ関数のクラスの中で一意的に解けるという事である．よって，新たな研究方法として，このような解の一意性を満たす方程式の集合から出発して適切な性質を持ったものを選択していくと

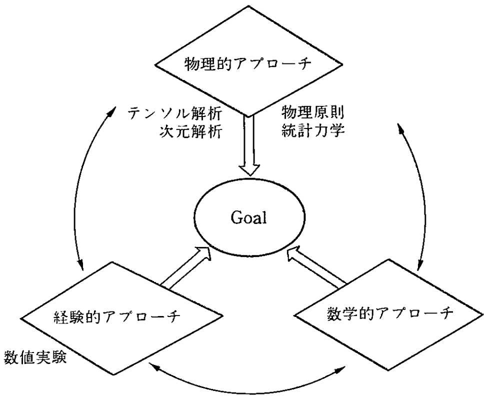

Fig. 2　数学的アプローチ

いう方法が考えられる．または，乱流支配方程式としてあくまでN-S方程式を仮定するならば，この式を数学的に変換して十分な正則化を行った方程式の集合を対象範囲として適切な選択を行おうという研究方法が考えられる．

しかし，このような数学的正則化には多くの危険性が含まれていて，正則化自体を少なくとも次の3つに分類して理解しておくことが必要である．

a）非流れ現象化　正則化された方程式がもはや流体現象すら記述しないように正則化されている場合

b）低レイノルズ数化　1次精度風上差分法のように，単にレイノルズ数を下げる（乱流現象の消失）ことが主たる正則化の原因となっている場合

c）最適な正則化　乱流の支配方程式の厳密解が所有すると期待される性質を十分に保持したまま正則化が行われた場合

この中で我々の必要としているのはもちろんc）であり，a），b）の正則化に陥ることは避けねばならない．このような危険性を極力防ぐために，正則化された方程式が，次のような非ニュートン流体の支配方程式に近い形であることは理想的であるように思われる[14]．

$$\dot{u}_i + u_j \cdot u_{i,xj} = -p_{xi} + P_{ij,xj} \quad (3)$$

ここでPは応力テンソルで，

$$\begin{aligned} P_{ij} = &\alpha(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})E_{ij} \\ &+\beta(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})D_{ij} \\ &+\gamma(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})D_{ik}D_{kj} \end{aligned} \quad (4)$$

ただし，

$$D_{ij} = u_{i,xj} + u_{j,xi} \text{（歪速度テンソル）} \quad (5)$$

で，I，II，IIIはDの基本不変量，α，β，γはそのスカラ関数である．Eは単位行列である．

このような数学的アプローチの考えは実はかなり古くから提案されているもので，Ladyženskayaの精力的な研究[14]が有名である．

最後に注意すべき点は，この種の数学的正則化を現在の平均化に厳密に対応させてはならないことである．つまり，乱流がN-S方程式の厳密解であることを出発点とするならば平均の具体的な形式（たとえば体積平均とかガウシアン・フィルタとか）を規定できず，逆に平均化の形を規定するならば最初にN-S方程式を仮定できない．なぜなら，現在用いられている平均に対しての数学的に厳密な乱流モデルは，存在しないか，または存在してもコルモゴロフ・スケール程度の格子系を用いないと計算できないものかのどちらかであるからである．

5．DS の 再 定 義

現在のDSはFTS（Full Turbulence Simulation）と同義[15]であり，原則的にはコルモゴロフ・スケール近傍のスペクトルを解析できる計算法と格子系とを必要とする．その意味で，スペクトル法（あるいは十分に注意深く扱われた中心差分法[16]）と大容量計算機との組み合わせが必須である．このようなDSの研究は，レイノルズ数を上げるという問題に関して検討するだけでもハード・ウェアの進歩待ちであることが分かる．そこで本研究では，このような狭義のDSからより自由度を持った概念としてDSを再定義し直すことにする．しかしこの再定義は，言葉の上での定義を拡張して，低精度な計算法でもDSと呼べるようにしようとするものではないことを先に強調しておく．

定義　最大スケールから（コルモゴロフ・スケールと無関係に設定された）格子スケール近傍までに関しては厳密解の極めて良い近似を与える手法で，物理モデルを用いていないとき，これをDSと呼ぶ．

この再定義によって，DSの新たな手法が開発可能となり，従来のような「直接」=“平均しない”という概念から，「直接」=“数学的に厳密”という概念に拡張された．そして何よりも，風上スキームによる乱流計算の明白な位置付けが可能となることが期待できる．現在やむなく疑似DSと呼ばれるこの方法は，“平均しない”という定義によってDSであると主張されてきたが，明らかにFTSではない．しかしこの再定義によれば，この方法の位置付けは純粋に数学的な問題に帰着できる．

6．本研究の方向付け

上述の数学的アプローチの枠組みの中でK.K.スキームを扱うというのは，具体的には次の変数変換の解析か

解析の過程

N-S方程式 (a)
↓ 変数変換　（表現を実行できるもの）
(N-S)' 方程式 (b)
▽ 数値的解析
(b)の有限固有関数近似解
↓ 逆変換
(a)の正則化解　（ラージ・スケールについては高精度）

Fig. 3　有効な変数変換の性質

ら始めることを意味する。

$$u_j \cdot u_{l,xj} \rightarrow$$
$$\xi_j \cdot \xi_{l,xj} + C \mid \xi_j \mid \xi_{l.xjxjxjxj} \qquad (6)$$

この変数変換の一意性が解明されたなら，K.K.スキームによる対流項の離散化誤差は$O(\triangle x_j{}^4)$となり，誤差項の表現式が具体的に定まる，したがって，さまざまな流れ場で，この誤差項が十分に小さく保たれているかが一つの目安となる。

しかしながら，我々も(6)式のような変数変換をそのまま取り扱おうといったかなり大胆な目標を掲げているわけではない。むしろこのような変換は存在しないであろうと推定している。したがって，数学的にもっと取り扱いやすい変換を基に(6)式に近い変数変換を探し，適切に修正された高次風上スキームの構成を試みる。ここでK.K.スキームが取り上げられた理由は，従来の数値実験結果から判断して，この方法の持つ変換が強い正則化を成しているのではないかと期待されるからである。

ところで，準線形方程式に対しての変数変換の例としてBurgers方程式におけるコウル・ホップ変換[17]がある。

次式のBurgers方程式において，

$$\dot{u} + u \cdot u_{,x} = \nu u_{,xx} \qquad (7)$$

次のような非線形の変数変換を導入すれば，

$$u = -2\nu \frac{\phi_{,x}}{\phi} \qquad (8)$$

ϕの満たすべき新たな方程式は熱伝導方程式となる。

$$\dot{\phi} = \nu \phi_{,xx} \qquad (9)$$

このときuから陽的にϕを得るための関係式は，

$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\nu}\int_{x_0}^{x} u(\xi)\,d\xi\right) \qquad (10)$$

ここで(8)式が変換の微分表現式で，(10)式が積分表現式である。この2つの表現式が存在していることが変換の一意性を保証する。(9)式は線形方程式であるから，この変換以上に強い正則化は存在しないと言える。しかし残念にも，乱流計算という意味ではコウル・ホップ変換で適切な正則化は行えない。

以上の議論を整理すると，我々の試みようとしている変換はFig. 3のように模式化される。したがって，この条件を満たす変数変換を探すことが研究の1つである。

(1990年7月25日受理)

参 考 文 献

1) T. Kawamura and K. Kuwahara, AIAA paper, 84-0340 (1984)
2) 鬼頭，小林，第28回生研講習会テキスト，(1988) 33
3) 吉澤，第28回生研講習会テキスト，(1988) 1-16
4) 木田，数理科学-数値流体力学，(1989) 36-42
5) S.B. Pope, Prog. Energy Combust. Sci., 11 (1985) 119-192
6) U. Frisch, Lecture Notes on Turbulence, World Scientific, (1987) 219-371
7) 河村，岩津，第2回数値流体力学シンポ講論集，(1988) 375-378
8) R. Himeno, M.Takagi, K. Fujitani and H. Tanaka, SAE paper 900 319
9) 河口，橋口，第2回数値流体力学シンポ講論集，(1988) 499-502
10) 宮内，谷，機論B，53-486 (1987) 388-392
11) C.G. Speziale, J. Fluid Mech., 156 (1985) 55-62
12) C.G. Speziale, Theoret. Comput. Fluid Dynamics, 1 (1989) 3-19
13) N.N. Mansour, P. Moin, W.C. Reynolds and J.H. Ferziger, Turbulent Shear Flows I, (1979) 390-392
14) O.A.ラジゼンスカヤ著，藤田・竹下訳，非圧縮粘性流の数学的理論，産業図書，(1989)
15) 堀内，第28回生研講習会テキスト，(1988) 37
16) 巽，金藤，流れの安定性理論，産業図書，(1989) 118-122
17) E. Hopf, Commun. Pure and App. Math., 3 (1950) 201-230