

界面き裂の力学

Mechanics of Interface Crack

結城良治*・許金泉*

Ryoji YUUKI and Jin-Quan XU

異種材料を接合・接着した部材ないし複合材料の強度は異材の界面の性状および応力に強く支配されている。このような材料の強度評価に向けて、境界要素法 (BEM) を用いた応力解析法、界面の力学的取扱い、界面き裂のモデル化とパラメータ、界面破壊のクライテリオンについて述べ、解析例・評価例についても言及する。

1. はじめに

最近ますます高機能・高強度・軽量化を目指し、材料の複合化が進み、新たな複合材料が開発され、また異材の接着・接合技術の進歩も著しく、構造接着や金属—セラミックス接合などの実用化が進んでいる。このような材料の複合化が進むなかで、複合材料・非均質材料の強度評価が重要となってきた。特に複合化した材料の機能はもとより、強度も異材の界面の性状・接合強度に強く支配されることから、界面 (Interface) の力学、破壊力学、強度評価が重要となり、最近、各国で活発な研究が展開されている¹⁾。

しかし、材料および応力も不連続に変化する界面の力学的取扱いは必ずしも容易ではなく、界面端の応力特異性、接合残留応力の存在、さらには界面き裂の振動応力特異性などのため、多くの混乱が生じ、界面の強度の定量的評価法としてまだ確立していないのが現状である。

ここでは異材界面の力学、特に界面き裂の力学に焦点をあて、著者らの研究を紹介しつつ、その現状や問題点を整理し、界面強度と破壊の線形破壊力学評価手法の確立に向けての今後の課題を展望する。

2. 異材界面のモデル化と境界条件

異材接合界面はミクロに見れば複雑な構造となっているが、マクロに見た力学モデルでは図1のように単純化し、材料定数の異なる材料が理想的に接合され、その界面上で次式の完全接合条件を課す。ただし、ここでは簡単のため界面は直線でx軸上にあるものとする。

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \quad \sigma_x^{(1)} \neq \sigma_x^{(2)} \\ u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)} \quad \text{on } y = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

上式の上段は表面力のつりあい、下段が変位の連続性を

意味する。上式の界面に沿う方向の応力成分 σ_x の不連続性に注意する必要がある。この応力不連続量は別途界面の変形の連続性により関係づけられている²⁾。

さらに界面でのすべりを許す不完全接合条件は摩擦を無視するものとして次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)} = 0 \\ v^{(1)} = v^{(2)} \quad \text{on } y = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

また界面にはくりが生じ、開口している場合には、

$$\sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)} = 0 \quad \text{on } y = 0 \quad (3)$$

いわゆる応力自由条件となる。

力学的アプローチでは、界面を単純モデル化したかわりに、実際に接合した材料の強度実験を行い、界面接合強度や界面き裂強度をこのモデルを用いた解析により得られる力学的パラメータを用いて、形状・負荷条件によらない形で特性づけ、評価しようとするものである。

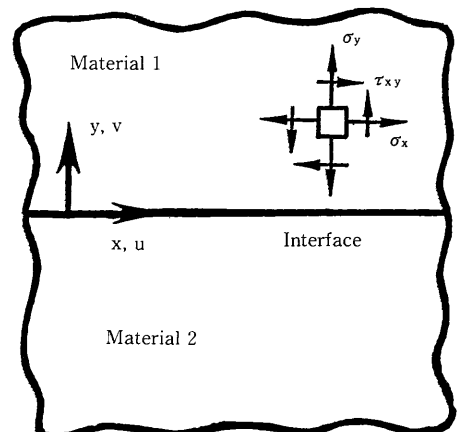


図1 異材界面の力学モデル

*東京大学生産技術研究所 第1部

3. 異材接合構造の応力解析法

異材接合材料ないし構造の強度評価に際し、まず応力分布を把握する必要がある。特に破壊が予想される界面上ないしその近傍の応力を正しく解析しなければならない。異種材料が複雑に接合した構造の応力解析には数値解析に頼らざるを得ない。現在、有限要素法 (FEM) を用いた解析がさかんに行われている。しかし、このような問題に対して FEM は確かに便利ではあるが、精度・効率性に不安がある。そこで著者らは異材接合構造解析用に新たな境界要素法弾性解析 (BEM) プログラムを開発した^{3),4)}。本解析法の特徴は、前述 (1) 式の完全接合条件を厳密に満たす Hetenyi の基本解を BEM に組み込み、界面上を離散化近似することなく、異材接合構造が効率のかつ高精度で解析できることである。図 2 は簡単な異材突合せ継手のモデルについて、FEM、従来の BEM、新たな BEM の要素分割パターンを示す。この図から本手法の有効性がわかる。特に界面上の応力分布および界面端の特異応力が精度良く求められる。また小規模なマトリックスが計算できるため、二次元問題であればマイコンで

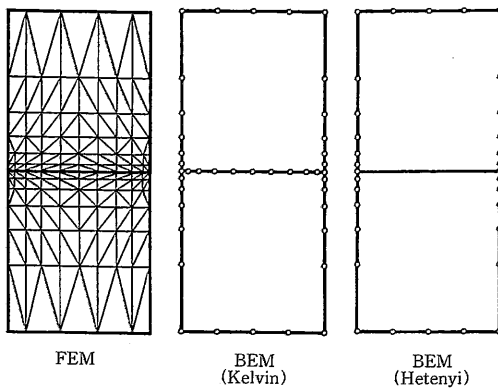


図 2 異材突合せ継ぎ手の FEM・BEM 要素分割例

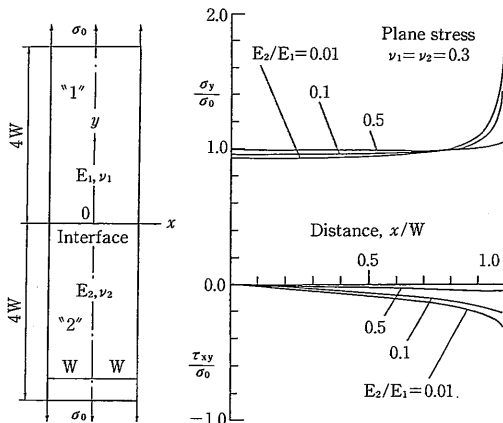


図 3 異材突合せ継ぎ手の界面上の応力分布の BEM 解析例

も計算でき、ワークステーションを使えば複雑な構造も取り扱える。

BEM を用いた解析例の一例として二相異材継手の引張により生じる界面上の応力分布を図 3 に示す⁴⁾。自由縁と交差する界面端に著しい応力集中が生じることがわかる。この点は弾性学上、応力特異点となり、その特異性のオーダについて Bogy らの詳細な研究がある⁵⁾。

一方、図 4 は金属—セラミックス接合継手の接合時に生じる残留応力の界面上の分布を BEM 弾性解析した例を示す。両材の線膨張係数の著しい相違により、やはり界面端に著しい応力集中が生じ、図 3 と比べて特にせん断応力の集中がはげしいことが分る。金属—セラミックス接合ではこの残留応力をいかに緩和するか重要な問題となっている。このような界面端の応力集中から、また界面の接合強度が弱いこともあって、界面に沿っての破壊が予想される。

4. 界面き裂の線形破壊力学

前述のように界面端からのき裂の発生・界面に沿ってのき裂の成長が予想され、異材接合材料の強度評価法として破壊力学に対する期待が大きい。しかし、特に問題となる界面き裂については、その弾性学的取り扱いについて長い間混乱が続き、その破壊力学パラメータ、解析法、クライテリオン、実験法などまだ確立していないのが現状である。最近、この界面き裂の諸問題について活発な研究が見られるようになった。特に米国で精力的な研究が展開されている^{7),8)}。

ここでは界面き裂の線形破壊力学に焦点を絞り、混乱の原因をふりかえり、最近急速な進展が見られるこの分野の動向を紹介する。

4.1 界面き裂の応力拡大係数の定義

図 5 に示す界面モデルを考えるとき裂先端の $\theta = 0$ での応力分布は次式で与えられる。

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = \frac{K_1 + iK_2}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{r}{l}\right)^{i\epsilon} \quad (4)$$

またき裂先端近傍のき裂面相対変位は次式で与えられる。

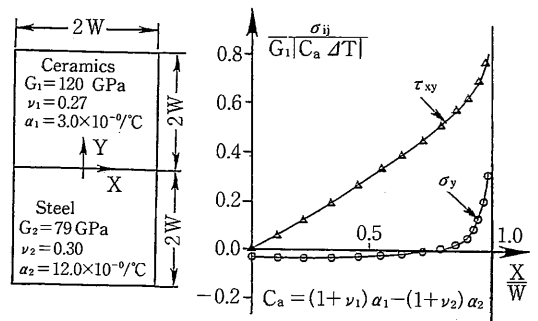


図 4 セラミックス/金属接合界面上の残留応力

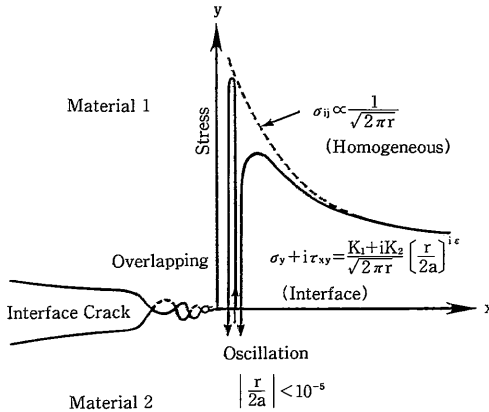


図 5 弾性界面き裂モデル (開口型)

$$\delta_y + i\delta_x = \frac{K_1 + iK_2}{2(1+2i\varepsilon)\cosh(\varepsilon\pi)} \left\{ \frac{\kappa_1 + 1}{G_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{G_2} \right\} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{l} \right)^{i\varepsilon}$$

$$\kappa_i = \begin{cases} (3 - \nu_i)/(1 - \nu_i) & (\text{plane stress}) \\ 3 - 4\nu_i & (\text{plane strain}) \end{cases} \quad (i=1,2) \quad (5)$$

ここで、 G_1, ν_1 はそれぞれの材料のせん断弾性係数とポアソン比であり、 K_1, K_2 は界面き裂の応力拡大係数であり、いわゆる均質材の応力拡大係数と定義が異なる点に注意する必要がある。また上式の ε は次式で定義される材料定数 (Bi-material constant) である。

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\kappa_1/G_1 + 1/G_2}{\kappa_2/G_2 + 1/G_1} \right) \quad (6)$$

上式から $\varepsilon = 0$ となる条件を導くと、次式が得られる。

$$\frac{\kappa_1 - 1}{G_1} = \frac{\kappa_2 - 1}{G_2} \quad (7)$$

上式を満たす均質材および異材では $\varepsilon = 0$ となり、後述のような振動特異性が消失し、良く知られている均質材中のき裂の変位場・応力場と同様となり、それ故 $K_1 = K_I, K_2 = K_{II}$ と記すことができる。

さて、一般の異材界面き裂 ($\varepsilon \neq 0$) の場合について、(4)、(5)式は均質材中のき裂と以下の点で大いに異なる性質が挙げられる (図5参照)。

- 1) 界面き裂先端近傍の変位場・応力場は、距離 r 、角度 θ の分離関数で表示できない。
- 2) モード I, II の変形と K_1 と K_2 が一対一に対応しない。
- 3) 応力の特異性は $r^{-\frac{1}{2} + i\varepsilon}$ となり、これはき裂先端極近傍で応力が振動しつつ無限大となること、すなわち oscillation singularity を意味する。
- 4) 変位もき裂先端極近傍で振動性を呈し、き裂面が互いにオーバーラップする。

これらはいずれも (4)、(5) 式の $(r/l)^{i\varepsilon}$ の項に起因するものである。なお、従来この項を無次元せず $r^{i\varepsilon}$ とする定義も使われていたため^{10,11)}、大きな混乱が続いていたが最近 (4) 式、(5) 式の形での定義の統一化の方向にある。ただし、この定義でも無次元化のための l の取り方の任意性の問題も残るが、ここでは l としてき裂全長をとるものとして、このように定義を統一して用いれば問題はない¹²⁾。

なお、界面き裂の界面に沿う進展に伴うエネルギー解放率 G は、弾性ないし小規模降伏条件下で次式により K と関係づけられる¹³⁾。

$$G = \frac{1}{16\cosh^2(\varepsilon\pi)} \left\{ \frac{\kappa_1 + 1}{G_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{G_2} \right\} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (8)$$

G にすれば oscillation や前述の定義の混乱もキャンセルされ、界面き裂のパラメータとして良く使われる。ただし、界面き裂は一般に混合モードとなるため、この破壊を特性づけるために G のモード成分の分離が問題となる。

4.2 振動応力特異性と Contact zone model

前述のような界面き裂の特殊な応力・変位挙動について古くから知られていたが、その物理的解釈をめぐって長い間混乱が続いてきた。まず Comminou¹⁴⁾ は、前述の4) のオーバーラップを不合理と考え、この領域を contact zone とみなし、(2) 式の境界条件を課したモデルを提案し、この contact zone を導入すると応力の振動特異性も消失することもあって注目を集めた。しかし、その後、引張荷重を受ける界面き裂のオーバーラップ域は極めて小さく、このモデルで接触域を求めるのは困難であり、かつ引張方向の応力の特異性が消え、 K_{II} しか生じないことが指摘され、Atkinson¹⁵⁾、Mak¹⁶⁾、須賀ら¹⁷⁾ により改良モデルが次々と提案され、この混乱に拍車をかけた。

一方、最近、(4) 式、(5) 式は界面き裂面に (3) 式の応力自由条件を課すかぎり正しいことが認識され、また不合理なオーバーラップも、開口形の界面き裂を考える場合、極めて小さな領域 (たとえば $r/a < 10^{-5}$) に限られ、その影響は無視できることがわかってきた¹²⁾。また最近の界面き裂の弾塑性解析などから、実際の界面き裂ではき裂先端に塑性域が形成され、応力振動域や変位のオーバーラップ域はこの塑性域に吸収され、生じないことが明らかになってきた^{7,8)}。したがって、著者らは界面き裂にも小規模降伏条件が存在し、この条件が成立する範囲ではき裂先端の極近傍を除く、近傍の応力場や変位場は (4)、(5) 式で支配され、その係数 K_1, K_2 が決まれば、界面き裂先端近傍の変位場・応力場が一義的に決まり、かつ小規模降伏域の構造も決まる。したがって、界面き裂のパラメータとして K_1, K_2 が有効と考えている。なお、界面き裂の小規模降伏域の構造は、材料・負荷レベル、 K_1/K_2 などにより複雑に変化し、最近 Rice⁷⁾ や Shih

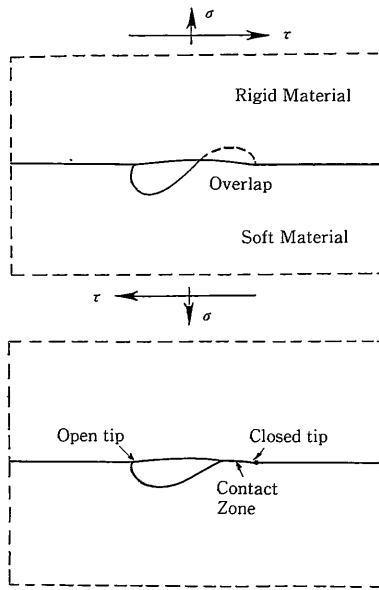


図6 閉口型界面き裂モデル

ら⁹⁾により詳細な解析・検討が進められている。

4.3 閉口型界面き裂モデル

前節までの議論は、界面き裂が引張荷重を受け、き裂が開く場合のものであり、図6に示すように少しでもせん断応力を受けると、両材料の変形状態のちがいがらき裂面のオーバラップ・接触が生じやすくなり、無視できない巨視的な接触が生じる場合には、接触を考慮した解析が必要となる^{18),19),20)}。内部き裂では一端が閉口、他端が開くことが多い。この場合は、オーバラップを無視せず、接触域を求め、その接触域ではすべりを許し、(2)式の境界条件を課す必要がある(Comminouのモデルと一致する)。その開口端では、次式で定義される K_{II} が生じることになる。

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy} \quad (9)$$

ここでは、 τ_{xy} は開口端近傍界面上のせん断応力である。また他端の開口端の K は(4)、(5)式で定義される K_1, K_2 を用いるものとする。なお、この場合でも閉口端に生じる K_{II} がどのように破壊に寄与するか不明である。

4.4 応力拡大係数の計算法

さて界面き裂のもう一つの困難は、ごく小さな領域で生じる振動応力特異性をどのように数値解析上取り扱うかである。界面き裂の強度評価では、 K_1, K_2 をすべての力学的条件を考慮して解析・評価する必要がある。通常のBEM, FEMではき裂近傍を離散化した段階で振動特異性が無視されてしまう。それゆえ、現在の界面き裂の K はすべて解析的な方法で求められたもののみで、無限板中のき裂など単純なものしかないのが現状であった。

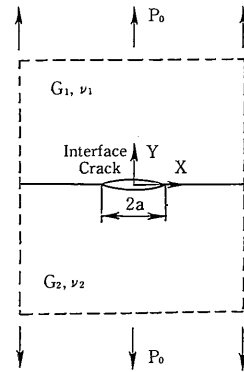


図7 一様引張を受ける無限板の界面き裂問題

例えば図7の無限板中のき裂が無限遠方で P_0 の引張応力を受ける場合については次式として K_1, K_2 が厳密解の形で与えられている¹⁰⁾。

$$K_1 - iK_2 = P_0 \sqrt{\pi a} (1 - i2\epsilon) \quad (10)$$

この問題について著者らの開発したBEMを用いて解析し、界面上の応力分布がどうなるか調べてみよう。なお、このような問題は通常のFEM, BEMでは厳密な解析はできない。界面の接合条件を完全に満たす基本解を用いて、界面を離散化せず解析できる本BEMにより初めて可能となった。ここでは、 $\epsilon = 0.175$ となる振動特異性が最も顕著となる場合と異材でも $\epsilon = 0$ となり、振動

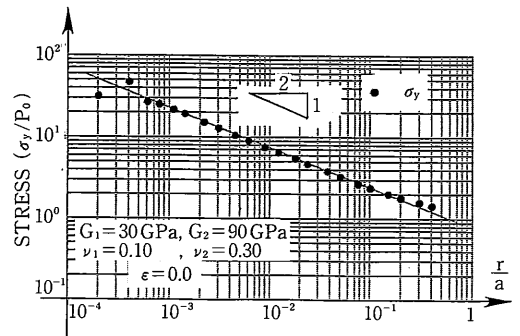


図8 界面き裂先端の応力分布 ($\epsilon = 0.0$)

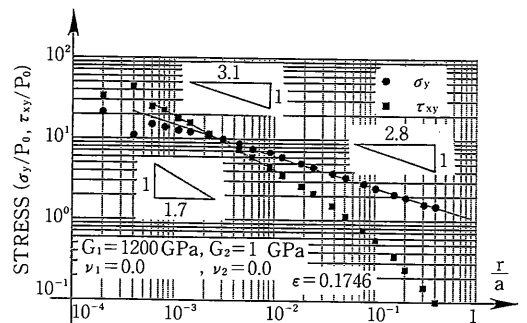


図9 界面き裂先端の応力分布 ($\epsilon = 0.1746$)

特異性が消失する 2 つの極端な材料組み合わせを選んで解析した。図 8, 9 に両者の界面上の応力分布の解析例を示す。ただし、き裂先端極近傍をみるため、横軸を $\log(r/a)$ で示している。まず $\varepsilon = 0$ の場合をみると σ_y は正しく $r^{1/2}$ の特異性を示し、負荷の対称性から $\tau_{xy} = 0$ となることがわかる。これは全く均質材と同様である。一方、 $\varepsilon = 0.175$ の場合は、 τ_{xy} が生じ、 σ_y, τ_{xy} とも $r^{1/2}$ の特異性とはなっていないことがわかる。これは、(4) 式を成分ごとに書き直し、(10) 式を代入した次式の応力場が現実に支配していることを意味する。

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_1 \cos(\varepsilon \ln \frac{r}{2a}) - K_2 \sin(\varepsilon \ln \frac{r}{2a}) \right\} \quad (11)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_1 \sin(\varepsilon \ln \frac{r}{2a}) + K_2 \cos(\varepsilon \ln \frac{r}{2a}) \right\} \quad (12)$$

なお、この場合の振動域は $r/a < 10^{-5}$ であり、数値解析では振動する応力そのものは見えないが、振動項の影響は図 9 のように見えてきたと考えられる。なお、図中き裂先端極近傍 ($r/a < 10^{-3}$) で解析結果がバラついて見えるのは数値解析上のエラーである。

さて著者らは界面き裂の K を数値解析により得られるき裂先端近傍の応力・変位から精度良く求める外挿法を提案している¹²⁾。外挿によりき裂先端近傍の解の誤差や振動特異性の影響を排除して、K が求められる実用的な手法である。たとえば、応力外挿法では、混合法として、

$$K_1 = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} (\sigma_y^2 + \tau_{xy}^2)$$

$$K_1/K_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(\tau_{xy}/\sigma_y) - \tan Q}{1 + (\tau_{xy}/\sigma_y) \tan Q} \quad (13)$$

$$Q = \varepsilon \ln(r/2a)$$

により、 K_1 ((8) 式の G に対応) および K_1, K_2 が求められる。また、次式のように K_1, K_2 別々に求めても良い。

$$K_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} (\sigma_y \cos Q + \tau_{xy} \sin Q)$$

$$K_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} (\tau_{xy} \cos Q - \sigma_y \sin Q) \quad (14)$$

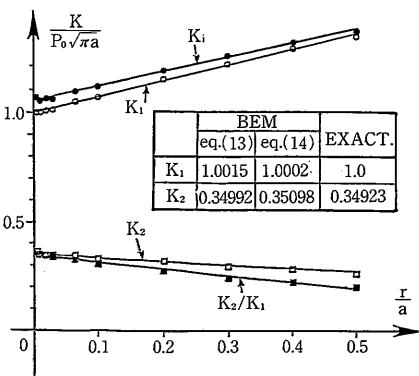
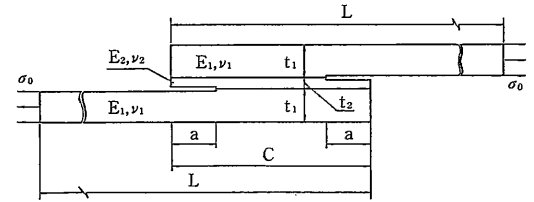


図10 応力外挿法(混合法(13)式, 分離法(14)式による) 界面き裂の応力拡大係数の決定例

図10に $\varepsilon = 0.175$ の場合について、この応力外挿法により K を決め、その外挿の例と得られた結果を厳密解と比較して示す。本手法で求めた K_1, K_2 は良く厳密解と一致し、本手法の有効性がわかる。この結果で重要なのは、振動特異性を考慮して厳密に求めた K と振動特異性を無視して数値解析により求めた K が一致した点にある。すなわち、数値解析 (FEM, BEM) でも、き裂先端近傍を細かく分割し、き裂先端から少し離れた点の応力ないし変位が精度良く求まれば、K が計算できることになり、これにより実際評価すべき有限板の複雑な界面き裂の K の解析が可能となった。ここでは応力を用いる方法を示したが、変位を用いても同様な外挿もできる¹²⁾。また、(8) 式の G は外挿によらなくても、仮想き裂進展法 (VCE) などエネルギーの計算も可能であるが、この場合 $K_1^2 + K_2^2$ はわかるが、その分離が問題になる。

4.5 界面き裂の応力拡大係数の解析例

著者らは界面き裂の各種の問題について、BEM 解析を行い、前述の方法で K_1, K_2 を計算している。たとえば、図11の接着重ね継手の K の解析例を図12に示す¹²⁾。この K は接着剤の厚さ、材料定数に依存して変化し、接着厚さが厚いほど、また接着剤と母材のヤング率比が 1 に近いほど K_1 が大きく、強度的に弱いことが予測される。図13は界面に垂直に近接したき裂が、界面に到着した後、界



$t_1 = 5\text{mm}, C = 40\text{mm}, L = 150\text{mm}$
 Case A. $E_2/E_1 = 0.4/21.0, \nu_1 = 0.3, \nu_2 = 0.35, t_2 = 0.1\text{mm}$
 Case B. " " " " " " " " " $t_2 = 1\text{mm}$
 Case C. $E_2/E_1 = 1/2, \nu_1 = \nu_2 = 0.3, t_2 = 1\text{mm}$

図11 接着重ね継手の界面き裂

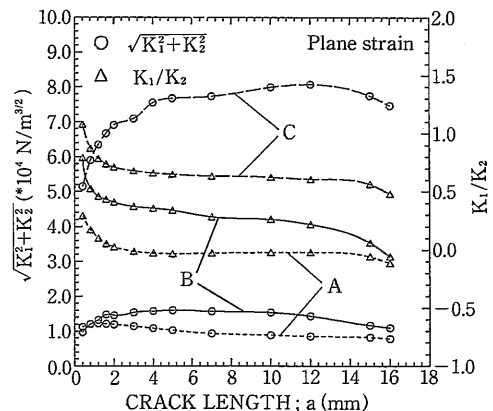


図12 接着重ね継手の界面き裂の応力拡大係数の解析例

面に沿って分岐したモデルを示す。このような分岐は特に複合材 (FRP, FRM) で生じやすい。このモデルのKの解析例を図14に示す²³⁾。分岐後の K_1 は急激に減少することから、このき裂はやがて停止することが予測される。しかし、 K_2/K_1 が増加していることから再び材料1側へ屈折する可能性もある。

図15はLSIの界面はくりを想定した二次元断面モデルである。このLSIに均一温度冷却 ($\Delta T = -100^\circ\text{C}$) を与えた場合のKの解析例を図16に示す²⁴⁾。この場合、き裂の大部分が閉じ、わずかにA点近傍のみき裂が開く。図16はこのき裂閉口を考慮し、開口端のA点のKを開口き裂の K_1 、 K_2 の定義により求めたものである。

5. 界面破壊のクライテリオン

界面き裂のパラメータが明らかとなり、その解析が可能となった現在、このパラメータを用いて実際の界面破壊現象を特性づけ、界面固有の強度・破壊クライリオンを明らかにし、強度評価法を確立することが今後の重要な課題となっている。

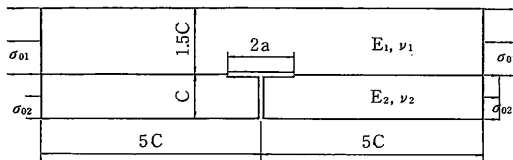


図13 分岐界面き裂のモデル

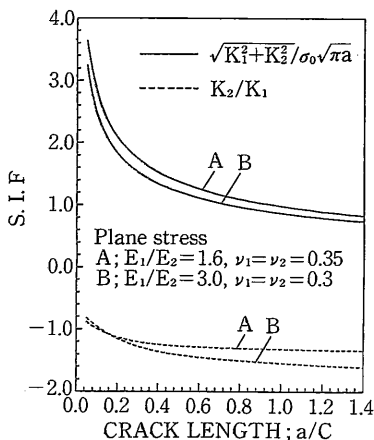


図14 分岐界面き裂の応力拡大係数の解析例

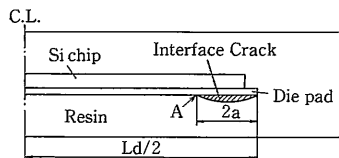


図15 LSIの2次元断面モデル

そのためには、界面き裂を有する標準的な試験片・試験法を確立する必要がある。この際、解析モデルと合うような理想的な接合状態を実現し、かつ接合に伴う残留応力の正しい把握・評価も必要となる。界面き裂は図17に示すように2つの経路が予想される。界面に沿う経路が予想される場合には、界面き裂は一般に混合モードとなるので、混合モードクライテリオンが必要となる。著者らは各種形状の接着継手の実験を通じて、界面破壊には均質材とは異なる固有の混合モードクライテリオンが存在し、また静的破壊と疲労でそのクライテリオンが異なることを明らかにしている²²⁾。

さらに界面接合強度が強く、せん断負荷が加わると母材側に屈折する場合も良く生じうるので、この場合は別途、屈折条件・基準も必要となる。著者らはこの基準として応力 ($\sigma_\theta \max$) 基準を提案している²³⁾。またHutchinsonらはエネルギーG基準を提案している²⁴⁾。図18は両基準で予想した屈折角度を示す²³⁾。これらのクライテリオンおよびそれぞれの母材の強度特性、界面強度特性データとを総合的に判断して、界面の破壊挙動の予測・強度評価も可能となると考えられる。

6. お わ り に

材料の複合化が進み、ますます重要と思われる界面の力学および強度評価、特に界面き裂の力学について、著者らの研究を中心に紹介した。最近の界面き裂の研究の進展は著しいものがあり、弾性から弾塑性、2次元から3次元、等方性材から異方性材へと拡張が進められている。ただし、まだパラメータの定義・モデルなどの混乱が見られ、十分注意が必要である。

界面の問題の理論的研究が進むなかで、実験的な研究の遅れが目立っている。いまだ界面強度および界面き裂強度の標準的な試験法・試験片も決まっていない。特に界面では母材と異なる特有の強度および破壊クライテリオンが存在することから、この界面特有のクライテリオンを明らかにし、各種材料の接合界面強度データを蓄積するのが今後の重要な課題である。この際、接合残留応

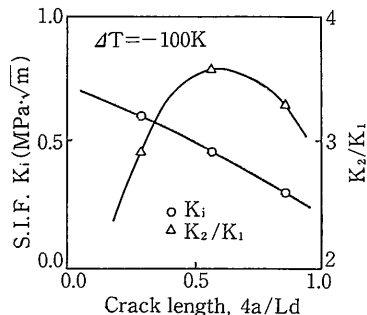


図16 LSI界面き裂のKの解析例 (一様冷却時)

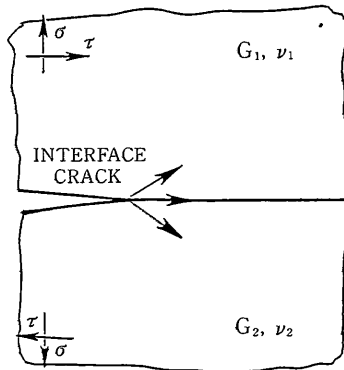


図17 界面き裂の可能な進展方向

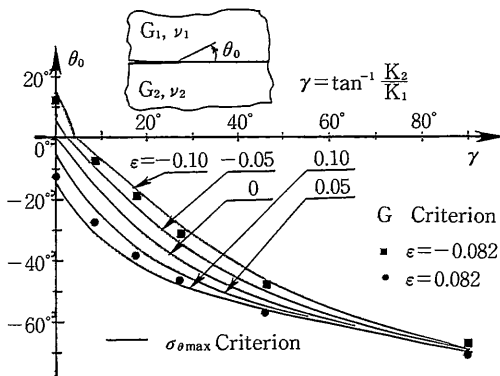


図18 界面き裂からの屈折方向の予測

力の存在をいかに取り入れ、定量的評価に結びつけるかも重要である。
(1990年5月1日受理)

参考文献

1) Suresh, S. and Needleman, A. eds., Interfacial Phenomena in Composites: Processing, Characterization and Mechanical Properties (1989) Elsevier Applied Science.

2) Dundurs, J., Micromechanics and Inhomogeneity, eds. by Weng. G.J. et al (1990), 109, Springer-Verlag.
 3) 結城, 木須, 境界要素法による弾性解析, (1987)培風館.
 4) 結城ほか3名, 日本機械学会論文集A, 53-492 (1987), 1581-1589.
 5) Bogy, D.B., J. Applied Mechanics, 38 (1971), 377-386.
 6) 結城, 許, Schmauder, S., 機械学会講演論文集, No900-14, Vol. A (1990), 87-89.
 7) Rice, J.R. J. Applied Mechanics, 55 (1989), 98-103.
 8) Shih, C.F. and Asaro, R.J., J. Applied Mechanics, 55 (1988), 299-315, and 56 (1989) 763-779.
 9) Erdogan, F., J. Applied Mechanics, 87 (1965), 403.
 10) Sih, G.C. and Rice, J.R., J. Applied Mechanics, 86 (1964), 477.
 11) Sun, C.T. and Jih, C.J., Eng. Frac. Mech. 28 (1987), 13.
 12) 結城, Cho, S., 日本機械学会論文集A, 55-510 (1989), 340-347.
 13) Malyshev, B.M. and Salganik, R.L., Int. J. of Frac. 1 (1965), 114.
 14) Comninou, M., J. Applied Mechanics, 45 (1978), 287 and 46 (1979), 345.
 15) Atkinson, C., Int. J. of Frac., 18 (1982), 161.
 16) Mak, A.F. et al, J. Applied Mech. 47 (1980), 347.
 17) Suga, T. and Elssner, G., J. Physique, 46 (1985), 657.
 18) Comninou, M., J. Applied Mech, 46 (1979), 345.
 19) Gautesen, A.K. and Dundurs, J., J. Applied Mech, 55 (1985), 580.
 20) 結城, 許, 機論A, 投稿中.
 21) 佐藤, 結城, 吉岡, 機械学会講演論文集, No890-69 (1989), 52.
 22) 鄭, 結城, 石川, 中野, 機論A, 55-517 (1989), 1984.
 23) 結城, 許, 機械学会講演論文集, No900-14, Vol. A (1990), 78.
 24) He, M.Y. and Hutchinson, J.W., J. Applied Mech. 56 (1989), 270.