調 査 報 告

UDC 624.072.32：624.046

張力安定トラス構造の自己応力と構造挙動

Self-Equilibrated Stress System and Structural Behaviours of Truss Structures Stabilized by Cable Tension

半 谷 裕 彦*・川 口 健 一*・小 田 憲 史*
Yasuhiko HANGAI, Kenichi KAWAGUCHI and Kenshi ODA

1．はじめに

本館C棟屋上に建設予定の研究実験棟では張力安定トラス構造を採用している．本論文では，張力安定トラス構造の概念を説明し，その構造挙動を述べる．

大スパン構造を設計する場合，スパン長がある程度以上になると，自重を支えるためにさらに部材を必要とするジレンマが生じる．したがって，大スパン構造においては，自重の低減が構造設計のひとつの目標となる．不安定トラス構造に，ポールとケーブルを利用して張力を導入し，安定性と初期剛性を確保する「張力安定トラス構造」の開発は，圧縮部材の少ない構造システムの追求という視点において，自重の低減を目指すものである．張力安定トラス構造を開発するためには，自己釣合い応力の導入による安定化と初期剛性の確保が重要となる．

フレーム構造の安定性を簡単に判別する基準として，Maxwellの法則が用いられているが，この法則は微小変位の範囲において，フレームが形態安定であるための必要条件となっている．Calladine[1]はMaxwellの法則で要求されている数より少ない部材数を持ち，しかも，安定なフレームが存在することを指摘している．その根拠として，不安定なフレームにおいては，微小変位の範囲で幾つかの剛体変位モードを持っているが，自己釣合い応力モードが存在し，初期応力の導入により安定化できる場合があることを示している．このように，Maxwellの法則は，形態のみの考察に基づいており，釣合い条件までも含めた法則とはなっていない．これに対して，釣合い式や適合条件式を数理解析的に考察することで，厳密にフレームの特徴を把握し，分類することができる．Pellegrino[2]は，幾何学的非線形性の強い張力安定構造に対し，線形近似により得られる釣合いマトリクスと適合マトリクスを利用してフレームの分類を行っている．同様な分類は，真柄等[3]をはじめ，多くの文献にみることができるが，田中・半谷[4]による分類は，一般逆行列理論を用いることにより，極めて簡潔な表現となっている．

張力導入により部材数，特に，圧縮部材の数を減らすことができるということに着目し，積極的に構造システムに応用した例として，Fuller[5]の「Tensegrity」をあげることができる．張力安定構造，特に，Tensegrity構造は視覚的にも圧縮材が宙に浮いているような独特な印象を与えるため，多くの人の興味を引いてきた．Pugh[6]，Motro[7]，Emmerich[8]，Vilnay[9]等は種々のTensegrityモデルを提案し，その特徴を調べている．

張力安定構造を実際の構造物に応用し，成功した例としては，Geiger[10]のケーブルドームがあげられる．これは，圧縮材をポストと境界リングにまとめ，構造全体がひとつの自己釣合い状態となって成立している．したがって，ドームのように閉鎖型の構造に適用する場合には有効であるが，適用できる屋根形状の自由度は少ない．

本論文では安定化された「単位構造」を集積することにより構成される張力安定トラス構造を提案する．ここで採用する単位構造は4個のトラス材を回転自由な接合部で連結した不安定トラス構造にポストとケーブル材を利用して自己釣合い張力を導入し，安定化したものである（図-1）．単位構造は安定で，かつ，完結された構造となっている．そのため，さまざまな形態の構造に対する単位構造として用いることができる．

2．剛体変位と自己釣合い応力

ここでは，剛体変位モードおよび自己釣合い応力モードの抽出法を述べる[4]．

与えられたフレームに対する適合条件マトリクスを$\mathbf{A}$，釣合いマトリクスを$\mathbf{B}$とする．伸び速度ベクトル$\dot{\ell}$と節点変位速度ベクトル$\dot{\mathbf{x}}$の関係，および，軸力ベクトル$\mathbf{n}$と外力ベクトル$\mathbf{f}$の関係，は次式で与えられる．

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}=\dot{\ell} \qquad (1)$$

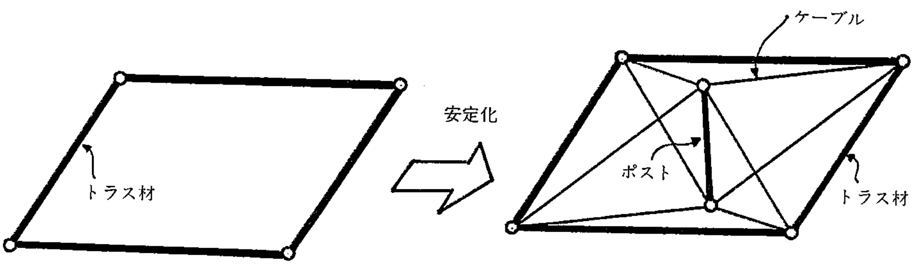
$$\mathbf{B}\mathbf{n}=\mathbf{f} \qquad (2)$$

節点自由度数をn，部材数をmとすると$\mathbf{A}$はm×nマトリクス，$\mathbf{B}$はn×mマトリクス，となり，両者の間には次式の関係が成立している．

$$^{t}\mathbf{A}=\mathbf{B} \qquad (3)$$

剛体変位モードおよび自己釣合い応力モードは，おのおの，

*東京大学生産技術研究所　第5部



（a）不安定トラス　　（b）単位構造

図-1　単位構造

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{0} \tag{4}$$

$$\mathbf{Bn}=\mathbf{0} \tag{5}$$

の解である．これらの解は一般逆行列$\mathbf{A}^{-}$, $\mathbf{B}^{-}$を用いると次式で与えられる．

$$\dot{\mathbf{x}}=[\mathbf{I}_n-\mathbf{A}^{-}\mathbf{A}]\dot{\alpha} \tag{6}$$

$$\mathbf{n}=[\mathbf{I}_m-\mathbf{B}^{-}\mathbf{B}]\beta \tag{7}$$

ここに，$\mathbf{I}_n$，$\mathbf{I}_m$はn次元およびm次元の単位マトリクス，$\dot{\alpha}$，βは任意のベクトル，である．したがって，

$$\mathrm{p}=\mathrm{rank}[\mathbf{I}_n-\mathbf{A}^{-}\mathbf{A}] \tag{8}$$

$$\mathrm{q}=\mathrm{rank}[\mathbf{I}_m-\mathbf{B}^{-}\mathbf{B}] \tag{9}$$

と置くと，pおよびqは，それぞれ，独立な剛体変位モードベクトルの数と自己釣合い応力ベクトルの数となる．ここで，$\mathrm{r}=\mathrm{rank}(\mathbf{A})=\mathrm{rank}(\mathbf{B})$より

$$\mathrm{p}=\mathrm{n}-\mathrm{r} \tag{10}$$

$$\mathrm{q}=\mathrm{m}-\mathrm{r} \tag{11}$$

となる．p，qによりフレームを分類すると表-1となる．

3．単位構造の構成と構造挙動

本論文で扱う張力安定トラス構造は図-1に示す単位構造を集積して構成する構造システムである．ここでは，単位構造の構成と構造挙動を述べる．

図-1（a）で示す構造は不安定トラス構造で表-1のIIIに属する．この不安定トラス構造にポストとポストの上下端と接合部とを結ぶ8本のケーブルで張力を導入し，安定化する．安定化した構造を「単位構造」と呼ぶことにする．この単位構造では，r＝12であり，単位構造全体としての剛体変位と剛体回転（6個）を除くと，p＝0，

表1　pqによる架構の分類

q＼p	p＝0	p＞0
q＝0	I　静定 安定	III　静定 不安定
q＞0	II　不静定 安定	IV　不静定 不安定

q＝1となる．つまり，単位構造は表-1のIIに属し，機構を形成する剛体変位モードは無く，自己釣合い応力モードを1個有している．

単位構造の形状を表すパラメータとしては，トラス材とポストの長さ（L，H），トラス材で構成する菱形の形状を表すパラメータ（ϕ），菱形の面外への折れ具合を表すパラメータ（θ），ポストの位置を表すパラメータ（α）の5個がある（図-2）．また，導入する初期張力の大きさを与えるパラメータP_0（ケーブル張力n_{13}，n_{14}）がある．

θ，H，αを変化させた場合の単位構造の構造挙動を調査する．そのため，ポスト頂部に鉛直方向荷重を作用し，幾何学的非線形性を考慮した基礎方程式を局所線形化することによる荷重増分型の解析を実施する（トラス材とポストとして76.3ϕ，t＝3.2mmの鋼管，ケーブルとして16ϕの鋼棒を用いている．また，ケーブルの降伏応力としてはσ_y＝2,400kgf/cm²を採用している．さらに，初期張力としてP_0＝1,000kgfを導入している（図-3参照））．

図-4はポスト長と弛緩荷重（点線）および降伏荷重（実線）との関係を示したものである．弛緩荷重とはケーブ

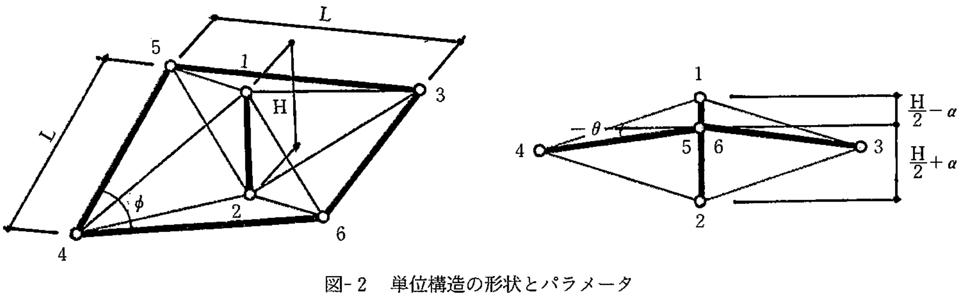


図-2　単位構造の形状とパラメータ

ルにゆるみ（引張から圧縮に変化した時点）が発生した時の荷重，降伏荷重とは部材に降伏が生じたときの荷重である．ポスト長と弛緩荷重および降伏荷重はほぼ線形の関係にある．図-5はポスト長を一定（H=1.5m）に保ち，位置を示すパラメータαを変化させたときの弛緩荷重（点線）および降伏荷重（実線）の変化の様子を図示したものである．αが大きくなるにつれて降伏荷重は増大しているが，弛緩荷重はほぼ一定であることがわかる．図-6，図-7，図-8はポスト高さH＝1m，1.5m，2.0mに対するαと初期張力モードの関係を示す．ケーブルには引張応力が生じる必要があり，その範囲を示すと太い横線の範囲となる．

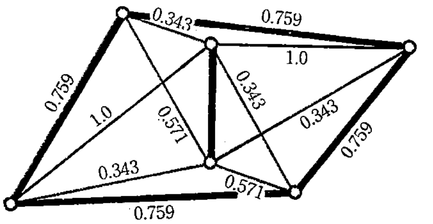


図-3　自己釣合い軸力モード
（L=288cm，H=1.5m，θ=11.25°，ϕ=62.8°）

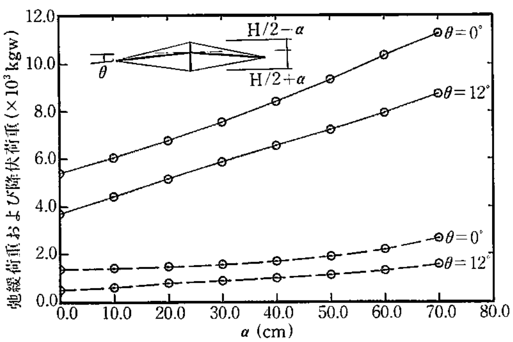


図-5　α—弛緩荷重および降伏荷重曲線
（P_0＝1t，H=1.5m，L=300cm，ϕ=60°）

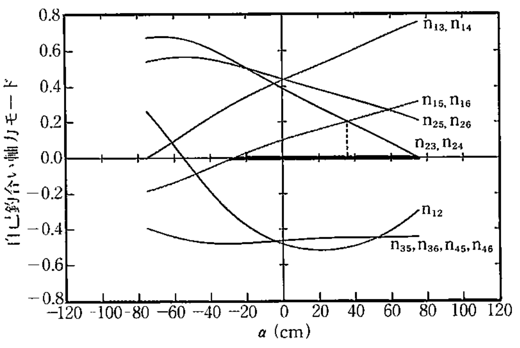


図-7　α—自己釣合い軸力モード
（L=288cm，H=1.5m，θ=11.25°，ϕ=62.8°）

図-11に示すような単位構造を半円筒形を8等分に分割した形態に集積し，構成する場合にはθ=11.25°となる．外荷重を考慮し，設計目標として降伏荷重を3,000kgf以上と仮定すると，図-4よりポスト長は1.5m以上となる．さらに，図-7の太線の範囲において，n_{23}とn_{15}の交点（等張力を意味する），つまり，α=35.9cmをαの値として選定する．このようにして決定した単位構造（ϕ=60°，θ=11.25°，L=288cm，H=150cm，α=35.9cm，P_0=

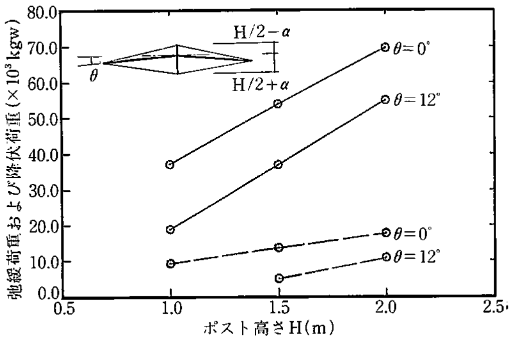


図-4　ポスト高さ—弛緩荷重および降伏荷重曲線
（P_0＝1t，α=0.0 cm，L=300cm，ϕ=60°）

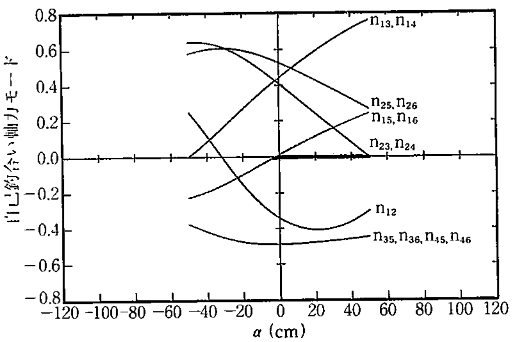


図-6　α—自己釣合い軸力モード
（L=288cm，H=1.0m，θ=11.25°，ϕ=62.8°）

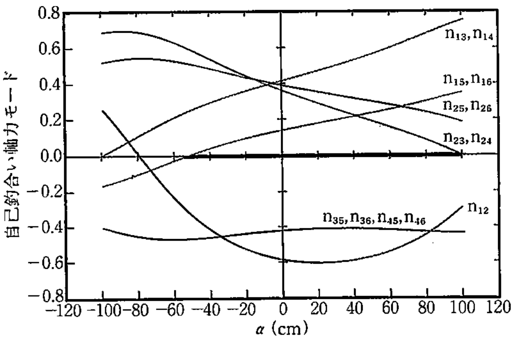


図-8　α—自己釣合い軸力モード
（L=288cm，H=2.0m，θ=11.25°，ϕ=62.8°）

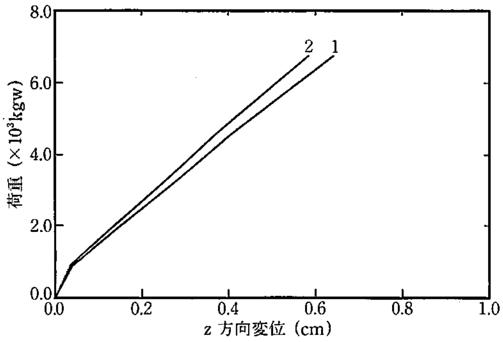


図-9　荷重－z方向変位曲線
（P_0＝1t，L＝288cm，H＝1.5m，θ＝11.25°，ϕ＝62.8°，α＝35.9cm）

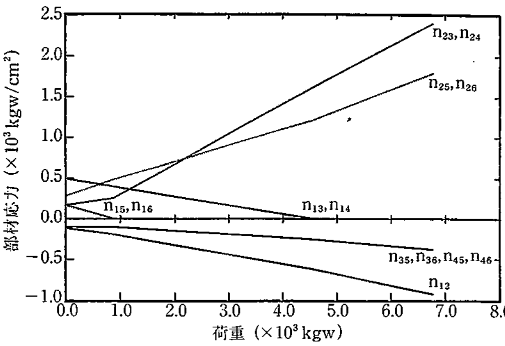


図-10　荷重－部材応力曲線
（P_0＝1t，L＝288cm，H＝1.5m，θ＝11.25°，ϕ＝62.8°，α＝35.9cm）

1,000kgf）の構造挙動を述べる．図-9はポスト頂部に鉛直方向の荷重を載荷したときのポスト頂部および下部の荷重－変位曲線を示したものである．880kgfと4,560kgf近傍でケーブルが弛緩するが，荷重－変位曲線上では最初の弛緩のみが明瞭に現れている．図-10に荷重－軸力曲線を示す．ケーブルaに約880kgfで最初の弛緩が生じ，次いで，約4,560kgfでケーブルbが弛緩している．部材の降伏は6,770kgfで生じており，単位構造の耐力はかなり高いことがわかる．この場合，弛緩荷重に対する降伏荷重の比はμ＝7.6となっている．図-9より，降伏荷重時の鉛直方向変位は約0.64cmであり，スパンに対して約1/750となっている．

4．張力安定トラス構造

本論文で提案する張力安定トラス構造は前節までに検討した単位構造を集積することにより構成する．その特徴は網目状に組まれた不安定トラス構造にポストとケーブルにより初期応力を導入し，安定化することによって設計形状を確保するところにある．したがって，単位構造の形状パラメータであるϕ，θ，αおよび部材長さL，Hを力学的挙動を満足する範囲で適当に選択することにより，さまざまな形態を得ることができる．図-11，図-12は円筒型およびドーム型張力安定トラス構造を示したものである．本館C棟屋上に建設を予定している研究実験棟としては，円筒型張力安定トラス構造を採用する．

以下，図-11に示す円筒型張力安定トラス構造に外荷重として，各ポストの頂部に等しい大きさの鉛直方向荷重を作用したときの構造挙動を調べる．10kgfをステップ荷重として，増分型解法で数値解析を実行した．図-13は荷重ステップ数と軸力との関係を図示したものである．

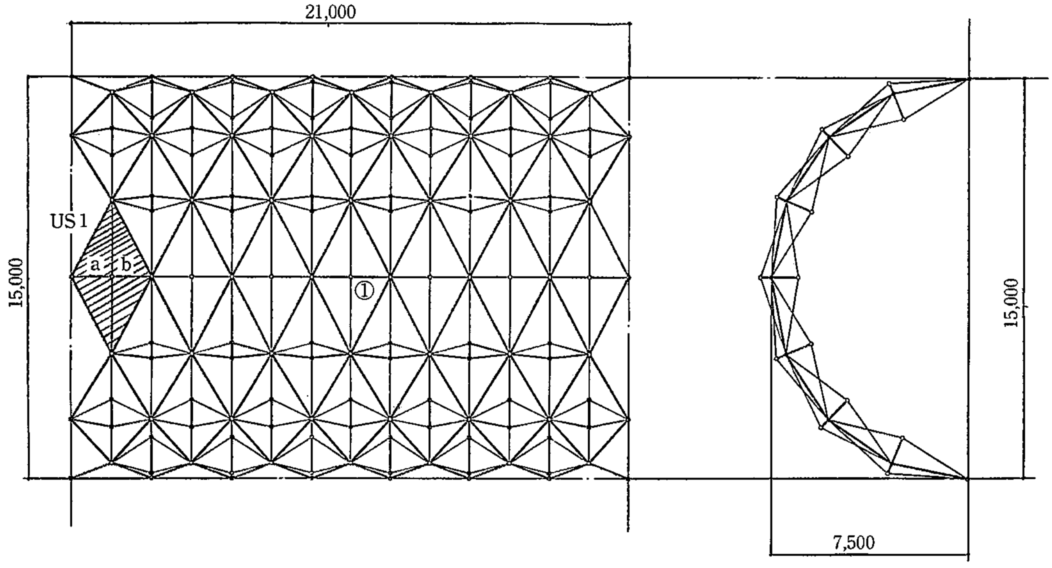


図-11　円筒型張力安定トラス

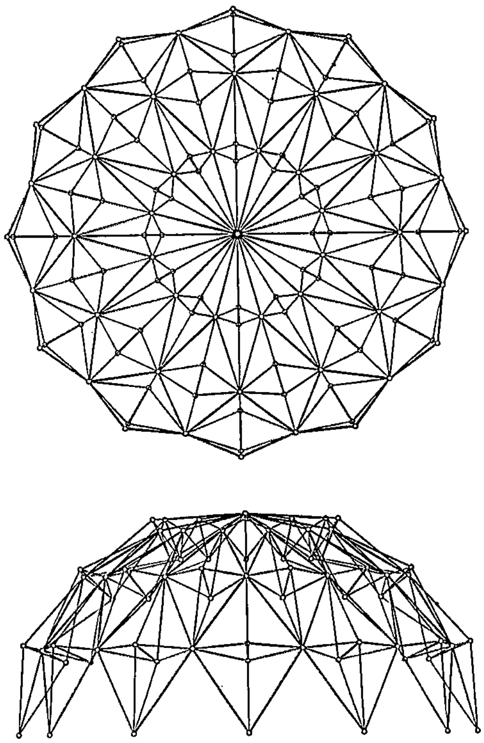


図-12　ドーム型張力安定トラス

最初に弛緩が生じるのは図-11で示す単位構造US1のケーブルａ，ｂで，このとき，各ポストの頂部には300kgfの荷重が作用している．図-14はステップ数と変位の関係を図示したもので，節点①に最大変位が生じており，300kgfの荷重レベルに対して約0.2cmとなっている．この値はスパンに対して約1/7,500となっており，張力安定トラス構造は剛性の高い構造であることがわかる．降伏が生じる荷重レベルを単位構造の結果を利用して推定すると，$300\times\mu=2{,}280$kgfとなる．この値を単位面積当たりの荷重にすると約584kgf/m²となる．変位量を1,000倍に拡大した変位モード図を図-15に示す．

5．お　わ　り　に

本論文では張力安定トラス構造の概念を説明し，単位構造の集積に基づく張力安定トラス構造の提案をおこなった．具体例に対して構造挙動の調査をおこない，初期剛性，耐力，変形性能の面から，実際の構造物として採用可能であることを示した．　(1990年１月19日受理)

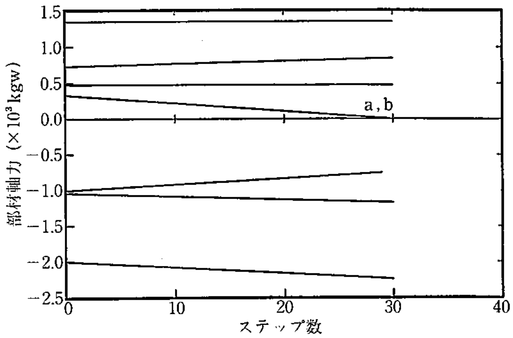


図-13　荷重ステップ数—軸力曲線（全体モデルUS1）

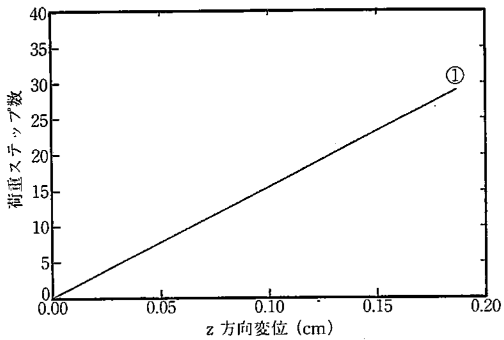


図-14　荷重ステップ数— z 方向変位曲線
（全体モデル節点①）

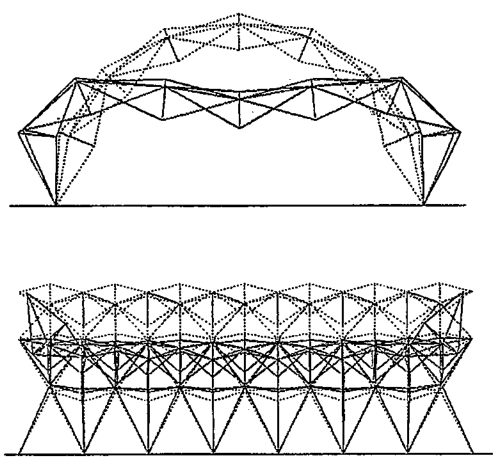


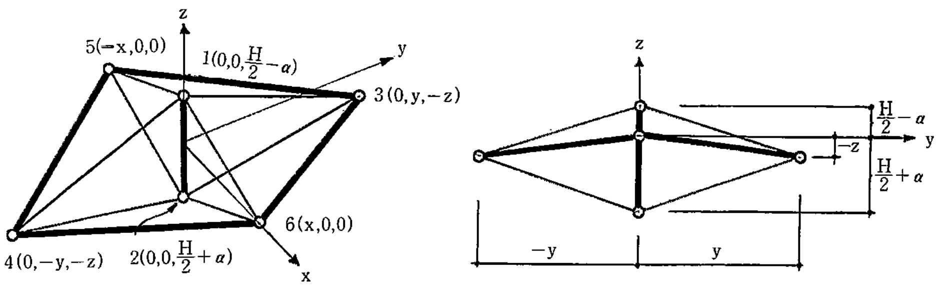
図-15　変位モード図
（部材ａ，ｂ弛緩時，変位量1,000倍）

参　考　文　献

1)　C.R. Calladine, "Buckminster Fuller's"Tensegrity" Structures and Clerk Maxwell's Rules for the Construction of Stiff Frames", Int. Jour. Solids Structures, 1978, Vol. 14, pp. 161-172.

2)　S. Pellegrino, "Static Response of Prestressed Mechanisms", Cambridge University Engineering Department, To be presented at X VII Intrernational Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Grenoble, France, August, 1988.

3)　真柄，国田，川股，"混合法によるケーブルネットの解析　その(１)不安定架構の性質およびリンク機構の解



図A-1　単位構造と各節点座標

析", 日本建築学会論文報告集　218号　昭和49年4月 pp. 37-48.

4) 田中，半谷，"不安定トラスの剛体変位と安定化条件"，日本建築学会論文報告集　第356号　昭和60年10月 pp. 35-43.

5) R.B. Fuller, "Tensile-Integrity Structures", U.S. Pat. 3,063,521, 1962.

6) A. Pugh, "An Intruduction to Tensegrity", University of California Press, 1976.

7) A. Motro, "Tensegrity Systems-Latest Developments and Perspectives" Proc. of IASS, Madrid, Vol. 3, 1989.

8) D.G. Emmerich, "Exercices de Géomētrie Constructive Travaux d'etudiants", École Nationale Suprérieure des Beaux Arts, Paris, Architecture, 1970.

9) O., Vilnay, "Structures Made of Infinite Regular Tensegric Nets", IASS Bulletin No. 63, Vol. XVIII-1, Apr., 1977, pp. 51-57.

10) D.H. Geiger, "Roof Structure", U.S. Pat. 4,736,553, 1986.

付録A：単位構造の自己釣合い軸力モード

図-A1に示す単位構造の自己釣合い軸力モードは1個存在し，それを各節点の力の釣合い式より求めると(A-1)，(A-2)式のようになる．ここで節点iと節点jを結ぶ部材の釣合い応力をn_{ij}とする．

$$
\begin{aligned}
& n_{35} : n_{13} : n_{23} : n_{15} : n_{25} : n_{12} \\
&= -H\sqrt{x^2+y^2+z^2} : 2\left(\frac{H}{2}+\alpha\right)\sqrt{y^2+\left(\frac{H}{2}-\alpha+z\right)^2} \\
&: 2\left(\frac{H}{2}-\alpha\right)\sqrt{y^2+\left(\frac{H}{2}+\alpha-z\right)^2} \\
&: 2\left(\frac{H}{2}+\alpha-z\right)\sqrt{x^2+\left(\frac{H}{2}-\alpha\right)^2} \\
&: 2\left(\frac{H}{2}-\alpha+z\right)\sqrt{x^2+\left(\frac{H}{2}+\alpha\right)^2} \\
&: -8\left(z\cdot\alpha+\frac{H^2}{4}-\alpha^2\right)
\end{aligned}
\qquad \text{(A-1)}
$$

$$
\begin{aligned}
& n_{35}=n_{36}=n_{45}=n_{46}, \\
& n_{15}=n_{16},\ n_{25}=n_{26}, \\
& n_{13}=n_{14},\ n_{23}=n_{24},
\end{aligned}
\qquad \text{(A-2)}
$$