研　究　速　報

特　集　4

UDC 532.517.4：532.58

圧縮性乱流のモデリング

Modeling of Compressible Turbulence

吉　澤　　徴*

Akira YOSHIZAWA

1．は　じ　め　に

乱流に対する流体の圧縮性効果は衝撃波を含む高速流中で特に重要となる．その典型的例は衝撃波と境界層の干渉である．現在，このような現象の研究のためには非圧縮性乱流モデルをファブル平均を用いて拡張後適用しているが[1-2]，いくつかの重大な問題が含まれている．たとえば，２方程式型の乱流モデルでは渦粘性に対する圧縮性の直接的効果は平均密度を通して取り込まれるに過ぎない．その結果，乱流スケールが減少し，渦粘性が小さくなるべき衝撃波の背後において，後者が過大評価される．

応力モデルにおいては，速度成分間のエネルギー分配を決める圧力・歪み相関が中心的役割を演ずる．非圧縮性乱流においては，圧力はポアソン方程式に従い，だ円型的性格を強くもっている[3]．他方，圧縮性乱流においては，圧力は一点における密度と内部エネルギーで表現される．圧力の特性に関するこの大きな差異は衝撃波の近くで非圧縮性乱流モデルを直線的に拡張することに大きな疑問を差しはさむことになる．

本論においては，圧縮性の直接的効果を渦粘性モデルに組み込むことを試みる．われわれは２スケール乱流統計理論[4,5]より得られる理論的結果[6]を用いることから始める．この理論的結果は波数空間における２時刻相関量で表現されているため，極めて複雑である．そこで３個の乱流量を用いてこれらの結果を簡単化する．その結果，圧縮性の効果は密度揺らぎの影響を通してモデル中に組み込まれることが示される．

2．基 礎 方 程 式

圧縮性流体運動は３個の基本法則すなわち質量，運動量，内部エネルギーの保存則に従う．これらは

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^a}\rho u^a=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u^\alpha+\frac{\partial}{\partial x^a}\rho u^\alpha u^a=-\frac{\partial p}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial}{\partial x^a}\mu S^{\alpha a} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho e+\frac{\partial}{\partial x^a}\rho e u^a=\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\mu_\theta\frac{\partial \theta}{\partial x^a}\right)-\rho\frac{\partial u^a}{\partial x^a}+\phi \tag{3}$$

で与えられる．ここで，ρは密度，$\boldsymbol{u}$は速度，pは圧力，eは内部エネルギー，θは温度，μは粘性率，μ_θは熱伝導率，ϕは

$$\phi=\mu\left[\left(\frac{\partial u^b}{\partial x^a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u^a}{\partial x^a}\right)^2\right] \tag{4}$$

で定義される力学エネルギーの散逸率である．くり返し上付き添字に関しては縮約の規則を用いる．

（1）―（3）を閉じるためには，われわれはもう一つの方程式を必要とするが，それは熱力学関係式

$$p=R\rho\theta=(\gamma-1)\rho e \tag{5}$$

で与えられる．ここで，Rは気体定数であり，

$$e=C_V\theta,\quad \gamma=C_P/C_V \tag{6}$$

である（C_V，C_Pは定積，定圧比熱である）．

3．非一様圧縮性乱流の本質

乱流に対する圧縮性の効果を記述するとき，何が本質的であるか考えてみよう．われわれはまずρ，$\boldsymbol{u}$のアンサンブル平均と揺らぎを

$$\rho=\rho_M+\rho',\quad \rho_M=\langle\rho\rangle, \tag{7a}$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{U}+\boldsymbol{u}',\quad \boldsymbol{U}=\langle\boldsymbol{u}\rangle \tag{7b}$$

で定義する．その結果，（1）と（2）より

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+U^a\frac{\partial \rho'}{\partial x^a}+\left\{\frac{\partial U^a}{\partial x^c}\rho'\right\}_A+\left\{\rho_M\frac{\partial u'^\alpha}{\partial x^a}\right\}_B+\cdots\cdots\cdots=0, \tag{8}$$

$$\rho_M\left(\frac{\partial u'^\alpha}{\partial t}+U^a\frac{\partial u'^\alpha}{\partial x^a}\right)+\left\{\rho_M u'^\alpha\frac{\partial U^a}{\partial x^a}\right\}_C+\left\{\rho_M U^\alpha\frac{\partial u'^a}{\partial x^a}\right\}_D+\left\{\rho_M u'^a\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^a}\right\}_E+\cdots\cdots=0 \tag{9}$$

を得る．（8），（9）において，圧縮性の効果は２つのグ

*東京大学生産技術研究所　第１部

ループに分けられる．第1のグループは平均速度に関係し，$\{\cdot\}_A$と$\{\cdot\}_C$によって与えられる．第2のグループは$\{\cdot\}_B$と$\{\cdot\}_D$によって与えられ，速度の揺らぎに関連している．

アンサンブル平均下でのレイノルズ応力は

$$R^{\alpha\beta}=-(\langle\rho u^\alpha u^\beta\rangle-\rho_M U^\alpha U^\beta)$$
$$=-(\rho_M\langle u'^\alpha u'^\beta\rangle+\cdots\cdots) \tag{10}$$

で定義される．(9)より$\{\cdot\}_C$と$\{\cdot\}_E$は$R^{\alpha\beta}$に対して

$$\mu_e\left(\frac{\partial U^\beta}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}-\frac{2}{3}\frac{\partial U^a}{\partial x^a}\delta^{\alpha\beta}\right) \tag{11}$$

の渦粘性表現の形で寄与する．ここで，μ_eはいわゆる渦粘性である．圧縮性の効果は第3項に現れるが，これは平均圧力項に吸収されてしまう．その結果，圧縮性の効果はμ_eのρ_M依存性を除くと，渦粘性表現の枠内では現れない．この事実は速度揺らぎに関係した圧縮性の重要性を示唆しており，$\{\cdot\}_B$を通してρ'に結びついている．

上の議論より，われわれは次の結論を得る：

（a） $R^{\alpha\beta}$に対する圧縮性の効果は密度揺らぎと密接している．

（b） 渦粘性表現の枠内では，$R^{\alpha\beta}$は平均密度を通して弱く圧縮性に関連するに過ぎない．密度揺らぎの効果は応力モデルにおいても圧縮性の適切な記述のために必要と思われる．

4．圧縮性乱流に適切な変数

空気力学的流れの数値計算においては，ファブル平均の概念がよく利用される．速度のファブル平均と揺らぎは

$$\boldsymbol{u}_F=\langle\rho\boldsymbol{u}\rangle/\rho_M,\ \boldsymbol{u}'_F=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_F \tag{12}$$

で定義される．この平均下では，レイノルズ応力は

$$R_F^{\alpha\beta}=-(\langle\rho u^\alpha u^\beta\rangle-\rho_M u_F^\alpha u_F^\beta)$$
$$=-\langle\rho u'^\alpha_F u'^\beta_F\rangle \tag{13}$$

で与えられる．ファブル平均の大きな利点の一つは密度，運動量，内部エネルギーに対する平均方程式の簡潔性にある．

この平均にまつわる困難は現在の乱流の統計理論的方法と整合しないことである．すなわち，

$$\langle\boldsymbol{u}'_F\rangle=-\langle\rho'\boldsymbol{u}'\rangle/\rho_M\neq 0 \tag{14}$$

となり，アンサンブル平均下で$\boldsymbol{u}'_F$の方程式を取り扱うとき，統計理論的手法が適用できない．しかし，ファブル平均の利点を考えたとき，アンサンブル平均下でもできるだけこの利点を保持することが重要と思われる．

上の議論に基づき，圧縮性乱流に適切な変数を探そう．まず，われわれは3つの保存則が

$$\rho,\ \boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{u},\ w=\rho e \tag{15}$$

で書かれていることに注意する．この変数を用いる限り，3個の保存則のアンサンブル平均はファブル平均の使用と同等である．すなわち，

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\boldsymbol{j}\rangle=\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho\boldsymbol{u}\rangle \tag{16a}$$

は

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\boldsymbol{u}_F \tag{16b}$$

にほかならない．さらに，強い密度変動の下ではρと$\boldsymbol{u}$を分離して扱うことは物理的にあまり意味がない．運動量は力を通して測定可能であるが，速度自身は速い密度変動があるときは直接測定できない．

5．平均方程式

アンサンブル平均を用いて物理量を平均と揺らぎに分解する：

$$f=F+f',\ F=\langle f\rangle. \tag{17}$$

ここで，

$$f=(\rho,\ \boldsymbol{j},\ w,\ \boldsymbol{u},\ e,\ \theta,\ p), \tag{18a}$$
$$F=(\rho_M,\ \boldsymbol{J},\ W,\ \boldsymbol{U},\ E,\ \Theta,\ P), \tag{18b}$$
$$f'=(\rho',\ \boldsymbol{j}',\ w',\ \boldsymbol{u}',\ e',\ \theta',\ p'), \tag{18c}$$

平均速度に関する限り，アンサンブル平均速度$\boldsymbol{U}$とファブル平均速度$\boldsymbol{u}_F$を区別することはあまり重要ではない．なぜなら，

$$\boldsymbol{J}=\rho_M\boldsymbol{u}_F=\rho_M\boldsymbol{U}+\langle\rho'\boldsymbol{u}'\rangle\fallingdotseq\rho_M\boldsymbol{U}. \tag{19}$$

同様な事情は内部エネルギーに対しても成り立ち，

$$W=\rho_M e_F=\rho_M E+\langle\rho' e'\rangle\fallingdotseq\rho_M E. \tag{20}$$

他方，揺らぎ$\boldsymbol{j}'$は

$$\boldsymbol{j}'=\rho_M\boldsymbol{u}'+\rho'\boldsymbol{U}+\rho'\boldsymbol{u}'-\langle\rho'\boldsymbol{u}'\rangle$$
$$\fallingdotseq\rho_M\boldsymbol{u}'+\rho'\boldsymbol{U} \tag{21}$$

となる．同様に，

$$w'\fallingdotseq\rho_M e'+\rho' E. \tag{22}$$

(21)，(22)の第2項は高マッハ数の流れにおいては無視できない[7]．

3個の基本保存則のアンサンブル平均は

$$\frac{\partial\rho_M}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^a}\rho_M U^a=0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_M U^\alpha+\frac{\partial}{\partial x^a}\rho_M U^\alpha U^a=-\frac{\partial P}{\partial x^\alpha}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^a}\left(R^{\alpha a}+\mu S^{\alpha a}\right), \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_M E+\frac{\partial}{\partial x^a}\rho_M E U^a=\frac{\partial}{\partial x^a}\left(-H^a+\mu_\theta\frac{\partial\Theta}{\partial x^a}\right)$$
$$-\left(P\frac{\partial U^a}{\partial x^a}-\chi\right)+\Phi \tag{25}$$

となる．ここで，

$$P\fallingdotseq(\gamma-1)\rho_M E, \tag{26}$$

$$S^{\alpha\beta}=\frac{\partial U^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial U^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}-\frac{2}{3}\frac{\partial U^{a}}{\partial x^{a}}\delta^{\alpha\beta}, \tag{27}$$

$$R^{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\langle u'^{\alpha}j'^{\beta}+u'^{\beta}j'^{\alpha}\rangle, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}\langle \boldsymbol{u}'w'+\boldsymbol{j}'e'\rangle, \tag{29}$$

$$\chi=-\langle p'\frac{\partial u'^{a}}{\partial x^{a}}\rangle, \tag{30}$$

$$\Phi\fallingdotseq\mu\left\langle\left(\frac{\partial u'^{b}}{\partial x^{a}}\right)^{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u'^{a}}{\partial x^{a}}\right)^{2}\right\rangle \tag{31}$$

(23)—(25)においては，すでに述べたように，$\boldsymbol{u}_F$と$\boldsymbol{U}$を区別しなかった．(28)と(29)における$\boldsymbol{u}'$と$\boldsymbol{j}'$，w'とe'の混合は次のように説明できる．(1)—(3)から(23)—(25)を導くとき，$\rho u^{\alpha}u^{a}$とρeu^{a}を$\boldsymbol{j}$とwを用いて書き直す必要がある．これらの量の対称性を考慮して

$$\rho u^{\alpha}u^{a}=\frac{1}{2}(u^{a}j^{\alpha}+u^{\alpha}j^{a}), \tag{32 a}$$

$$\rho eu^{a}=\frac{1}{2}(u^{a}w+j^{a}e) \tag{32 b}$$

と書き，(28)，(29)を得る．$R^{\alpha\beta}$，$\boldsymbol{H}$中の$\boldsymbol{u}'$，e'は(21)，(22)を用いて消去でき，最終的にはρ'，$\boldsymbol{j}'$で表すことができる．$\boldsymbol{j}'$，$\boldsymbol{w}'$に対する方程式は$\boldsymbol{u}'$，e'に対するものよりはるかに簡単である[8]．

6．乱流量の選択

相関量$R^{\alpha\beta}$，$\boldsymbol{H}$等は2スケール乱流統計理論[4,5]をρ'，j'，w'の方程式に適用することによって，任意のρ_M，$\boldsymbol{U}$，wに対して計算することができる．これらの結果は波数空間における種々の2時刻相関量を含み大変複雑であるため，現実的に興味深い現象の研究に適用できない．それゆえに，適当な乱流量を用いて簡単化する必要がある．

乱流量を選ぶにあたって，密度揺らぎ効果の重要性に注意する．さらに，平均運動量の方程式が3個の基本法則の一つであることを考慮して，次の3個の乱流量を採用する：

$$K_{\rho}=\langle\rho'^{2}\rangle, \tag{33}$$

$$K=\frac{1}{2\rho_M^{2}}\langle\boldsymbol{j}'^{2}\rangle, \tag{34}$$

$$\xi=\mu\left\langle\left(\frac{\partial u'^{b}}{\partial x^{a}}\right)^{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u'^{a}}{\partial x^{a}}\right)^{2}\right\rangle. \tag{35}$$

ここで，Kは運動量揺らぎ強度を$2\rho_M^2$で割った量であり，非圧縮性の極限では単位質量当たりの乱流運動エネルギーとなる．もう一つの量ξはρ_M^2Kの散逸率に対応し，非圧縮性の極限では乱流運動エネルギーの散逸率に一致する．wの重要性を考えたとき，$\langle w'^2\rangle$とその散逸率も採用すべきであるが，できるだけ簡単で圧縮性乱流の本質を捉えたモデルを作るために，(33)—(35)で満足することにする．

7．3方程式モデル

2スケール統計理論から得られる結果を簡単化し，平均場，K_ρ，K，ξで表現する．その結果，3方程式乱流モデルを得る．最終結果は次のようにまとめられる．

<u>レイノルズ応力</u>

$$R^{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}\rho_M\Gamma\delta^{\alpha\beta}+C_{\mu}\rho_M\frac{K^2}{\xi}S^{\alpha\beta}+C_R\frac{1}{\rho_M}\frac{K^2}{\xi}D^{\alpha\beta}. \tag{36}$$

ここで，

$$\Gamma\equiv\frac{1}{2\rho_M}\langle u'^{a}j'^{a}\rangle, \tag{37}$$

$$D^{\alpha\beta}=U^{\alpha}\frac{\partial K_\rho}{\partial x^{\beta}}+U^{\beta}\frac{\partial K_\rho}{\partial x^{\alpha}}-\frac{2}{3}U^{a}\frac{\partial K_\rho}{\partial x^{a}}\xi^{\alpha\beta} \tag{38}$$

（C_μ等は正のモデル定数，以下同様）．

<u>内部エネルギー輸送量</u>

$$\boldsymbol{H}=-C_{\eta}\rho_M\frac{K^2}{\xi}\nabla E-C_H\frac{1}{\rho_M}\frac{K^2}{\xi}E\nabla K_\rho. \tag{39}$$

<u>膨張，収縮揺らぎによる仕事</u>

$$\chi=C_{\chi}(\gamma-1)\frac{\xi}{K}\frac{K_\rho}{\rho_M}E. \tag{40}$$

<u>K方程式</u>

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_M^2K+\frac{\partial}{\partial x^{a}}\rho_M^2KU^{a}+A_\rho$$
$$=P_K-(\rho_M^2\xi+\rho_M\chi)+\frac{\partial T_K^{a}}{\partial x^{a}}. \tag{41}$$

ここで，

$$A_\rho\equiv\frac{J^{b}}{\rho_M}\langle j'^{b}\frac{\partial j'^{a}}{\partial x^{a}}\rangle=C_AKU^{a}\frac{\partial K_\rho}{\partial x^{a}}, \tag{42}$$

$$P_K=-\langle j'^{a}j'^{b}\rangle\frac{\partial U^{b}}{\partial x^{a}}-\rho_M^2K\frac{\partial U^{a}}{\partial x^{a}}, \tag{43}$$

$$\boldsymbol{T}_K=C_K\frac{K^2}{\xi}\nabla(\rho_M^2K). \tag{44}$$

ただし，

$$\langle j'^{a}j'^{b}\rangle=\frac{2}{3}\rho_M^2K\delta^{\alpha\beta}-C_\mu\rho_M^2\frac{K^2}{\xi}S^{\alpha\beta}-C_j\frac{K^2}{\xi}D^{\alpha\beta}. \tag{45}$$

<u>K_ρ方程式</u>

$$\frac{\partial K_\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^{a}}K_\rho U^{a}=-\frac{\partial U^{a}}{\partial x^{a}}K_\rho$$
$$-C_{\rho1}\frac{\xi}{K}K_\rho+\frac{\partial}{\partial x^{a}}\left(C_{\rho2}\frac{K^2}{\xi}\frac{\partial K_\rho}{\partial x^{a}}\right). \tag{46}$$

ζ方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_M^2\zeta+\frac{\partial}{\partial x^a}\rho_M^2U^a+C_{\zeta1}\frac{\zeta}{K}A_\rho$$
$$=C_{\zeta1}\frac{\zeta}{K}P_K-C_{\zeta2}\frac{\zeta}{K}(\rho_M^2\zeta+\rho_M\chi)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^a}\left(C_{\zeta3}\frac{K^2}{\zeta}\frac{\partial}{\partial x^a}\rho_M^2\zeta\right). \tag{47}$$

8．考　　察

本モデルのいくつかの著しい特徴を見てみよう．レイノルズ応力に対する圧縮性の直接的効果は，(36)の第3項で与えられる．この項はK_ρの空間的変化に関係し，K_ρは(46)で支配される．(46)，特に右辺第1項は密度揺らぎが平均速度の膨張，収縮によって引き起こされることを明白に示している．レイノルズ応力はこのようにして生じた密度揺らぎの影響を強く受けるのであって，平均場の圧縮性の直接的効果は少ない．このことは，ファブル平均によって圧縮性効果を取り入れようとする現行の方法は十分でないことを示唆している．事実，(36)の初めの2項で与えられる渦粘性表現は衝撃波を含む領域で渦粘性を過大評価しがちである．本モデル中のK_ρに関連した第3項は，固体壁の近くでK_ρの垂直微分が負であることから，渦粘性効果を実質的に減少させる作用がある．内部エネルギー輸送量においても，(39)の第2項のK_ρに関係した項が渦拡散表現からのずれを与えている．

(40)のχのモデル化に関連して，圧力を含む項のモデル化は，特に注意すべきである．テンソルおよび次元解析に基づくモデリングにおいては，勾配拡散の概念が役に立つ場合が多い．実際，$R^{\alpha\beta}$や$\boldsymbol{H}$中の渦粘性あるいは渦拡散表現はこの概念を用いて推測できる．しかし，非圧縮乱流モデリングにおいて，

$$\langle \boldsymbol{u}'p'\rangle \propto \nabla P \tag{48}$$

が成立しないことは周知の事実である．(40)を次元解析だけから推測するのはかなり困難である．

K_ρ，K，ζに対する方程式は類似の構造を有しており，それぞれ生産的，散逸的，拡散(輸送)的項から成っている．この構造は非圧縮乱流における2方程式モデルとよく似ている．しかし，∇K_ρ，$\nabla\cdot\boldsymbol{U}$に関連した効果が圧縮性の直接的影響として新たに現れている．

最後に，モデル定数について言及しよう．それらは

$R^{\alpha\beta}$　：C_μ（≒0.09），C_R，；
$\boldsymbol{H}$　：C_η（≒0.1），C_H；
χ　：C_χ；
K方程式　：C_A，C_K（≒0.09），C_j（P_K中）；
K_ρ方程式　：$C_{\rho1}$，$C_{\rho2}$；
ζ方程式　：$C_{\zeta1}$，（≒1.45），$C_{\zeta2}$，（≒1.9），
$C_{\zeta3}$，（≒0.075）．

ここで，かっこ内の値は本モデルの非圧縮性モデルへの極限から得られるものである[9]．この極限値のあるものは2スケール統計理論からも妥当性が示される[4,5]．その他の定数中で，乱流方程式間の対応関係より

$C_{\rho1}\fallingdotseq 1$，$C_{\rho2}\fallingdotseq 0.1$

が推論される．残りの定数は本モデルの実際的現象への適用あるいは乱流の直接計算データベースから決定されるものである．

（1989年9月30日受理）

参考文献

1) J.G. Marvin: AIAA J. ***21***, 941 (1983).
2) M.W. Rubesin: AIAA Paper No. 89-0606 (1989).
3) B.E. Launder, G. Reece, and W. Rodi: J. Fluid Mech. ***68***, 537 (1975).
4) A. Yoshizawa: Phys. Fluids ***27***, 1377 (1984).
5) A. Yoshizawa: J. Fluid Mech. ***195***, 541 (1988).
6) A. Yoshizawa: submitted to Phys. Fluids A.
7) P. Bradshaw: Annu. Rev. Fluid Mech. ***9***, 33 (1977).
8) A. Yoshizawa: Phys. Fluids ***29***, 2152 (1986).
9) P. Bradshaw, T. Cebeci, and J. Whitelaw: *Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow* (Academic, 1981).