

壁法則と対数速度分布

On the Law of the Wall and the Logarithmic Velocity Distribution

竹光信正*

Nobumasa TAKEMITSU

1. 緒言

本稿は、よく知られている対数速度分布につき、

- (a) 壁法則との関連性
- (b) (積分定数としての) すべり速度

について考察したものである。

2. 壁法則との関連性

簡単のため、なめらかな壁(境界)に接した一方向の流れを考え、座標系をFig. 1のようにとる。このとき、壁の影響を直接に受ける領域(wall region or inner layer)は、全体の境界層厚さの10~20%程度であり¹⁾、この領域においては、壁法則^{2),3)}

$$U/u_\tau = f(y^+), \tag{1}$$

$$u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho} \text{ (=摩擦速度)},$$

$$\tau_w : \text{壁面上の摩擦応力}$$

$$y^+ = u_\tau y/\nu$$

が成り立つ。ただし、 U は主流方向の速度成分、 ρ と ν はそれぞれ流体の密度と動粘性係数である。

通常、式(1)を壁法則と呼んでいるように思われる。この意味で壁法則をとらえる限りは、対数速度分布

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + A^+ \tag{2}$$

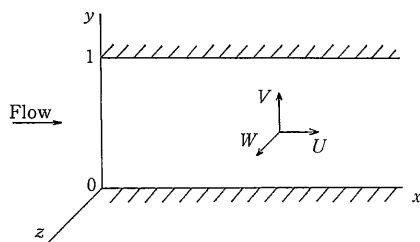


Fig. 1 座標系の定義

*東京大学生産技術研究所 第1部

$$A^+ : \text{const. (=4.53~5.63)}$$

κ : Kármán constant

と壁法則(1)は同等である。なお、この意味の壁法則は粘性底層内の速度分布

$$U/u_\tau = y^+ \tag{3}$$

にも適用されている。

ただし、壁法則(1)には

“壁の影響を直接受ける領域においては、平均の速度分布は壁面上の摩擦応力 τ_w 、壁からの距離 y 、流体の密度 ρ と粘性係数 μ の関数で表せる。” (4)

という前文がある。この前文(4)に圧力勾配の項が含まれていないのは、Reynolds応力一定の平衡層が支配的な境界層では、圧力勾配が τ_w を使って表現できるためであろう。また、壁法則(1)は前文(4)を無次元化して表したものである。したがって、前文(4)を壁法則と呼んでも差つかえない。ただし、壁法則(1)と前文(4)との決定的な違いは、壁法則(1)は主流速度を u_τ で無次元化したものは y^+ のみの関数であることを主張するのに対し、前文(4)は必ずしもそうでないことにある。以下、少し具体的に話をすすめる。

主流が一方向流であれば、 v_e をうず粘性係数とするとき、主流の方程式は

$$\frac{\partial}{\partial y}(v + v_e) \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{5}$$

と書ける。この式を $y \rightarrow 0$ で適用すれば

$$\nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{6}$$

となる。この式から明らかなように、 $\partial p/\partial x$ が0でない限り粘性底層内の速度分布は y の2次式で書ける。実際には、(5)の解は

$$U = \frac{u_\tau^2 y}{\nu} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + O(y^3), \tag{7a}$$

$$\frac{U}{u_\tau} = y^+ + \frac{1}{2\mu u_\tau} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + O(y^3), \tag{7b}$$

となる。この速度分布は、‘壁法則’と呼んではいけないの

研究速報

であろうか？壁法則(1)の意味では‘呼んではいけない’のである。しかし、これが壁に近いところで成り立つ以上、壁法則は適用されるはずである(実際、対数速度分布(2)は速度分布(7)より壁から離れたところで成り立つにもかかわらず、壁法則と呼ばれている)。この矛盾は、壁法則を(4)の意味で考えればよく理解できる(ただし、壁法則(4)で平均の速度分布は圧力勾配にも依存することを付け加える)。

次に、壁法則(1)における y^+ について考えよう。 y^+ は $u_x y/\nu$ であるから、たとえば $y^+=20$ のところは対数速度分布(2)(Fig. 2参照)のほぼ下端付近である。問題は、 $y^+=20$ としても y^+ の座標では確定するが、 y の座標では ν と u_x を決めないと確定しないということである。一つの極限として、 $\nu \rightarrow 0$ (Reynolds数 $Re = VL/\nu \rightarrow \infty$, V と L はそれぞれ流れ場の代表速度と代表長さ)、 $y \rightarrow 0$ かつ一定の y^+ の場合を考える。このとき、対数速度分布(2)の第1項が支配的となる。これが、対数速度分布がなぜ広い範囲で実験とよく一致するかという理由であり、対数速度分布が一つの漸近解になっている理由である。対数速度分布の次のオーダーの解は

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + A^+ - \frac{1}{\kappa} (a_1 + 2)y + O(y^2) \quad (8)$$

$$-4.22 \leq a_1 \leq -3.79$$

のようにやはり y で表現できる。式(8)の第3項の寄与は、(Fig. 2にみるように $a_1 + 2 < 0$ であるから) $y^+ \geq 500$ で対数速度分布より実験結果が大きくなっていることを説明できる。なお、 $\nu \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, y^+ =固定の極限では式(8)の近似の度合がよくなることに注意しておく。また、これまでの話は暗黙のうちに u_τ が与えられたものとして話をすすめてきたことに注意したい。対数速度分布がReynolds応力一定の平衡層で成り立つゆえである。

さて、こんどは $u_\tau \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow 0$, かつ y^+ =固定の極限を

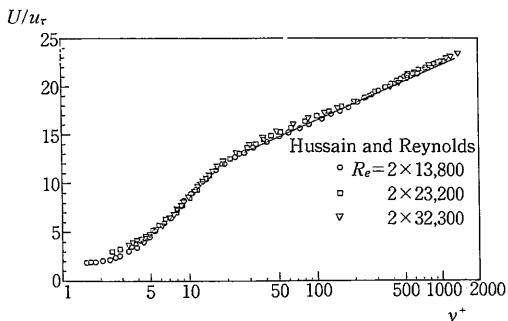


Fig. 2 対数速度分布⁴⁾

考える。このような極限では、壁法則(1)は存在しない。それは、 $u_\tau \rightarrow 0$ としても(実験結果によると $y=0$ 付近を除いて) $U \rightarrow 0$ とならないからである。実は、このとき $1/2$ 乗則

$$U = 2 \sigma_1 (Gy)^{1/2} + U_0 \quad (9)$$

$$\sigma_1 : \text{const.},$$

$$G = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x}, \quad U_0 : \text{すべり速度}$$

が成り立つ。この速度分布も漸近解の一つであるが、明らかに(1)の意味の壁法則ではない。また、速度分布(9)は対数速度分布(2)とも異なるが、はく離点近傍の境界層で実験的に確認されている。ここでも、壁からの距離 y が直接に出てくることに注意したい。したがって、この速度分布(9)は、(1)の意味では壁法則ではないが、(4)の意味では壁法則である。このように考えると、壁法則を(1)の意味でとどめておく理由はどこにもないことがわかるであろう。

以上、要は従来対数速度分布の存在があまりにも大きすぎたために、壁法則=対数速度分布(2) or 粘性底層内の速度分布(3)というようにいつのまにか考えられてきたように思える。しかし、いくつかの事例で示したように、(対数速度分布も含めて)壁からの距離 y という量が基本的には速度分布その他を決めている(y^+ ではない)。さらに、‘壁法則’というものを上流側の流れの条件の影響を受けない領域、あるいは前文(4)に圧力勾配を加えたものにとらえれば、それは乱流の速度分布のみならず、乱流エネルギーなど高次のモーメントに対しても成り立つものである。

3. (積分定数としての) すべり速度

さて、こんどは対数速度分布(2)の積分定数(すべり速度) A^+ について考える。まず、(2)を

$$U = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln y^+ + U_0, \quad U_0 : \text{すべり速度} (= A^+ u_\tau) \quad (10)$$

と書き直しておく。

このすべり速度 U_0 は、本来粘性底層、緩和層内の物理的条件によって決まるべきものであるが、いまのところこれを正しく決めるべき方法がない。そこで、次元解析と物理的数学的考察に頼らざるを得ない。ここでも、話の都合上まず従来の壁法則(4)から話をすすめる。わざわざそうするのは理由があって、実は(4)の物理量から速度の次元をもつものを作ると u_τ しかない。それがちょうど対数速度分布のすべり速度(積分定数)なのである。

次に、過去に提案された U_0 の関数形のいくつかを書いてみると、

研 究 速 報

$$U_0 = A_1(\nu\alpha)^{1/3} \text{ (Stratford}^{9}) \text{, } \alpha = \partial p / \rho \partial x \text{ (11a)}$$

$$U_0 = (u_\tau / \kappa) (\ln 4\kappa - 1) + u_\tau^2 \delta_\ell / \nu \text{ (Rotta}^{6}) \text{ (11b)}$$

δ_ℓ : 粘性底層の厚さ

$$U_0 = (u_\tau / \kappa) \ln(A_1 u_\tau^3 / \nu\alpha) + A_2 u_\tau \text{ (11c)}$$

(Townsend⁷, Perry et al.⁸)

等である。これらの関数形は、もちろんそれぞれ理由があるが、ここでは以下に示すいくつかの理由でこれらの関数形が正しいとは考えない。

- (i) 実験によると、 $u_\tau = 0$ のとき $U_0 = 0$ とならない。
- (ii) 粘性底層内の速度分布 (7a) は $u_\tau = 0$ とすると

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + O(y^3) \text{ (12)}$$

となる。すなわち、 u_τ に関してなめらかにつながっている。そうすると、 U_0 自身も u_τ に関してなめらかであるはずと期待しても間違いではないであろう。

- (iii) (11c) を導く前提の一つは $u_\tau^3 / \nu\alpha \leq O(10)$ であるが、実験と比較している U_0 (11c) は $u_\tau^3 / \nu\alpha \geq O(100)$ である。

- (iv) $\alpha = \partial p / \rho \partial x = 0$ のとき、必ずしも $u_\tau = 0$ とならないが、このとき (11c) が成り立たない。

以上、著者の主張は、対数速度分布のすべり速度 U_0 は対数速度分布の成り立つ仮定からだけで決まっているのではなく、たとえば $u_\tau = 0$ の場合も $u_\tau \neq 0$ の場合と解析的になめらかにつながっているはずであるということである。

たとえば、壁法則 (4) にさきに述べた理由から圧力勾配 α を加えて考えると、これらの物理量から速度の次元をもつものを作ると、 $(\nu\alpha)^{1/3}$ と u_τ とがある。したがって、(ここで考えている) 壁法則の意味からだけでも、(10) の U_0 は、

$$U_0 = A_1 u_\tau + A_2 (|\nu\alpha|)^{1/3} \text{ (13a)}$$

と書けるべきであることが導ける。従来この第 2 項が問題にならなかったのは、幸いにしてこの項は第 1 項に比較して小さかったことによる。式 (13a) の形のほうが従来の形 (第 1 項のみ) より物理的にも好ましいと思われる理由は、Reynolds 数効果が反映できることと、 $u_\tau = 0$ のときでも $U_0 \neq 0$ という実験事実を反映できることである。なお、 A_1 と A_2 の値は、 $\alpha = 0$ の場合の実験結果⁹ と、直接数値シミュレーション¹⁰ や実験¹¹ の結果から、たとえば

$$A_1 = 4.9, A_2 = 3.40 \sim 3.54 \text{ (13b)}$$

と評価できる。

では、関数形 U_0 は (13a) の形で十分であろうか。これについては、現在のところ確定的なことは言えないが、次のような形

$$U_0 = A_1 u_\tau + A_1 |\nu\alpha|^{1/3} + A_2 |\nu G|^{1/3}$$

$$+ A_3 |\nu U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x}|^{1/3} + A_4 \frac{u_\tau^2}{G} \frac{\partial u_\tau}{\partial x}$$

$$+ A_5 \frac{u_\tau^3}{G^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + A_6 \frac{u_\tau^3}{G^2} \frac{\partial G}{\partial x} + \dots \text{ (14)}$$

を想定している¹²。2次元平行平板間の乱流場では、(14) は (13a) の形に縮退する。また、(14) で u_τ , α , G の高階微分は、主流がほぼ一方向流であり、したがって流れ場の中で急激な変化は生じないとして、さしあたり省略している。

4. 結 言

以上、対数速度分布につき、著者のおこなった研究の中から、とくに壁法則との関連性、すべり速度 (積分定数) について考察した。なお、本稿の議論は標準 $k-\epsilon$ モデルでも成り立つ。

本稿が何かの御参考になれば幸いである。

謝 辞

本研究をすすめるにあたり、本所 NST グループの御支持と御討論を戴きました。とくに、吉澤徹教授には貴重な御討論を戴きました。ここに記して厚く感謝致します。

(1989年10月9日受理)

参 考 文 献

- 1) Townsend, A.A., 'The Structure of Turbulent Shear Flow', Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne, 1976.
- 2) Hinze, J.O., 'Turbulence', Second Edition, McGraw-Hill, Inc., New York, St. Louis, San Francisco, 1975.
- 3) Tennesses, H. and Lumley, J.L., 'A First Course in Turbulence', The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, 1972.
- 4) Hussain, A.K.M.F. and Reynolds, W.C., J. Fluids Eng., vol. 97, 1975, 568.
- 5) Stratford, B.S., J. Fluid Mech., vol. 5, pt. 1, 1959, 1.
- 6) Rotta, J., 文献2)の P. 627.
- 7) Townsend, A.A., J. Fluid Mech., vol. 11, pt. 1, 1961, 97.
- 8) Perry, A.E., Bell, J.B. and Joubert, P.N., J. Fluid Mech., vol. 25, pt. 2, 1966, 299.
- 9) Clauser, F.H., 文献2)の P. 627.
- 10) Kim, J., Moin, P. and Moser, R.D., J. Fluid Mech., vol. 177, 1987, 133.
- 11) 西野, 笠木, 機論, 投稿中.
- 12) Takemitsu, J. Fluid Mech., submitted.