

SEMにおける誤差評価と流れ場解析

Error Estimate and Flow Analysis Using Spectral Element Method

小林 敏 雄*・玉 川 雅 章*
Toshio KOBAYASHI and Masaaki TAMAGAWA

1. 序

現在, 数値計算力学において主流となっている離散化は, FDM (差分法), FEM (有限要素法), BEM (境界要素法) などがある。これらの離散化法にはそれぞれの利点と欠点が存在するが, いずれにも共通することは, 計算が簡潔で計算時間を減らせるが, 高次の微分にたいしては正しく表現できないことである。基本的に, これらの離散化によれば計算は局所的情報によって行われることになる。

一方, 計算を全体的情報から行うための手法として, スペクトル法¹⁾がある。これは, 計算時間がかかる反面, 精度がよく, また高次の微分を正しく表現することができる。数値流体力学においては, この手法は計算機の性能によるところが大きい。従来は特殊な場合 (乱流モデルの検証のための直接シミュレーションなど) にしか用いられていなかった。今後計算機の性能向上や計算スキームの開発とともに使用機会が増えると考えられる。スペクトル法のもうひとつの問題点は, 形状に対する適合性がないことである。これには, Mapping²⁾や domain-decomposition³⁾などが報告されている。

近年Pateraらが提案したSEM (スペクトル・エレメント法)⁴⁾は, FEMのエレメントに対してChebyshev多項式やLegendre多項式の補間関数を用いる方法である。これはFEMとスペクトル法の両者の混合形式になっていて, エレメント同士に対しては変分原理を, エレメント内部に対してはスペクトル・コロケーション法を用いている。FEMのエレメントを用いているため複雑形状のものにも対応できる。つまり精度と形状適合性の両方が改善されることになる。しかし, スペクトル法での補間関数の次数とエレメントの数が, パラメータとなるためその誤差評価を直接解析的に行うことができない。

そこで, 本報では, 実際の流体計算に使用する前段階として一般の偏微分方程式を解くことによって精度およびパラメータによる誤差の評価を行った。さらに, この

*東京大学生産技術研究所 第2部

手法を正方キャピティの層流計算に適用してみた。

2. 記 号

S_x^s, S_y^s	: x 方向, y 方向のエレメント分割数
$[a_x^s, b_x^s], [a_y^s, b_y^s]$: s 番目のエレメントの x, y 方向の区間の下限と上限
N_x^s, N_y^s	: x 方向, y 方向のLagrange補間関数の次数
\bar{x}_i, \bar{y}_i	: エレメント内の局所座標系 $[-1, 1]$ での配置点
$T_n(x)$: n 次Chebyshev多項式
$h_i(x)$: i 次補間関数
L_x^s, L_y^s	: エレメント s の x 方向, y 方向の長さ
v, ω, p	: 速度, 渦度, 圧力

3. 基 礎 式

3-1 空間離散化手法

一般の2次元ヘルムホルツ型偏微分方程式にSEMの空間離散化を行う。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda^2 u = f$$

ただし, $u \in \Gamma$ で, 境界上で0である。 λ は正の定数。

式の離散化は一般の形状に用いる場合は座標変換の項が入るので, 簡単のため今回直交座標系に対応するものを用いる。

区間 (領域) を $S_x \times S_y$ 個のエレメントに分割する (図1)。 $[a_x^s, b_x^s] \times [a_y^s, b_y^s]$ を s 番目の区間 (エレメント) とする。 s 番目のエレメントの中で, 従属変数 $u(x, y)$ を $(N_x^s + 1) \times (N_y^s + 1)$ 個の配置点によるLagrange補間によって与える。

$$u^s(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=0}^{N_x^s} \sum_{j=0}^{N_y^s} u_{ij}^s h_i^s(\bar{x}^s) h_j^s(\bar{y}^s)$$

離散化は, ヘルムホルツ方程式の両辺に重み関数 $v(u)$ と同じ条件) をかけて積分する。

$$\int (v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - v \lambda^2 u) dx dy = \int v f dx dy$$

研 究 速 報

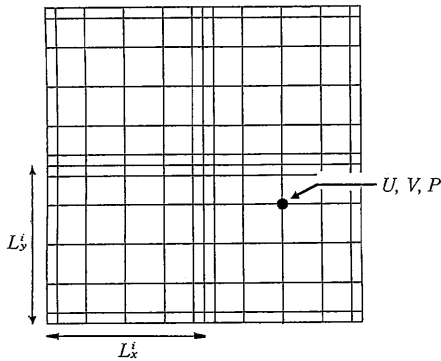


図 1 エレメント分割図 (4 エレメント×49 ノード)

ここで、左辺第 1 項と第 2 項を部分積分により変形すると、1 次元の線積分が消去されて

$$-\int \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy - \int \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy - \int v \lambda^2 u dx dy = \int v f dx dy$$

となる。この式を各エレメントの積分に分けて、さらに従属変数を代入して、2次元の積分を行う。

$$\tilde{A}_{jk}^{s \cdot x} = \frac{4}{c_j c_k n} \sum_{m=0}^{N_x} \frac{1}{c_n c_m} T_n(\bar{x}_j^s) T_m(\bar{x}_k^s) a_{nm}$$

$$\tilde{B}_{jk}^{s \cdot x} = \frac{4}{c_j c_k n} \sum_{m=0}^{N_x} \frac{1}{c_n c_m} T_n(\bar{x}_j^s) T_m(\bar{x}_k^s) b_{nm}$$

で表すと、

$$A_{jklm}^s = -\frac{L_y^s}{L_x^s} \frac{1}{(N_x N_y)^2} \tilde{A}_{jl}^{s \cdot x} \tilde{B}_{km}^{s \cdot y}$$

$$-\frac{L_x^s}{L_y^s} \frac{1}{(N_x N_y)^2} \tilde{A}_{km}^{s \cdot y} \tilde{B}_{jl}^{s \cdot x}$$

$$B_{jklm}^s = \frac{L_y^s L_x^s}{4} \frac{1}{(N_x N_y)^2} \tilde{B}_{jl}^{s \cdot x} \tilde{B}_{km}^{s \cdot y}$$

ここで、 a_{nm} 、 b_{nm} は積分係数で後述する。 c_n は、 $c_n = 1$ (at $n = 0, N_x$)、 0 (at $n = 1, \dots, N_x - 1$)である。 $C_{jklm}^s = A_{jklm}^s - \lambda^2 B_{jklm}^s$ とすると、2次元離散Helmholtz方程式は、次の連立方程式となる。

$$C_{jklm}^s u_{jk} = B_{jklm}^s f_{jk}$$

エレメントSの総和を考えれば、

$$CU = BF$$

上の式中で、積分係数 a_{nm} 、 b_{nm} は計算すると次のようになる。

$$a_{nm} = 0 \quad (n+m \text{ odd})$$

$$= \frac{nm}{2} (J_{|(n-m)/2|} - J_{|(n+m)/2|}) \quad (n+m \text{ even})$$

$$J_k = -4 \sum_{p=1}^k \frac{1}{2p-1} \quad (k \geq 1)$$

$$= 0 \quad (k = 0)$$

$$b_{nm} = 0 \quad (n+m \text{ odd})$$

$$= \frac{1}{1-(n+m)^2} + \frac{1}{1-(n-m)^2} \quad (n+m \text{ even})$$

3-2 2次元ポアソン方程式の解法

これは、上の離散化において $\lambda = 0$ として f にsource項を代入すればよい。対象とする方程式は⁹⁾

$$\Gamma = [-1, 1] \times [-1, 1] \text{ において}$$

$$\Delta u = -\sin(2\pi x) \cdot \cos(3\pi y)$$

境界で $u = 0$ である。

3-3 正方キャビティ内の流れ

rotational-formで表された無次元NS方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \times \omega - \nabla \Pi + \frac{1}{R} \nabla^2 v \quad (1)$$

ここで、 $\Pi = p + v^2/2$ 、 $\omega = \nabla \times v$ 。

また連続の式は、次のように表される。

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (2)$$

この2式をconsistentに解けばよい。離散化は時間方向に対しては差分を、空間に対してはSEMを用いる。計算アルゴリズムとしては、対流項を陽的に、圧力項および粘性項を陰的に扱う。つまり

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = (\text{advection})^n - \nabla \Pi^{n+1} + \frac{1}{R} \nabla^2 v^{n+1}$$

この式を、対流項、圧力項、粘性項に分けて時間積分を行う。

第一ステップでは、NS方程式の対流項に対してAdams-Bashforth Schemeを用いる。

$$\frac{v^{n+1/3} - v^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} (v^n \times \omega^n) - \frac{1}{2} (v^{n-1} \times \omega^{n-1})$$

第2ステップでは、圧力による速度補正が行われ

$$\frac{v^{n+2/3} - v^{n+1/3}}{\Delta t} = \nabla \Pi^{n+1}$$

この両辺のDivergenceをとって、さらに連続の式(2)の $n+2/3$ での離散形

$$\nabla \cdot v^{n+2/3} = 0$$

を使うと、圧力に関するポアソン方程式が得られる。

$$\nabla^2 \Pi^{n+1} = \frac{\nabla \cdot v^{n+1/3}}{\Delta t}$$

第3ステップでは、粘性項について陰解法を用い、

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+2/3}}{\Delta t} = \frac{1}{R} \nabla^2 v^{n+1}$$

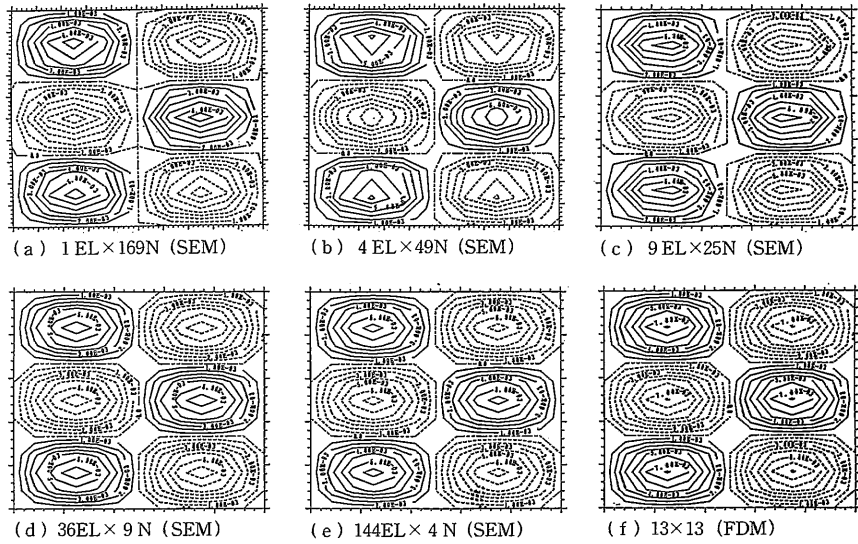


図2 解の2次元分布 (エレメント (EL) × ノード (N) (FDMはグリッド数))

または、Crank-Nicolsonを用いる。

3-1で示したHelmholtz型方程式の空間離散化を用いることによりこれらの式系が離散化される。さらに、このステップの後にInfluence-matrix⁵⁾によって連続の式を壁面で満足するように計算する。

4. 計算結果と考察

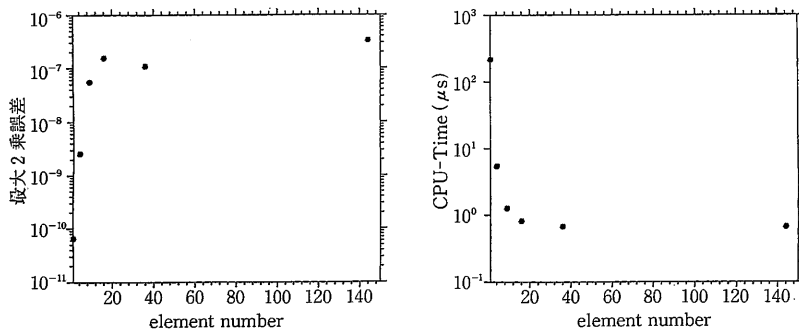
4-1 2次元ポアソン方程式

SEMによる3-2のポアソン方程式の計算を行った。計算は同一格子数169で行い、エレメント数と補間関数をパラメータとした。図2にポアソン解の2次分布図を示す。比較のために、169の格子数のFDMで行ったものを(f)に示す。図2(a)から(e)へと補間次数が低くなるとともに、等高値0の線がずれていく。これは、次数の減少で厳密解からの誤差が大きくなることを示す。さら

に2乗最大誤差をパラメータをもとに表したものが図3である。これからわかることは、(a)では、エレメント数が増加する(補間次数が低下)とともに、誤差が増大するが、15~20を越えるとオーダ的に変わらなくなる。また、(b)でも、15~20を越えると、計算時間がオーダ的に変わらなくなる。これらは、補間次数が5~6より低いとSpectral法の効果を落としてしまうことを示す。このことからPateraが6~7を推奨していることが、定量的に裏付けられる。

4-2 正方キャビテイの層流計算例

流体計算例として[0, 1] × [0, 1]の正方キャビテイの層流計算を行った。図4にRe=100のSEMによる層流計算の結果をキャビテイ中央断面部に平行の速度分布を用いて示す。比較のための差分法による計算例もSEM



(a) エレメント数と最大2乗誤差

(b) エレメント数と計算時間

図3 パラメータによる2乗誤差の変化と計算時間

研 究 速 報

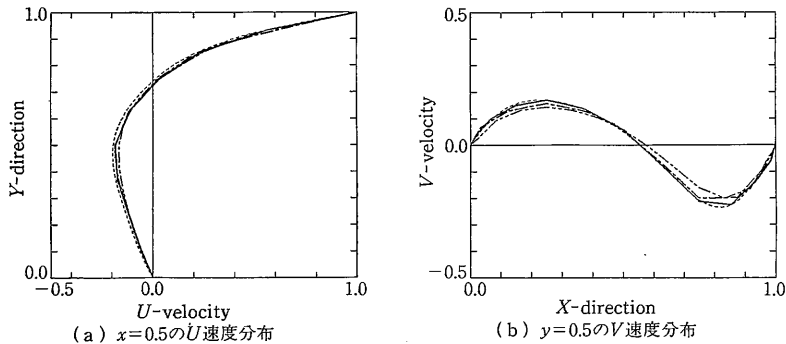


図 4 正方キャビティ速度分布 case 1—— case 2---- case 3---- case 4----

表 1 計算条件

	case 1	case 2	case 3	case 4
空間離散化	SEM	SEM	FDM	FDM
時間離散化 (差分)	Adams -bashforth	Adams -bashforth	Euler -forward	Adams -bashforth
圧力解法	Influence -Matrix	Influence -Matrix	Influence -Matrix	HSMAC Method
時間刻み	1/100	1/100	5/1000	1/100
格子数 (node×element)	169×1	49×4	13×13	50×50

と同じinfluence-matrixと一般的なHSMACの2例をあわせている。それぞれの計算条件は表1に示してある。速度 u, v の分布を見ると、 u 方向は移動壁によるせん断方向成分が強いので、ほぼ一致している。格子数の多いcase 4を基準に見れば、case 1とcase 2は壁面から $y=0.5$ の中心面ではcase 4に比べて約1%程度のずれが認められる。case 3は差分格子が粗いのでcase 4に比べて差異が現れると考えられる。次に、 v 方向を見ると、SEMにおいて、case 1とcase 2は u 方向に比べて差が大きくなっているが、この差は4-2で評価したエレメント数1と4の誤差の比(相対誤差が 10^{-1})より大きくなっていることがわかる。残りの誤差は、エレメントの接合部分での関数の連続性はあるが、1階微分の連続性がないので、滑らかでない関数を認めうることによると考えられる。したがって、厳密解からの誤差が生じて、それを接合部分で増幅させないような微分連続性をとりこむことが必要となる。そのためには、エレメント間においての補間関数の1階微分が完全に連続なconforming elementとの結合が考えられる。

5. 結 論

楕円型の偏微分方程式でのエレメント数と補間次数と

による定量的誤差評価と、簡単な流れの計算を行い他の計算手法と比較して、次の結論を得た。

SEMでのポアソン方程式の解の2乗最大誤差の結果をみると、補間次数とエレメント数をパラメーターと考えた場合、同一格子数では一般にエレメント数を減らし補間次数を上げるのがよいことがわかる。しかし、実際には計算速度、および計算対象となる形状にこれらのパラメーターは依存する。そこで、形状によってエレメントを決定した後、いかに速くかつ精度を保ちながら計算させるかが、この手法を最大に活用するポイントになる。今回の評価では、同一格子数で計算を行い、精度および計算時間の両方を考えた。その中で、補間次数が5~6次以上でかつ計算時間と精度の両方を考えて補間次数を決定すればよいことがわかった。しかし、キャビティ計算からも確認されたように、エレメントの分割によっては、接合部でのerrorが大きくなり、これによって精度を落しかねないので、計算対象形状にも注意すべきである。正方キャビティの層流計算から、この手法は解の微分の連続性がくずれたときに復元性が弱いことが示された。これは、 Re が高くなるにつれ問題となってくることである。対策としては、微分の連続性を保つconforming elementを利用することなどが考えられる。

(1989年10月26日受理)

参 考 文 献

- 1) Canutoら“Spectral Methods in Fluid Dynamics,” Springer-Verlag (1988)
- 2) Orzag, S.A., J. Comput. Phys, 37, 70-92 (1980)
- 3) P. Demaret, M. Deville, Computational Fluid Dynamics, North-Holland (1985)
- 4) Patera. A.T., J. Comput. Phys, 54 (1984), 468
- 5) 第28回生研講習会テキスト 数値乱流工学(8)マルチグリッド法による数値計算
- 6) Kleiser. L., Schumann. U., in Proc. 3rd GAMM Conf, Numerical Methods in Fluid Mechanics, 165-173