

普遍的スマゴリンスキーモデルの構成

Development of the Universal Smagorinsky Model

森 西 洋 平*・小 林 敏 雄*

Youhei MORINISHI and Toshio KOBAYASHI

1. は じ め に

スマゴリンスキーモデルはLESにおけるSGS応力のモデルとして最も広く用いられ、多くの成功例を生み出している。モデル中唯一の定数 C_s の種々の流れ場に対する最適値はこれまでの経験によりほぼ定まっており、0.1前後から0.25前後までの値が取られている¹⁾。しかしながら種々の要素を含むより複雑な乱流において C_s 定数を一つに固定することは正確さを欠き、また危険でもある。ごく最近、Yoshizawa²⁾は統計理論により C_s が変数として表現できることを説明し、その形式を導出した。

本論文ではYoshizawaによる C_s 変数とするモデルを用い、より広範囲な流れ場に適用可能なSGSモデルの構成を試みる。計算対象としては一様乱流の減衰の問題およびチャンネル内乱流を取り上げる。

2. C_s を変数とするスマゴリンスキーモデル

スマゴリンスキーモデルは、アンサンブル平均モデルでのレイノルズ応力項に対するモデルと同様、SGSレイノルズ応力項に勾配拡散型の渦粘性モデルを適用するモデルで、式(1)、(2)により表現される。

$$\overline{u_i' u_j'} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_k' u_k'} = -2 \nu_T \overline{S_{ij}} \quad (1)$$

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

$$\nu_T = (C_s \Delta)^2 \cdot (2 \overline{S_{ij}} \cdot \overline{S_{ij}})^{1/2}$$

$$\Delta = (\Delta X_1 \cdot \Delta X_2 \cdot \Delta X_3)^{1/3}$$

Δ はSGSの長さスケールであり、壁の影響を考慮するためには壁面減衰関数が掛けられる。式(2)中で唯一のモデル定数 C_s の種々の流れ場に対する最適値はこれまでの経験によりほぼ定まっており、チャンネル内乱流での $C_s=0.1$ 前後から一様乱流での $C_s=0.25$ 前後までの値が取られている¹⁾。ごく最近、Yoshizawa²⁾は統計理論により C_s が変数として表現できることを説明し、その形式

*東京大学生産技術研究所 第2部

を導出した。

$$\frac{C_s}{C_{s0}} = 1 + C_A \cdot S^{-2} \cdot \frac{DS}{Dt}$$

$$S = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

この式は流れ場による C_s の変化を S のグランジュ微分 DS/Dt により表現している。式(3)中に含まれる2つの定数のうち、 C_{s0} は C_s の基準値を与え、また C_A は流れ場の違いによる C_s 値の変化の割合を規定するものである。Yoshizawaはさらにこのモデル中の2つの定数を統計理論により評価し、 $C_{s0}=0.16$ 、 $C_A=0.64$ を与えている。

3. モデルの最適化

ここでは式(3)を用いて実際の数値計算を行い、より実用的なSGSモデルの構成を試みる。計算対象としてこれまでのスマゴリンスキーモデルで定数 C_s 値のほぼ上限を与える一様乱流の減衰の問題、および C_s 値のほぼ下限を与えるチャンネル内乱流双方を取り上げ、双方の流れ場ともに表現できる式(3)中の定数の組み合わせを見つける。

3.1 一様乱流の減衰問題への適用

一様乱流の減衰問題の差分法による計算例としてはA-Domis³⁾によるものがあり、彼はモデル定数 C_s として0.23を推薦している。本報ではまずこの値を用いた計算を行い、比較対象とする乱流強度の減衰勾配を得る。次に C_s を変数とするモデル式(3)による計算を実行し、その結果と $C_s=0.23$ (定数)の結果とが一致するように式(3)中の定数 C_{s0} と C_A との組み合わせを捜す。

計算条件としては主流空気速度 $U_0=10\text{m/s}$ 、乱流格子幅 $M=5.08\text{cm}$ での流れを考え、差分格子数 16^3 、差分格子幅 $h=15\text{mm}$ での計算を実行する。まず初めに行う $C_s=0.23$ での初期条件にはDivergence-freeのランダム波を

研 究 速 報

用いる。時間刻み $\Delta t=0.005$ を用い、最初の1ステップのみ一次精度の陽解法、それ以降は二次精度のAdams-Bashforthスキームにより600ステップ計算を実行する。次に、 $C_s=0.23$ による乱流強度の減衰曲線の勾配がほぼ一定となる $U_0 x/M=110$ の時点での流れ場を初期条件とし、 C_s を変数とするモデル式(3)による計算を継続して実行する。時間刻み $\Delta t=0.005$ を用い、Adams-Bashforthスキームにより300ステップの計算を行う。

式(3)中の定数の組み合わせを捜す計算の手順としては、まず C_{s0} を固定し、 $C_s=0.23$ の場合の減衰勾配を実現するような C_A の値を捜す。このとき、 C_s の値の定義域として($0 \leq C_s \leq 0.3$)および($0 \leq C_s \leq 0.5$)の制限を加えている。これは式(3)の形からわかるとおり、 S が零となるところで C_s が無大となり、そのままモデルを用いると計算がすぐに発散してしまうためである。

乱流強度の減衰の勾配が $C_s=0.23$ に固定した場合の値とほぼ一致するような式(3)中の定数の組み合わせの一例として、 $C_{s0}=0.16$ 、 $C_A=-3.1$ ($0 \leq C_s \leq 0.5$)が得られる。この場合の一樣乱流の減衰曲線および C_s の空間平均値の時間履歴を図1および図2に示す。図1中の実線は $C_s=0.23$ による減衰曲線、×印が新しいモデルを用いた結果で、20ステップごとに結果をプロットしてある。図2より、 C_s の空間平均値は0.2前後の値となっているが、時間的な変動の大きいことがわかる。同様の手順により得られた一樣乱流減衰問題での C_{s0} と C_A との組み合わせを図3に示す。

3.2 チャンネル内乱流への適用

先の計算により、一樣乱流の減衰問題が表現できる新しいモデルの定数の組み合わせを、図3上の曲線として示すことができた。次にこの曲線上でチャンネル内乱流を表現できる点が存在するかどうかを確認する。ここで行った計算例を表1に示しておく。 C_s の定義式として式(3)を用いること以外の計算条件等は文献4)、5)を参

表1 チャンネル内乱流の計算例 ($0 \leq C_s \leq 0.3$)

CASE	MESH ($N_x \times N_y \times N_z$)	Δx_1	Δx_2	Δx_3	SGS model	Wall B.C
X04	$32 \times 32 \times 40$	3.2D/32	1.6D/32	0.0021D ~0.0133D	$C_{s0}=0.04$ $C_A=-62$	no-slip
X06	$32 \times 32 \times 40$	3.2D/32	1.6D/32	0.0021D ~0.0133D	$C_{s0}=0.06$ $C_A=-38$	no-slip
X08	$32 \times 32 \times 40$	3.2D/32	1.6D/32	0.0021D ~0.0133D	$C_{s0}=0.08$ $C_A=-26$	no-slip
X10	$32 \times 32 \times 40$	3.2D/32	1.6D/32	0.0021D ~0.0133D	$C_{s0}=0.10$ $C_A=-18$	no-slip
X14	$32 \times 32 \times 40$	3.2D/32	1.6D/32	0.0021D ~0.0133D	$C_{s0}=0.14$ $C_A=-10$	no-slip

照のこと。なお、ここでは($0 \leq C_s \leq 0.5$)での計算例を示していないが、これは計算を実行しなかったのではなく、計算が発散したり収束解が得られない等の理由で妥当な解が得られなかったことによる。

図4および図5に、表1に示した計算例の主流方向平均速度分布および C_s の x_1-x_2 面平均値 $\langle C_s \rangle$ の分布を示す。図4中の実線は普適的速度分布(文献6)、 $x=0.4$ 、 $B=5.5$)である。いずれの計算例も対数則領域での定数 B が7.2程度となり、通常用いられている値($B=5.5$ 前後)よりもかなり大きくなっている。この理由としては、図5に見られるとおりチャンネルの流路中心部での C_s の値が0.14程度となり、チャンネルで通常用いられている $C_s=0.10$ よりも大きな値となっていること、および先の一樣乱流の減衰問題のところでも見られたとおり、 C_s 値の空間、時間的な変動が大きすぎる等が考えられる。また、新しいスマゴリンスキーモデルの性質として C_s の壁近傍の値は C_{s0} に近づくことがわかる。

3.3 モデルの再検討

これまでYoshizawaによって提案された C_s を変数と

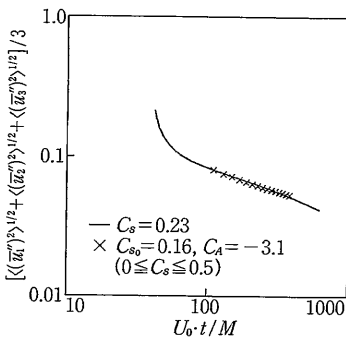


図1 一樣乱流の乱流強度の減衰曲線 ($C_{s0}=0.16$, $C_A=-3.1$, ($0 \leq C_s \leq 0.5$))

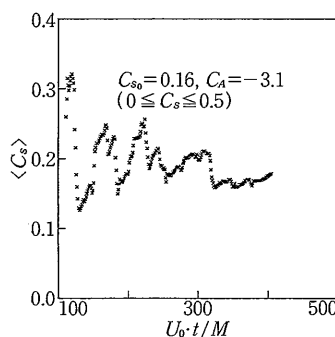


図2 一樣乱流の $\langle C_s \rangle$ の時間履歴 ($C_{s0}=0.16$, $C_A=-3.1$, ($0 \leq C_s \leq 0.5$))

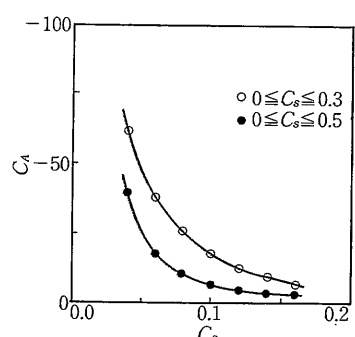


図3 $C_{s0}-C_A$ 曲線 ($0 \leq C_s \leq 0.3$), ($0 \leq C_s \leq 0.5$))

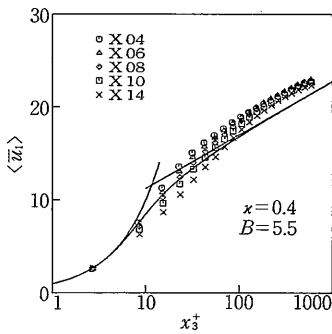


図 4 主流方向速度分布 (X04, X06, X08, X10, X14)

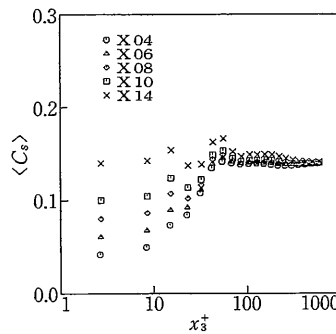


図 5 $\langle C_s \rangle$ 分布 (X04, X06, X08, X10, X14)

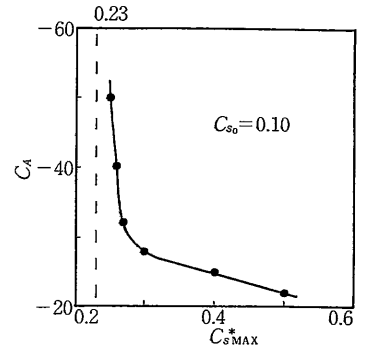


図 6 $C_s^* \text{MAX} - C_A$ 曲線 ($C_{s0}=0.10$)

するスマゴリンスキーモデルを用い、一様乱流およびチャンネル内乱流双方の流れ場を表現できるSGSモデルの構築を試みてきた。その結果は十分なものとは言えないが、新しいモデルの性質や問題点が明らかになった。これらの経験を踏まえ、以下の3点の改良を加えてモデルの再編成を行ってみる。

まず第一の改良点は、定義域 $C_s^* \text{MAX}$ を変化させてみる。

$$\frac{C_s^*}{C_{s0}} = 1 + C_A \cdot S^{-2} \cdot \frac{DS}{Dt} \quad (0 \leq C_s^* \leq C_s^* \text{MAX}) \quad (4)$$

第二の改良点は、 C_s 値の変動を小さくするために空間的なスムージングを行う。

$$C_s(i, j, k) = \frac{\sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=-1}^{+1} \sum_{n=-1}^{+1} C_s^*(i+l, j+m, k+n)}{27} \quad (5)$$

ここでは、定義域 $C_s^* \text{MAX}$ のもとで式(4)より得られた C_s^* 値より、近傍点の平均値式(5)を算出し、これを改めて C_s 値として用いる。

第三の改良点は、壁乱流の計算で壁面近傍での $\langle C_s \rangle$ 値が0.1近傍となるよう C_{s0} を0.1に定める。

まず、 $C_s^* \text{MAX}$ と C_A との組み合わせを定めるため、一様乱流の計算を再び行う。計算手法および計算条件は式(4)と式(5)を用いること以外第3.1節と同様である。結果として得られた $C_s^* \text{MAX}$ と C_A との組み合わせを図6に示す。 $C_s^* \text{MAX}$ が小さすぎると打ち切りによる影響が大きくなり、 $C_s = 0.23$ と同様の一様乱流の減衰が表現できなくなることが示されている。

次に、式(4)および式(5)を用い、図6上の定数の組み合わせによりチャンネル内乱流の計算を行った。ここで実行した計算例を表2に示す。これらの計算例のうち通常のスモゴリンスキーモデル ($C_s = 0.1$) とほぼ同様の計算結果を示す定数の組み合わせとして、 $C_{s0} = 0.1$ 、 $C_A = -32.0$ 、 $C_s^* \text{MAX} = 0.27$ を選ぶ。最後に、ここで構成した C_s を変数とするスマゴリンスキーモデルによる計算結果を、通常 C_s 定数とするモデル (一様乱流の減衰問題で $C_s = 0.23$ 、チャンネル内乱流で $C_s = 0.10$) による結果と比較して示しておく。図7および図8に、一様乱流の減衰問題の計算結果として、乱流強度の減衰曲線および C_s の空間平均値 $\langle C_s \rangle$ の時間履歴を示す。

図9、図10および図11に、チャンネル内乱流の計算結

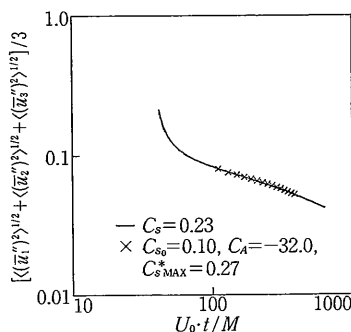


図 7 一様乱流の乱流強度の減衰曲線 ($C_{s0}=0.10, C_A=-32, C_s^* \text{MAX}=0.27$)

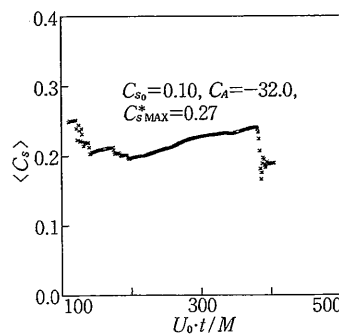


図 8 一様乱流の $\langle C_s \rangle$ の時間履歴 ($C_{s0}=0.10, C_A=-32, C_s^* \text{MAX}=0.27$)

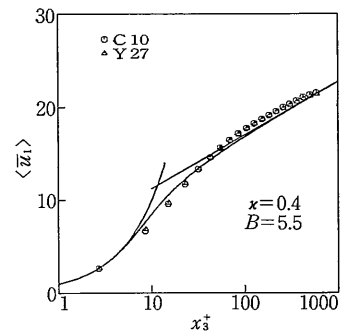


図 9 主流方向速度分布 (C10, Y27)

研 究 速 報

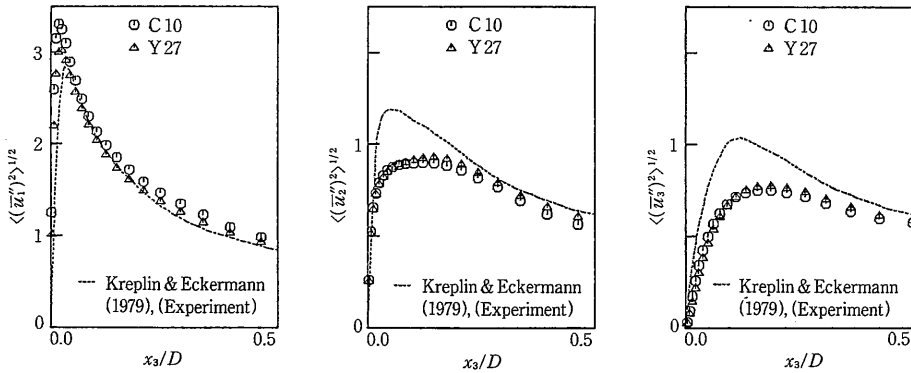


図10 GS乱流強度分布(C10, Y27)

表 2 チャンネル内乱流の計算例 ($C_{s_0}=0.1$)

CASE	MESH ($N_1 \times N_2 \times N_3$)	Δx_1	Δx_2	Δx_3	SGS model	Wall B.C
C10	$32 \times 32 \times 40$	3.2D/32	1.6D/32	0.0021D	$C_s = 0.10$ $\sim 0.0133D$	no-slip
Y27	$32 \times 32 \times 40$	3.2D/32	1.6D/32	0.0021D	$C_s^*_{MAX} = 0.27$ $C_A = -32$ $\sim 0.0133D$	no-slip
Y30	$32 \times 32 \times 40$	3.2D/32	1.6D/32	0.0021D	$C_s^*_{MAX} = 0.30$ $C_A = -28$ $\sim 0.0133D$	no-slip
Y40	$32 \times 32 \times 40$	3.2D/32	1.6D/32	0.0021D	$C_s^*_{MAX} = 0.40$ $C_A = -25$ $\sim 0.0133D$	no-slip
Y50	$32 \times 32 \times 40$	3.2D/32	1.6D/32	0.0021D	$C_s^*_{MAX} = 0.50$ $C_A = -22$ $\sim 0.0133D$	no-slip

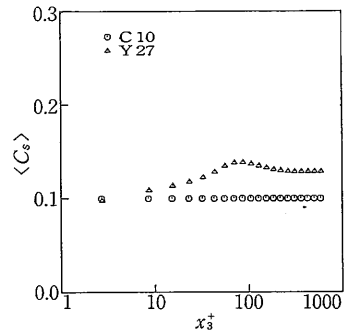


図11 $\langle C_s \rangle$ 分布 (C10, Y27)

果として、主流方向平均速度分布、GS乱流強度分布および $\langle C_s \rangle$ の分布を示す。

4. ま と め

Yoshizawa²⁾によりごく最近提案された C_s を変数とするスマゴリンスキーモデル (式(3)) を基に、種々の流れ場に適用可能なSGSモデルの構成を試みた。新たなモデルでの定数等を特定するために、従来のスマゴリンスキーモデルでの C_s 値の上端を与える一様乱流の減衰問題および C_s 値の下端を与えるチャンネル内乱流を取り上げ、双方の流れ場とも表現できるようにモデルを最適化し、モデル定数を定めた。今回の研究により、 C_s を変数とするスマゴリンモデルとして、式(1), (2), (4)

および(5)を用い、式中のモデル定数として $C_{s_0}=0.10$, $C_A=-32$, $C_s^*_{MAX}=0.27$ を用いることを提案する。

なお、本研究は科学研究費重点領域研究「数値流体力学」の援助を受けたことを付記する。

(1989年10月25日受理)

参 考 文 献

- 1) 三宅, 梶島, 機論 (B編) 53-491, 1869 (1987)
- 2) A. Yoshizawa, Phys. Fluids A1(7), 1293 (1989)
- 3) M. A-Domis, J. Fluid Mech. 104, 55 (1981)
- 4) 森西, 小林, 機論 (B編) 55-511, 615 (1989)
- 5) 森西, 小林, 生産研究 41-1, 76 (1989)
- 6) 森西, 小林, 生産研究 42-1, 47 (1990)
- 7) H-P. Kreplin and H. Eckermann, Phys. Fluids 22(7), 1233 (1979)