研究速報
特集 9
UDC 532.516：519.6

差分法によるLESについて

On LES by Finite Difference Method

堀内 潔*
Kiyosi HORIUTI

1. はじめに

ラージ・エディ・シミュレーション (以下, LES)[1] は, Deardorff[2]により, 最初に本格的に行われた. この計算は, その後, Schumann[3], Moin and Kim[4], Horiuti[5]により精密化されてきたが, 扱った流れ場は, いずれも, 平行平板間の発達した乱流場であった. この場では, チャンネル内の下流および横断方向に, 流れは一様と考えられるので, 周期境界条件を課すことができる. このため, この2方向には, Moin and Kim[4], Horiuti[5]では, フーリエ展開による高精度のスペクトル法が用いられた. チャンネル流といった比較的単純な形状では, こうした高精度のスペクトル法を用いることが可能であるが, 一般の複雑形状のLESに, スペクトル法を適用するのは, まだまだ容易ではなく, 通常の2次精度, あるいは, 高々4次精度の差分法が多く用いられている[6,7].

LESでは, すべてのスケールを含む生の変数fに, フィルター

$$\bar{f}(x_1,x_2,x_3) = \int_D \prod_{i=1}^{3} G_i(x_i - x_i')f(x_1',x_2',x_3')\,dx_1'dx_2'dx_3' \qquad (1)$$

を施すことにより, 格子スケール (GS) 成分 ($\bar{f}$), 格子以下のスケール (SGS) 成分に分離する. ここに, $G(x)$は, フィルター関数であり, 通常, ガウシアン形もしくは, トップ・ハット形[13]が用いられている. 以下, SGS成分$f-\bar{f}$をf'のように記述する. ナビエ・ストークス方程式, および, 連続の方程式に, このフィルターを施すことにより, 速度u_i, 圧力pのGS成分$\bar{u}_i$, $\bar{p}$にたいする支配方程式

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j}) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\Delta \bar{u}_i \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (3)$$

を得る. 本速報では, チャンネル流れを考え, $i=1\ (x)$は下流方向, $i=2\ (y)$は壁に垂直な方向, $i=3\ (z)$は横断方向を表す. (2)式中のτ_{ij}は, レオナード項 ($L_{ij}=\overline{\bar{u}_i\bar{u}_j}-\bar{u}_i\bar{u}_j$), クロス項 ($C_{ij}=\overline{\bar{u}_i u_j'+u_i'\bar{u}_j}$), および, SGSレイノルズ応力項 ($R_{ij}=\overline{u_i'u_j'}$) から成る. ガウシアン・フィルターと併用したスペクトル法では, L_{ij}は直接計算できる. これは, (1)式のconvolutionの計算が, フーリエ空間では, ガウシアン・フィルターのフーリエ変換 (やはり, ガウシアン形) とfのフーリエ変換の単純な積で書き表せるという事実による. R_{ij}の近似には通常スマゴリンスキー・モデル[1-5]が用いられているが, 過去の計算[4,5]では, C_{ij}は無視されてきた.

ところで, 近年の電子計算機のめざましい発達は, スペクトル法による直接シミュレーション (DNS) を可能にした. このデータ・ベースを用いたLESにおける乱流モデリングの直接的な検証[8-12]は, 過去の近似の誤まり, 特に, C_{ij}の無視が, DNSとの相関, および, 乱流強度といった統計量の精度を, 落とすことを明らかにした. C_{ij}のモデルとしては, Bardina[9]によるモデルがある. これは,

$$C_{ij} \sim \bar{u}_i(\bar{u}_j - \bar{\bar{u}}_j) + (\bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i)\bar{\bar{u}}_j \qquad (4)$$

$$R_{ij} \sim (\bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i)(\bar{u}_j - \bar{\bar{u}}_j) \qquad (5)$$

$$C_{ij} + R_{ij} \sim \bar{u}_i\bar{u}_j - \bar{\bar{u}}_i\bar{\bar{u}}_j \qquad (6)$$

のように近似するが, ガウシアン・フィルターを, スペクトル法と併用した場合には, 前述のように, 直接計算することが可能である. これにたいし, 一般の2次精度の差分法では, 打ち切り誤差がL_{ij}に対応し[13,14], 陰的にL_{ij}の近似を含み, C_{ij}を考慮していない. したがって, 差分法におけるC_{ij}のモデルの導入は, より精度の高いLESを行うためには, 必要なことと考えられる. 本速報は, Bardinaモデルの差分法によるLESへの導入を論じるものである.

2. レイノルズ応力の非等方表現とBardinaモデル

本節では, まず, チャンネル流のDNSのデータ・ベースを用いたLES乱流モデルの検証を行う. データ・ベー

*東京大学生産技術研究所 第1部

スの計算には，フーリエ・チェビシェフ多項式展開を用い，格子点数は，x，y，z方向におのおの，128，129，128とした．このデータに，x，z 2方向には，ガウシアン・フィルターを，y方向には，トップ・ハット・フィルターを施すことにより，GS成分，および，SGS成分に分離した．この際，フィルターの特性長さは，x，z方向には，DNSデータの格子幅の4倍，y方向には，2倍とした．このデータを用いて，L_{ij}，C_{ij}，R_{ij}の各項の厳密値とモデル値を算出し，その相関係数等により，モデルの忠実度を検討した．この結果，まず，Bardinaモデルは，C_{ij}を非常に良く近似することがわかった[12]．図1は，L_{12}と$C_{12}{}^B$と$R_{12}{}^B$(おのおのBardinaモデルによるC_{12}，R_{12}のモデル値)，$R_{12}{}^S$(スマゴリンスキー・モデルによるR_{12}のモデル値) 等との相関係数 (C.C.)，および，rms値の比 (R.R.) を示す．この図より，$C_{12}{}^B$とL_{12}は，強い負の相関を持ち，rms値も非常に近いことがわかり，ほとんど，打ち消し合っていることがわかる．テイラー展開を用いることにより，L_{ij}と$C_{ij}{}^B$は次のように近似できる．

$$L_{ij}\sim\frac{\Delta^2}{24}\bar{u}_i\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\bar{u}_j+\frac{\Delta^2}{24}\bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\bar{u}_i+\frac{\Delta^2}{12}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_k}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_k}+0\,(\Delta^4) \tag{7}$$

$$C_{ij}{}^B\sim-\frac{\Delta^2}{24}\bar{u}_i\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\bar{u}_j-\frac{\Delta^2}{24}\bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\bar{u}_i \tag{8}$$

ここに，Δは格子間隔を示し，おのおのの展開の最初の2項は，同じ形で反対の符号をもっている．これが先述の強い負の相関の原因であるが，注意すべきは，両者を足し合わせたとき，ガリレイ不変性 (G.I.)[15]を破る項が消去される点である．さらに，残りの項は，いわゆるレイノルズ応力の非等方表現の一部に相当する．この項は，図1からもわかるように，SGSレイノルズ応力の大きさと比べ無視できない大きさをもっている．さらに，これらは，Δ^2のオーダーの項であり，スマゴリンスキー・モデルによる項と同じオーダーであるので，これらの項を無視する積極的な理由はない．

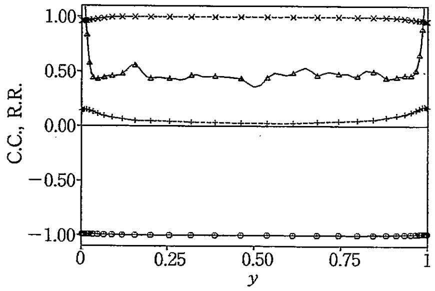

図1　$C_{12}{}^B$とL_{12}のC.C. (—⊖—)，R.R. (--×--) $L_{12}+C_{12}{}^B$とL_{12}のR.R (--+--)，$R_{12}{}^B+R_{12}{}^S$と$L_{12}+C_{12}{}^B$のR.R. (—△—)

3．Bardinaモデルの差分法への導入

Bardinaモデルの差分法への導入には，いくつかの方法が考えられるが，一つの方法は，(7)，(8)式のテイラー展開を直接近似する方法である．しかし，この方法では，たとえば，壁での境界条件を考えると，整合性が完全にとれるとは言えない．むしろ，L_{ij}および$C_{ij}{}^B$は，フラックス形式で書かれることに注目し，この性質を利用したほうが良い．この場合，たとえば，壁では，$\bar{u}_i=\bar{\bar{u}}_i=0$となるので，境界条件の与え方も，このほうが容易である．この方法を採用するには，$\bar{u}_i$から$\bar{\bar{u}}_i$を適当に定義しなくてはならない．ところで，2次の中心差分が，その差分をとる区間で，トップ・ハット・フィルターを施すことに相当するのはよく知られている[13,14]．したがって，ここでも，$\bar{\bar{u}}_i(x)$を，$\bar{u}_i(x-\Delta x)$，$\bar{u}_i(x)$，$\bar{u}_i(x+\Delta x)$を使って適切に定義することにした．その結果，G.I.の観点から，シンプソン則が最も適切であることがわかった．したがって，L_{ij}，$C_{ij}{}^B$を近似するスキームは，次のようになる：

$$\frac{\partial}{\partial x_j}L_{ij}\sim L_xL_z\frac{\delta^{(4)}}{\delta x^{(4)}}(\bar{u}_i\bar{u}_j)-\frac{\delta^{(4)}}{\delta x^{(4)}}(\bar{u}_i\bar{u}_j), \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}C_{ij}\sim\frac{\delta^{(4)}}{\delta x^{(4)}}(\bar{u}_i\bar{u}_j-\bar{\bar{u}}_i\bar{\bar{u}}_j), \tag{10}$$

$$\bar{\bar{u}}_i=L_xL_z\bar{u}_i, \tag{11}$$

$$L_x\bar{u}_{i,k}=(\bar{u}_{i,k-1}+4\,\bar{u}_{i,k}+\bar{u}_{i,k+1})/6 \tag{12}$$

ここに，$\delta^{(4)}(\bar{u}_i\bar{u}_j)/\delta x^{(4)}$は，運動量，および，エネルギーを保存する4次精度のArakawa form[20]を示し，$\bar{u}_{i,k}$は，x方向にk番目の格子点での第i成分の速度を示す．このスキームの長所は，前述のように，たとえば，壁では，$\bar{\bar{u}}_i=0$という自然境界条件が使えること，および，計算機プログラムへの導入が容易な点にある．ここでは，連続の式，および，圧力勾配の項も4次精度の中心差分を用いて近似している点に留意されたい．ただし，渦粘性係数を含む残りの項は，以下の計算例では，2次精度としている．このスキームは，Δ^2のオーダーまで，テイラー展開(7)，(8)と全く同じ打ち切り誤差を与える．ほかにも，10種類以上におよぶスキームを試みたが，このスキームが最良の結果を与えたので，採用した．ところで，これらのスキームの優劣は，打ち切り誤差の，GSエネルギー・バランス中での振る舞いで，評価できる．それは，打ち切り誤差が，同バランス中では，たとえば，$\langle(\partial\bar{u}/\partial x)^3\rangle$といったderivative skewnessで表現でき，これらは，せん断乱流中では，零以外の正負の値をとるからである[13,14]．種々のderivative skewnessのうち，特に，$-\langle\partial\bar{u}/x\cdot\partial\bar{v}/\partial x\cdot\partial\bar{u}/\partial y\rangle$の項が最も重要な貢献を

していることが明らかになった[21]．この項は，GSエネルギーの生成項$(-\langle \overline{u}''\,\overline{v}\rangle \partial \overline{u}/\partial y)$に近い項であり，特に，壁際のsublayerからbuffer layerにかけては，正の値をとり，エネルギーの生成に貢献している（ここに，$\overline{u}''$は，$\overline{u}$の$x-z$面内平均からのずれを示す）．これらのlayerでは，いわゆる縦渦の発生に伴う乱流エネルギーの生成が激しく起きることが良く知られている．一方，一般に，derivative skewnessは，渦の伸長に関係していることは，良く知られており[13,14]，こうした秩序構造と，関連している項と考えられる．他のスキームの失敗は，derivative skewnessによるGSエネルギーの生成，あるいは，散逸が大きすぎることによる．

不等間隔メッシュへの本スキームの適用には，シンプソン則による積分を，ラグランジュ補間による積分に置きかえる等の補正が必要である．同時に，Bardinaモデル自体にも補正が必要である．

4．計　算　結　果

スキーム（9）～(12)を用いた結果を，他のスキームによる結果と比較する．チャンネル幅と，壁面摩擦速度で定義したレイノルズ数（Re）は1280とし，格子点数は，64×62×64とした．基本的な数値計算法はHoriuti[5]と同一である．ここでは，4つのケースについて報告する．ケース1は，Horiuti[5]と同一のデータであり，スペクトル法をガウシアン・フィルターと併用し，レオナード項のみ導入している．ケース2は，すべて2次の中心差分を用い，Bardinaモデルは導入していない．したがって，陰的に，レオナード項を含む．ケース3は，ケース1に，Bardinaモデルを導入した場合，ケース4は，新しいスキーム（9）～(12)を用いた場合である．ただし，いずれのケースでも，y方向には，2次精度の（不等間隔）中心差分を用い，この方向には，Bardinaモデルを導入していない．また，すべての場合に，SGSレイノルズ応力の近似のためには，スマゴリンスキー・モデルが付加されている．

図2は，GSエネルギーの壁近傍のy分布を示す．（a），（b）は，おのおの，下流，および壁に垂直な成分である．（a），（b）のいずれにおいても，ケース1，2とケース3，4との2つのグループに分けることができる．ケース1は，スペクトル法を用い，多大の計算時間を要するが，残念ながら，その結果は，ケース2にくらべ，必ずしも改善されているとは言えない．また，ケース3と4にも，著しい相違は見いだされない．実験との比較から，後者のグループ，すなわちBardinaモデルを導入したほ

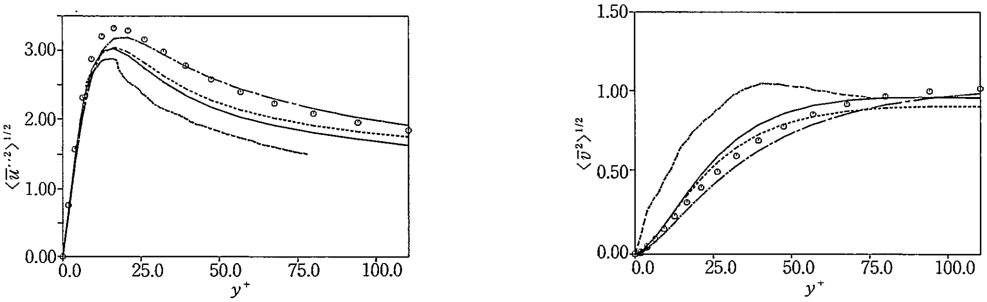

図2　壁近傍の乱流強度の分布　（a）下流方向成分　（b）垂直方向成分　○，ケース1；－・－，ケース2；------，ケース3；——，ケース4；……，実験データ[22]

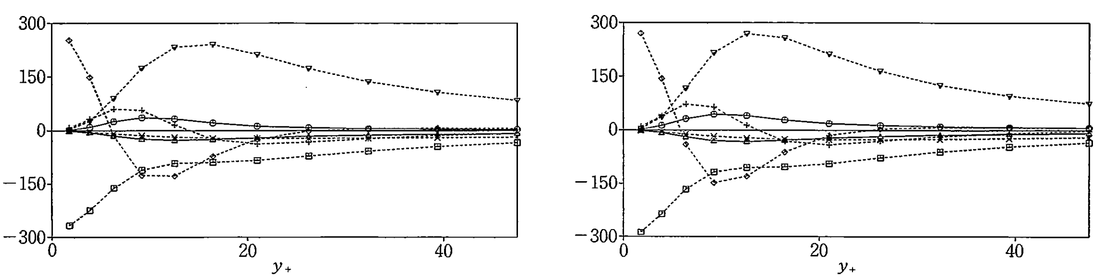

図3　GS乱流エネルギー下流方向成分のバランス
（a）ケース3　（b）ケース4　－△－，レオナード項による散逸；－○－，Bardinaモデルによる生成；--▽--，生成項；--＋--，輸送項；--×--，velocity-pressure gradient；--◇--，拡散項；--□--，散逸項

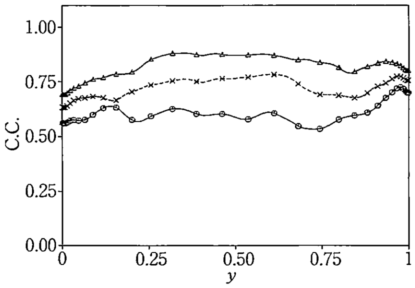

図4　ダイナミック・テストの相関係数のy分布
—⊖—, フィルターをかけたDNSデータとLESのケース1におけるC.C.; —△—, ケース3; --×--, ケース4

うが，壁付近での立ち上がりがより良い，および，乱流強度のピーク位置がより壁に近い等の点で，改善されている．したがって，過去のケース1の欠点が解消されていることがわかる．図3は，GS乱流エネルギーの下流方向成分のバランスである．(a)，(b)はおのおのケース3，4からのものであるが，両者はほぼ同一であり，新しいスキーム(9)～(12)は，レオナード項，および，Bardinaモデルを忠実に近似していることがわかる．ちなみに，ケース4に要する計算時間は，ケース3の半分であり，顕著な節約となっている．このエネルギー・バランスで注目すべきは，レオナード項がエネルギーの散逸をしているのにたいし，Bardinaモデルによる項は，特に，y_+～10の近辺で，エネルギーの生成として機能しており，この領域ではエネルギーの"backscaffering"を行っている点である．この点は，前述の derivative skewnessと密接に関連している．最後に，"厳密" 解との相関を測るdynamicなテストによって，スキームの精度を検証する[12]．図4は，無次元時間で0.225経過した時点での相関係数のy分布で，ケース4は，ケース1より高い相関を保持しているが，ケース3に比べると，やや低い相関となっている．これは，4次精度差分は，高波数成分にたいする精度が，スペクトル法に比べると低いこと，および，粘性項の計算に，2次精度を用いたことによると考えられる．

5．ま と め

LESにおけるレオナード項とBardinaモデルの役割を論じ，レオナード項のみの導入は，計算精度を落とすことを明らかにした．さらに，差分法によるLESへの，両者の適切な導入を図る，新しいスキームを提案した．このスキームは，2次精度の打ち切り誤差まで正確に両項を近似し，スペクトル法とガウシアン・フィルターを併用した計算と，統計量のレベルでは，ほぼ，同じ精度が出せ，大幅な計算時間の軽減が図れることを示した．不等間隔メッシュへの適用については，紙面の関係で，別の機会にゆずる．

(1989年10月9日受理)

参 考 文 献

1) Reynolds, W.C., Ann. Rev. of Fluid Mech., 8, 183 (1976)
2) Deardorff, J.W., J. Fluid Mech., 41, 453 (1970)
3) Schumann, U., J. Comp. Phys., 18, 376 (1975)
4) Moin, P. and Kim, J., J. Fluid Mech., 118, 341 (1982)
5) Horiuti, K., J. Comp. Phys., 71, 343 (1987)
6) 生産研究，乱流の数値シミュレーション (NST) 特集号，その1～その5 (1985～1989)
7) IIS Ann. Report on Num. Simulations of turb. flows, No. 1～3 (1986～1988)
8) Clark, R.A. et al., J. Fluid Mech., 91, 1 (1979)
9) Bardina, J., Ph. D. dissertation, Stanford Univ. (1983)
10) Speziale, C.G. et al., Phys. Fluids, 31, 940 (1988)
11) Piomelli, U. et al., Phys. Fluids, 31, 1884 (1988)
12) Horiuti, K., Phys. Fluids, A 1, 462 (1989)
13) Leonard, A, Adv. Geophys., 18A, 237 (1974)
14) 堀内　潔，生産研究，第38巻，第1号，35 (1986)
15) Speziale, C.G., J. Fluid Mech., 175, 459 (1987)
16) Leslie, D.C., "Developments in the theory of furbulence"., Clarendon Press, Oxford (1973)
17) Yoshizawa, A., Phys. Fluids, 27, 1377 (1984)
18) Speziale, C.G., J. Fluid Mech., 175, 459 (1987)
19) Nisizima, S. and Yoshizawa, A., AIAA J. 25, 414 (1987)
20) Arakawa, A., J. Comp. Phys., 1, 119 (1966)
21) Horiuti, K., Proc. Int. Symp. Comp. Fluid. Dyn. Nagoya, Aug. 28-31, p. 233 (1989)
22) Kreplin, H. and Ecklemann, M., Phys. Fluid, 22, 1233 (1979)