

非等方 $k-\epsilon$ モデルによる後方ステップ流の数値解析

Numerical Simulation of the Flow Past a Backward-Facing Step Using an Anisotropic $k-\epsilon$ Model

小 林 敏 雄*・大 町 真 義*・明 賢 國*
Toshio KOBAYASHI, Masayoshi OHMACHI and Hyon Kook MYONG

1. は じ め に

広く用いられている $k-\epsilon$ モデルは、剪断流のような、一つの応力成分のみが支配的である流れに対しては、よい数値予測を与える。しかし、流れの問題における主要な要素である、剥離・再循環を伴う流れのような場合には、満足する結果を得られないことが少なくない。これに対しては、従来より、流線曲率の影響の面からのアプローチがなされてきた。その一方、最近になって、通常の $k-\epsilon$ モデルの基礎になっている等方渦粘性モデルそのものに問題があるとの立場から、これに代わる非等方モデルが提案され、幾つかの流れの問題に適用されつつある¹⁾⁴⁾。

本報では、剥離・再循環を伴う流れのベンチマークとして多くの実験・数値計算が行われてきた後方ステップ流を対象として取り上げ、異なるモデル定数系を用いた計算を実行してその効果の評価を行うと共に、非等方 $k-\epsilon$ モデルを適用して、計算結果を等方 $k-\epsilon$ モデルによる結果および実験結果 (Kim et al.)⁵⁾ と比較・検討した。さらに、運動量方程式の対流項スキームの違いが結果に与える影響についても考察を行った。

2. 基 礎 式

非圧縮性流体における連続の式および運動量方程式は、以下のとおりである (定常流の場合)。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \quad (2)$$

ただし、 i 方向の平均速度を U_i で、変動成分を u_i で表した。

今回使用した非等方モデルの場合、(2)式に現れるレイノルズ応力テンソル $\overline{u_i u_j}$ は、高レイノルズ数領域において、

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} = & \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ & + \frac{k}{\epsilon} \nu_t \sum_{m=1}^3 C_m \left(S_{mij} - \frac{1}{3} S_{m\alpha\alpha} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

とモデル化される (Myong³⁾)。 (3)式右辺第3項が⁵⁾、等方モデルに付加された非線形項である。ここで C_m ($m=1, 2, 3$) はモデル定数、 δ_{ij} はクロネッカのデルタであり、

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$$

$$\epsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

$$S_{1ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \frac{\partial U_j}{\partial x_m}$$

$$S_{2ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_m}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + \frac{\partial U_m}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right)$$

$$S_{3ij} = \frac{\partial U_m}{\partial x_i} \frac{\partial U_m}{\partial x_j}$$

である。渦粘性係数 ν_t は、

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (4)$$

により与えられる (ここで(4)式を(3)式に代入すれば、Nisizima & Yoshizawaによるモデルと形式上一致することに言及しておく¹⁾)。さらに、 k および ϵ は、次の輸送方程式を解くことにより求める。

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} - \overline{u_i u_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \epsilon \quad (5)$$

$$\begin{aligned} U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right\} - C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i u_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ & - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (6)$$

今回行った計算の各caseと、対応する計算条件を表1に、後方ステップ形状および計算領域を図1に示す。代表長さならびに代表速度は、それぞれ、ステップ高 h と入口中心部速度 U_0 にとり、これらを基準としたレイノルズ

*東京大学生産技術研究所 第2部

研究速報

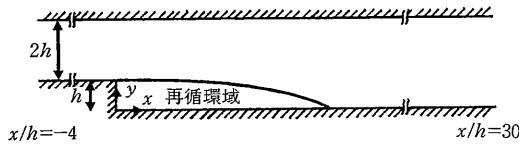


図1 後方ステップ形状および計算領域

表1 計算条件

計算ケース	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
乱流モデル	等方 $k-\epsilon$ モデル		非等方 $k-\epsilon$ モデル ³⁾		
モデル定数	LS ^{*1}	MK ^{*2}	LS	MK	
運動量方程式の対流項	ハイブリッド				skew upwind

* 1 : $C_\mu=0.09, C_{\epsilon 1}=1.44, C_{\epsilon 2}=1.92, \sigma_k=1.0, \sigma_\epsilon=1.3$

* 2 : $C_\mu=0.09, C_{\epsilon 1}=1.4, C_{\epsilon 2}=1.8, \sigma_k=1.4, \sigma_\epsilon=1.3$

非等方項のモデル定数

$$C_1=0.8, C_2=-2.0, C_3=-0.15$$

共通部分

差分格子	スタガード	流入条件	速度 k, ϵ	実験値 ⁵⁾
時間スキーム	定常解法	流出条件	k, ϵ	実験値より推定
圧力解法	SIMPLE	壁面条件	速度 k, ϵ	壁法則
スカラー方程式の対流項	ハイブリッド	壁面条件	k, ϵ	壁法則に基づく補正
格子数	160×50			

数は46000とした。

3. 計算結果

各計算caseの結果より作成した流線図を図2に示す。いわゆる標準 $k-\epsilon$ モデルに対応するCase 1の場合、再付着距離 $x_R/h \approx 5.8$ となり、実験値 $x_R/h = 7.0$ (中心値)に比べ、20%近く小さく予測されている。これに対し、Case 2, 3, 4, 5の場合は、それぞれ $x_R/h \approx 6.4, 6.2, 6.8, 6.8$ となり、定数系についてはMK⁶⁾のほうがLS⁷⁾より、また、等方/非等方の別では非等方のほうが等方より、実験値に近い予測を与えることが示される。とくに、MK+非等方のCase 4, 5では、実験値に非常に近い値を得た。再付着距離の予測の改善における、モデル定数の寄与と非等方モデルの導入による寄与とは同程度であるが、モデル定数の寄与のほうがやや大きかった。また、運動量方程式の対流項スキームの差異による影響は、流線パターンや再付着距離に関する限りほとんど見られない(Case 4と5を比較)。

次に、平均速度分布 U/U_0 の計算結果を図3に示す。図3では、等方/非等方の差異に注目するために、同じMKの定数系を用いたCase 2とCase 4の比較を行っている。

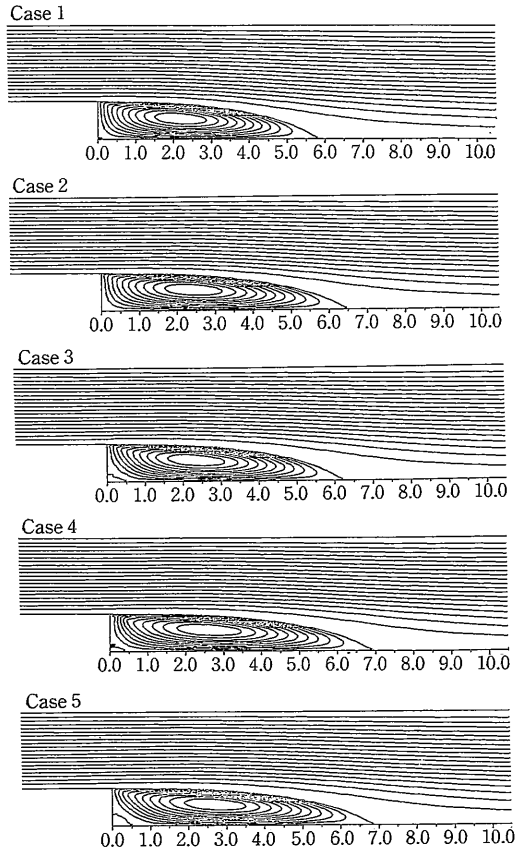


図2 流線図

ただし、再付着点近傍の $x/h = 6.22$ においては全caseの結果を示す。全般的傾向としては、再付着点近傍を除けば各case間の差は小さく、ほぼ同様の分布を示している。 $x/h = 2.67, 6.22$ の各断面における速度分布を見ると、壁面近傍($0 \leq y/h \leq 0.1$)および、再循環域外では非等方のほうが実験値に近い一方、再循環の境界付近では等方のほうが実験値に近いという傾向が認められる。再付着点近傍の $x/h = 6.22$ では、標準 $k-\epsilon$ に対応するCase 1の場合、予測した再付着距離を超えるため、逆流が全く見られない。他方、MK+非等方のCase 4, 5では、再付着距離の正しい予測を反映して、はっきりした逆流域が認められる。なお、流線から予想されるように、ここでも、スキームの差による影響はほとんどない。再付着点後方の $x/h = 10.66, 13.33$ では、必ずしも実験結果とよく一致しないが、この傾向は他の計算例でも見られ^{8),9)}、実験の3次元性の面から説明がなされている。これらの断面では、等方モデルによるCase 2のほうが、非等方モデルによるCase 4より、やや実験値に近いものの、下流に行くにしたがって両者の差は縮まり、 $x/h = 13.33$ ではほぼ一

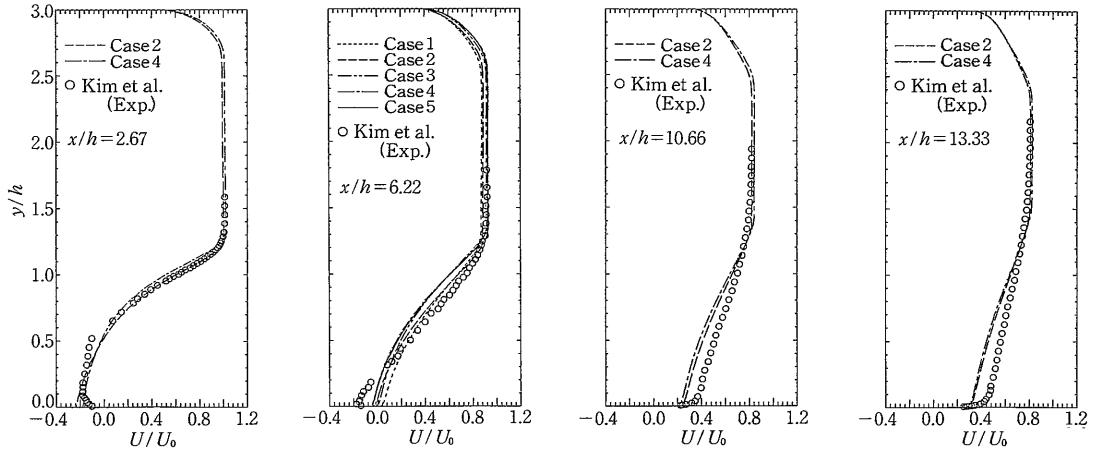


図3 平均速度分布

致する。このことは、発達乱流においては非等方項が速度場に影響を及ぼさないということと符合する。

以下、乱流量のプロファイルについて見る。乱流量の実験値は、再循環域内ではデータの信頼性の問題から与えられていないため、再付着点より下流の断面についてのみ記入してある。まず、乱流強度分布 $(\overline{uu})^{1/2}/U_0$ を図4に示す。非等方モデルの場合、(3)式右辺の非線形項がノーマル応力の差に寄与するため、主流方向乱流強度については、どの断面でも、非等方の各caseにおけるピークが、等方のcaseにおけるピークを上回っている。モデル定数の影響では、一般に、LSのほうがMKより大きく予測する傾向がみられる。これは、乱流剪断応力 \overline{uw}/U_0^2 や k/U_0^2 の分布についても言えることである。実験値との比較では、非等方の場合、乱流強度を過大評価、等方の場合、過小評価する傾向にあるが、再付着点近傍 $x/h =$

7.67では、対流項スキームの影響がかなり顕著にみられ、skew upwindを用いたCase 5が、等方のcaseや、非等方の他のcaseに比べ実験値に近い予測を与える。次に \overline{wv}/U_0^2 の分布を図5に示す。ここでは、モデルによる差は小さい。これは、剪断応力に関しては、等方モデルでもよい結果が得られ、非等方モデルはその長所を失わぬよう構成されたことを考えれば不思議ではない。なお、この場合でもskew upwindは、再付着点近傍で、分布を実験値に近づける効果を持つ。最後に、 k/U_0^2 の分布を図6に示す。再付着点より上流の $x/h = 2.33$ および 4.11 の分布に着目すると、再付着距離 x_R/h を最も小さく予測したCase 1のピークが最も大きく、 x_R/h の大きいCase 4, 5のピークが最も小さく、 x_R/h が両者の中間であるCase 2, 3がピークも中間に位置している。再循環域内での信頼できる k の実験データがないため、厳密な議論は困難

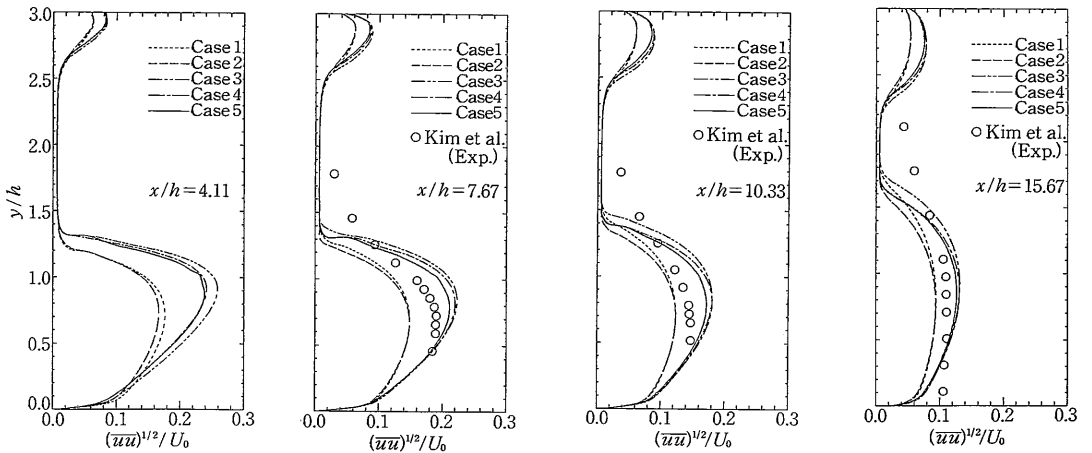


図4 主流方向乱流強度分布

研 究 速 報

であるが、以上の考察より、Case 4, 5では、標準 $k-\epsilon$ の Case 1における、再循環域内での k の過大評価が修正されたため、 x_k/h の適切な予測が可能になったものと推測される。

4. 結 論

本計算により、ここで取り上げた対象のような、レイノルズ応力の非等方向性が重要な役割を担う流れでは、非等方モデルからのアプローチが有効であることが示された。以下に、得られた結果をまとめておく。

再付着距離は、いわゆる標準 $k-\epsilon$ モデルの場合、実験値より20%近く小さく予測するが、MKの定数系、あるいは非等方モデルを用いることにより改善される。とくに両者を組み合わせた場合、実験値に非常に近い値が得られ

る。モデル定数の影響では、一般に、等方、非等方も、LSのほうがMKより、主流方向乱流強度、乱流剪断応力、乱流エネルギーを大きく予測する。運動量方程式の対流項スキームの影響は、平均量に関してはほとんど見られなかったが、乱流強度、乱流剪断応力の場合には、非等方モデルとハイブリッド法を組み合わせたときより、skew upwindを組み合わせたときのほうが、とくに再付着点近傍においてよい予測を与える。乱流剪断応力では、モデル間で大きな差は見られないが、乱流強度では、非等方+MK+skew upwindのcaseが、本報における他の計算caseと比較して、相対的に予測精度が高かった。再付着距離の予測の改善は、再循環域内の乱流エネルギーの予測の改善によるものと推測される。

(1989年10月25日受理)

参 考 文 献

- 1) Nisizima, S. & Yoshizawa, A., AIAA J., 25, p. 414, 1987.
- 2) Speziale, C.G., J. Fluid Mech., 178, p. 459, 1987.
- 3) Myong, H.K., Dr. Eng. Thesis, Univ. of Tokyo, 1988.
- 4) Speziale, C.G. & Ngo, T., Int. J. Eng. Sci., 26, p. 1099, 1988.
- 5) Kim, J., Kline, S.J. & Johnston, J.P., Technical Report MD-37, Thermosciences Div., Dept. of Mechanical Engineering, Stanford University, 1978.
- 6) 明・笠木, 機論, 54-507, B, p. 3003, 1988.
- 7) Launder, B.E. & Spalding, D.B., Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 3, p. 269, 1974.
- 8) Celenigil, M.C. & Mellor, G.L., J. Fluids Eng., 107, p. 467, 1985.
- 9) Avva, R.K., Kline, S.J. & Ferziger, J.H., AIAA Paper 88-0611, 1988.

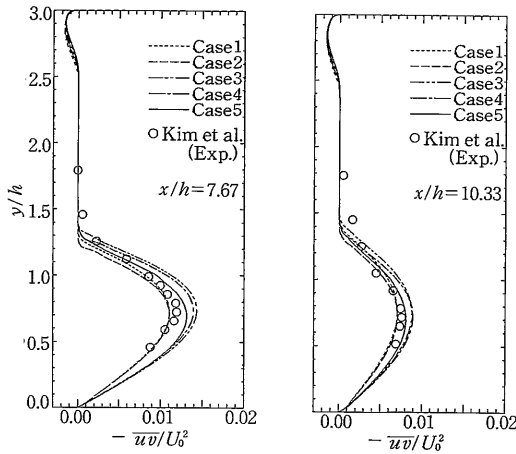


図 5 乱流剪断応力分布

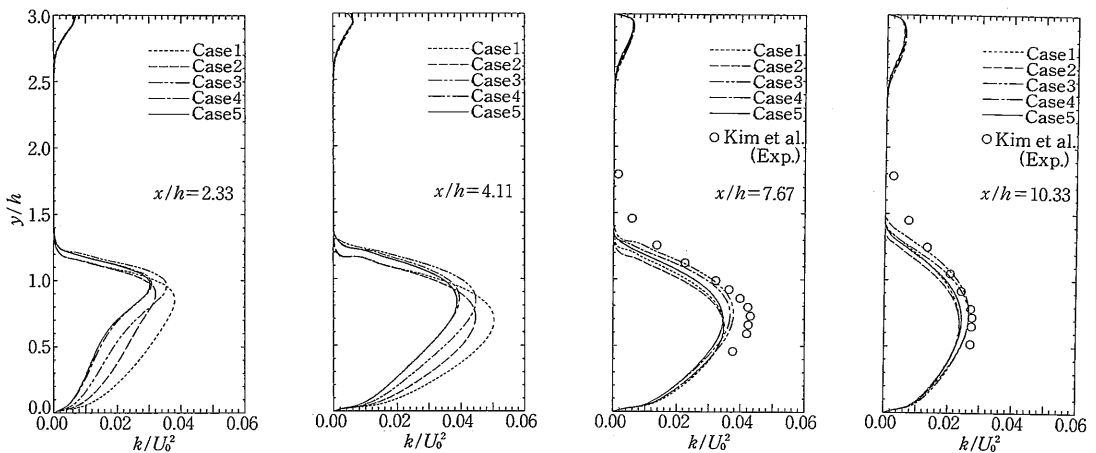


図 6 乱流エネルギー分布