

摩擦速度が 0 になるときの $k-\epsilon$ モデルの解

An Asymptotic Solution for Zero Wall Stress

竹 光 信 正*

Nobumasa TAKEMITSU

1. 諸 言

摩擦速度 u_τ が 0 になる, あるいは 0 に近いときの乱流境界層の研究の歴史は思いのほか古いようである。しかし, (著者の無知であるが) u_τ が 0 になるときの $1/2$ 乗則の速度分布は, 対数速度分布ほど著名でないためにその存在があまり知られていなかったように思われる。とくに, $k-\epsilon$ モデルの境界条件として $1/2$ 乗則の速度分布を使った例は見受けられない。これは, $k-\epsilon$ モデルの境界条件として考える場合には, 速度分布のみならず, 乱流エネルギー k やエネルギー散逸率 ϵ の分布がわからないと使えないためと思われる。

すでに著者は, u_τ が 0 の場合には $k-\epsilon$ モデルは壁関数とは異なる漸近解をもつことを示した¹⁾が, これを実際に境界条件として使うためにはその中に含まれているモデル定数を決めなければならない。本稿は, この普遍的なモデル定数を決めようとするものである。

2. $u_\tau = 0$ のときの $k-\epsilon$ モデルの解

$u_\tau = 0$ のときの速度分布の漸近解を最初に (理論的に) 導いたのは Stratford^{2),3)} である。その後, Townsend⁴⁾⁻⁶⁾ がもう少し詳しい解析をおこなった。その結果によると, 速度分布は, Fig. 1 のように座標系をとると

$$U = U_0 + 2\sigma_1 (Gy)^{1/2} \tag{1}$$

$$G = \alpha (+U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x}), \quad \alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{2a,b}$$

と書ける。ここで, σ_1 はモデル定数で

$$2\sigma_1 = 3.70 \text{ (Stratford)}, \tag{3a}$$

$$= 3.92 \sim 4.44 \text{ (Townsend)} \tag{3b}$$

のように決められている。また, U_0 はすべり速度で

$$U_0 = \text{const.} (\nu\alpha)^{1/3} \text{ (Stratford)} \tag{4a}$$

$$= (u_\tau/x) \{ \ln(4u_\tau^3/\nu\alpha) + A - 2(1-B) \} \text{ (Townsend)} \tag{4b}$$

$$A = 5\kappa, \quad B = 0.2$$

のように与えられている。

その後, Perryら⁷⁾, Perry⁸⁾, Sandborn and Liu⁹⁾, McDonald¹⁰⁾, Kader and Yaglom¹¹⁾, Schofield¹²⁾等によって次々に検討が加えられた。結果的には, 式(1)の形の速度分布の存在を肯定するものが圧倒的に多いが, 否定するものもある。また, U_0 の形についても種々提案されている。実験的にも, Clauser¹³⁾; Schbauer and Klebanoff¹⁴⁾, Bradshaw¹⁵⁾, Perryら⁷⁾, Samuel and Joubert¹⁶⁾, Simpsonら¹⁷⁾等, 実に多くの人が研究をおこない, 式(1)の形の速度分布が成り立つとかそうでないとか, 種々議論があったようである。最近の研究^{16),17)}では, 実験的には式(1)の形の速度分布の存在は否定されているようである。その理由として, Reynolds応力の分布が実験と理論で一致しないこと, うず粘性近似がよくないこと等が挙げられている。

さて, 著者は式(1)の形の速度分布の存在を信じている者の一人である。それは次の理由による。

(i) Fig. 2はReynolds応力 R_{12}

$$R_{12} = u_\tau^2 + Gy, \quad G = \alpha + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} \tag{5}$$

と実験結果¹⁶⁾を比較したものである。この図をみると, 実験値と理論の基礎になっているReynolds応力の分布とは比較的良好一致している(なお, Samuel

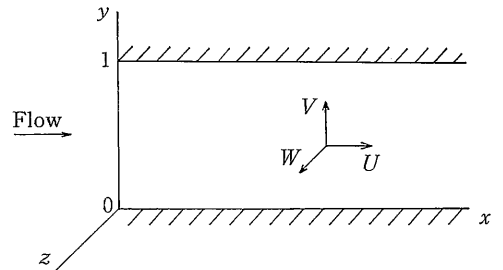


Fig. 1 座標系の定義

*東京大学生産技術研究所 第1部

研 究 速 報

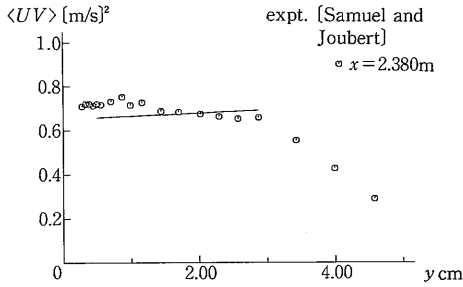


Fig. 2 Reynolds応力 (○ : 実験¹⁶⁾, - : 式(5))

とJoubert¹⁶⁾の指摘では、CebeciとSmithによるモデルを使うと実験と計算の一致はよくない。

(ii) k - ϵ モデルによる解はアンサンブル平均の量である。したがって、 u_x が0近傍の細かい変動を求めることはできない。しかも、通常Reynolds応力の等方性やうず粘性近似を前提としている。したがって、Reynolds応力の非等方性が大きくきくところや、うず粘性近似の成り立たないところ (たとえば、 $\partial U / \partial y = 0$ のところ) では近似が悪くなるのは当たり前である。

しかしながら、 $u_x = 0$ 近傍の流れは $u_x = \text{const.}$ の場合の流れと異なり、たとえば乱流エネルギーのバランスをみた場合、発生項や消滅項のみならず拡散項が重要な役割を果たす¹⁵⁾といった基本的なことは、等方性の k - ϵ モデルでも十分表現できる。

(iii) (実験的or理論的に) 得られた速度分布は、領域の広さを問わなければ、どのような関数形で近似することも可能である。したがって、重要なことは、その理論的根拠の明確さである。著者が示したように、速度分布(1)は k - ϵ モデルを使って導くことが可能であり、したがって、根拠も明確である。

細かいことは著者の論文¹⁵⁾にゆずるとして、速度分布(1)に対応する乱流エネルギー k 、エネルギー散逸率 ϵ 、うず粘性率 ν_e 、Reynolds応力 R_{12} は k - ϵ モデルの解として

$$k = \tau_1 G y, \quad \epsilon = C_\nu \sigma_1 \tau_1^2 C^{3/2} y^{1/2},$$

$$\nu_e = (1/\sigma_1) G^{1/2} y^{3/2}, \quad R_{12} = G y \tag{6a-d}$$

と書ける。解(6)は(5)において

$$u_x^2 \ll |G| y \tag{7}$$

としたときの k - ϵ モデルの漸近解の初項になっている。

3. モデル定数の決定

式(1)、(6)における普遍的なモデル定数は σ_1 と τ_1 である。この二つのモデル定数を決めるために、ここではSchbauerとKlebanoff¹⁴⁾の実験データを使うことにする。この実験データは1951年に得られたもので、今からみるとずいぶん古い。しかし、あえて彼らのデータを使う理由は、

(i) データの信頼性が高い。

(ii) 同一の点で速度分布、Reynolds応力、乱流エネルギーを測定している。

ことによる。(i)に関しては、現在でも得られるデータには不確かさがあるが、当時の測定装置の事情を考えると(実験にうとい著者には)すばらしい精度のように思える。また、データを解析する立場からすると、とくに(ii)のことは重要である。この点、たとえば、Simpsonら¹⁷⁾のデータにはこの認識がうすいのか、必ずしも同一の点で測定されていない。したがって、どんなに精度のよいデータであっても解析には使いにくい。

Fig. 3はSchbauerとKlebanoff¹⁴⁾の実験装置の概略を示す。この実験は、 $x = 7.77 \sim 7.92\text{m}$ の間ではく離($u_x = 0$)を起こしており、基準点 $x = 5.33\text{m}$ (17.5ft)における R_e 数は 1.4×10^7 であり、最近の実験^{16), 17)}に比べるとかなり高い(文献16), 17)の実験は $R_e = 7.4 \times 10^4 \sim 1.7 \times 10^6$ 程度)。また、この流れの基準点以降の圧力勾配は常に正である。

Fig. 4(a)~(d)はSchbauerとKlebanoff¹⁴⁾による実験データで、図中の実線は最小二乗近似による直線である。これらの図で、たとえばFig. 4(a), (b)のReynolds応力の分布をみると乱流境界層の発達の様子がよくわ

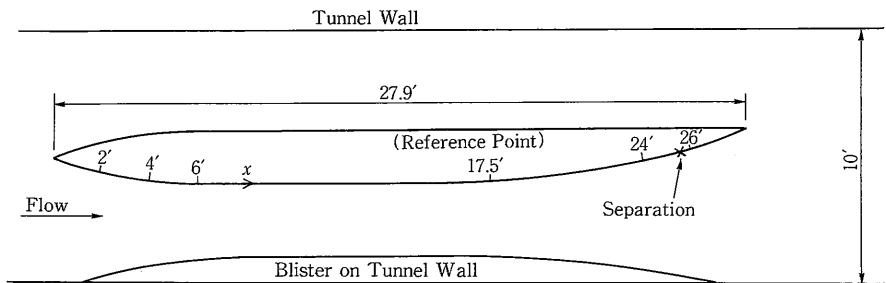


Fig. 3 SchbauerとKlebanoff¹⁴⁾の実験

..... 研究速報
 かる。すなわち、 $x=5.33\text{m}$ におけるReynolds応力の分布は $u_\tau = \text{constant}$ の乱流境界層のReynolds応力の分布と同じである(分布はほぼ右下りである)が、 $x=7.74\text{m}$ では全く異なった分布をしている(y の小さいところで右上がりで、 $x \geq 10\text{cm}$ で右下がりとなっている)。

Fig. 4のデータを式(1)、(6)の形に最小二乗近似すると、最終的にTable 1が得られる。これより、モデル定数は

$$\sigma_1 = 2.2175 \pm 0.4263, \quad \tau_1 = 3.3040 \pm 0.9998 \quad (8a,b)$$

と定まる。ただし、 σ_1 と τ_1 の間には

$$4(C_{\nu}\tau_1^2 - 1)\sigma_1^2 = 3\tau_1(2C_{k1} - C_{k2}) \quad (9)$$

$$\sigma_1^2(C_{\varepsilon 1} - C_{\nu}\tau_1^2 C_{\varepsilon 3})$$

$$+ \frac{\tau_1}{4}(2C_{\varepsilon 4} - 6C_{\varepsilon 5} - C_{\varepsilon 6} + 2C_{\varepsilon 7} - 4C_{\varepsilon 8}) = 0 \quad (10)$$

.....
 の関係がある。ここで、 C_{k1} 、 C_{k2} 、 $C_{\varepsilon 1} \sim C_{\varepsilon 8}$ は改定 $k-\varepsilon$ モデル

$$\frac{Dk}{Dt} = R_{ab} \frac{\partial U_b}{\partial x_a} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} (C_{k1} \nu_e \frac{\partial k}{\partial x_a}) - \frac{\partial}{\partial x_a} (C_{k2} \nu_e \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a}) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & C_{\varepsilon 1} \nu_e \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{\partial U_a}{\partial x_b} \right)^2 + C_{\varepsilon 2} \nu_e \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial U_a}{\partial x_b} \frac{\partial U_b}{\partial x_a} \\ & - C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_a} (C_{\varepsilon 4} \nu_e \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a}) - \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial}{\partial x_a} (C_{\varepsilon 5} \nu_e \frac{\partial k}{\partial x_a}) \\ & - C_{\nu} C_{\varepsilon 6} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \right)^2 = C_{\nu} C_{\varepsilon 7} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_a} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_a} \\ & - C_{\nu} C_{\varepsilon 8} \left(\frac{\partial k}{\partial x_a} \right)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Table 1 モデル定数の推定値

| Position (m) | Model Constants | | Estimated Gradient | | |
|-----------------|-----------------|---------------|-----------------------------|---|------------------------------------|
| | σ_1 | τ_1 | $G(\text{m/s})^2/\text{cm}$ | $2\sigma_1 G^{1/2}(\text{m/s})/\text{cm}^{1/2}$ | $\tau_1 G(\text{m/s})^2/\text{cm}$ |
| 7.3152 | 3.3042~4.7164 | | 0.4790~0.8666 | 6.1518~6.5285 | |
| 7.4676 | 2.9215~5.0583 | 3.1950~7.6647 | 0.3850~0.7430 | 5.0365~6.2773 | 2.3739~2.9509 |
| 7.6200 | 2.0582~3.1035 | | 0.7576~1.1868 | 4.4845~5.4027 | |
| 7.7419 | 1.7912~2.6437 | 2.3042~4.3037 | 0.6955~1.1274 | 3.8037~4.4096 | 2.5978~2.9932 |

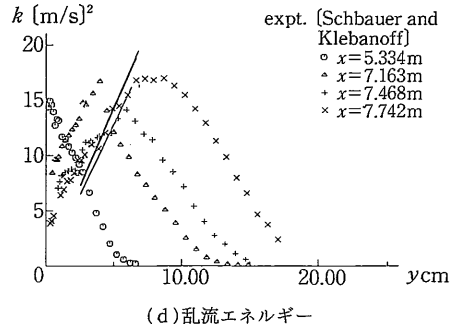
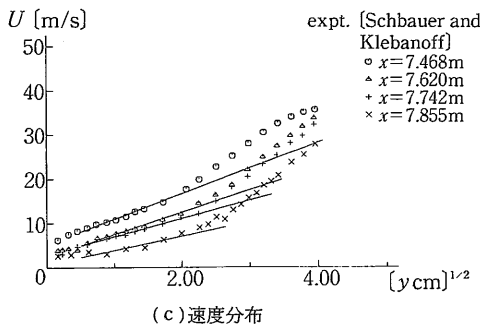
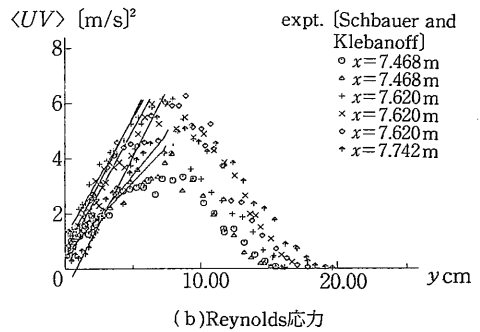
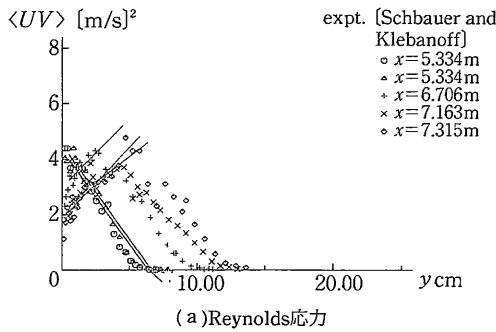


Fig. 4 SchbauerとKlebanoff⁽¹⁴⁾による実験結果

研 究 速 報

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}k\delta_{\alpha\beta} + \nu_e \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (13)$$

のモデル定数である。

さて、式(9)より通常(9)の右辺 > 0 を考慮すると、左辺 > 0、したがって

$$C_\nu = 0.08654 \pm 0.02074 \quad (14)$$

の範囲のすべての C_ν に対して、左辺 > 0 であるためには $\tau_1 \geq 3.9$ でなければならない。これより、(8b)は

$$\tau_1 = 4.1019 \pm 0.2019 \quad (15)$$

と変更される。このような変更が妥当であるか否かについては、もっとデータの蓄積が必要である。

念のため、標準 $k-\epsilon$ モデル (式(11), (12)で $C_{k2} = 0$, $C_{\epsilon5} = C_{\epsilon6} = C_{\epsilon7} = C_{\epsilon8} = 0$ とおく) で $C_\nu = 0.09$, $\sigma_1 \approx 2.21$ として、 $\tau_1 = 3.30, 4.10$ とおくと、(9)より C_{k1} はそれぞれ

$$C_{k1} = -0.02, 0.41 \quad (16)$$

と評価される。この数値のうち前者は負であるから適用不可能であり、後者は通常用いられている数値 $C_{k1} = 1$ の約半分である。したがって、標準 $k-\epsilon$ モデルでは $u_\tau = 0$ 近傍の流れを正しく予測できない。

さらに、(10)より標準 $k-\epsilon$ モデルにはない項がすべてでてくることがわかる。この式(10)は、 $u_\tau = \text{const.}$ の場合に壁関数を ϵ 方程式に代入して得られる関係式

$$C_{\epsilon1} - C_{\epsilon3} + \kappa^2 (C_{\epsilon4} - C_{\epsilon6}) / \sqrt{C_\nu} = 0 \quad (17)$$

κ : Kármán 定数

に相当している。(17)が成り立つことが標準 $k-\epsilon$ モデル ($C_{\epsilon6} = 0$) ではモデル定数を決める基準にしているから、(10)が成り立つことが $u_\tau = 0$ 近傍の流れを正しく予測できる一つの目安になる。したがって、この点からも標準 $k-\epsilon$ モデルでは $u_\tau = 0$ 近傍の流れを正しく予測できないことがわかる。

以上に得られた結果を要約しておく。 $u_\tau = 0$ のときの $k-\epsilon$ モデルの漸近解の初項は、

$$U = U_0 + 2\sigma_1 (Gy)^{1/2}, \quad G = \alpha + U_0 \partial U_0 / \partial x,$$

$$k = \tau_1 Gy, \quad \epsilon = C_\nu \sigma_1 \tau_1^2 G^{3/2} y^{1/2}$$

$$\nu_e = (1/\sigma_1) G^{1/2} y^{3/2}, \quad R_{12} = Gy$$

$$\sigma_1 = 2.2175 \pm 0.4263, \quad \tau_1 = 4.1019 \pm 0.2019$$

で与えられる。

4. 結 言

$u_\tau = 0$ の場合の $k-\epsilon$ モデルの漸近解の初項を与えた。

この初項は、 $k-\epsilon$ モデルの境界条件として適正な条件である。

また、標準 $k-\epsilon$ モデルを使ってもこのような形の漸近解を得ることはできるが、実験とは異なった分布を与える理由を明らかにした。

謝 辞

本研究をすすめるにあたり、本所NSTグループの御支持と御討論を戴きました。とくに、吉澤徹教授には貴重な御討論を戴きました。ここに記して厚く感謝致します。

(1989年10月9日受理)

参 考 文 献

- 1) 竹光, 機論 (B編), vol. 55, No. 517, 1989, 2684., Takemitsu, N., J. Fluid Mech., submitted.
- 2) Stratford, B.S., J. Fluid Mech., vol. 5, pt. 1, 1959, 1.
- 3) Stratford, B.S., J. Fluid Mech., vol. 5, pt. 1, 1959, 17.
- 4) Townsend, A.A., J. Fluid Mech., vol. 8, pt. 1, 1960, 143.
- 5) Townsend, A.A., J. Fluid Mech., vol. 11, pt. 1, 1961, 97.
- 6) Townsend, A.A., J. Fluid Mech., vol. 12, pt. 4, 1962, 536.
- 7) Perry, A.E, Bell, J.B. and Joubert, P.N., J. Fluid Mech., vol. 25, pt. 2, 1966, 299.
- 8) Perry, A.E, J. Fluid Mech., vol. 26, pt. 3, 1966, 481.
- 9) Sandborn, V.A., and Liu, C.Y., J. Fluid Mech., vol. 32, pt. 2, 1968, 293.
- 10) McDonald, H., J. Fluid Mech., vol. 35, pt. 2, 1969, 311.
- 11) Kader, B.A. and Yaglom, A.M., J. Fluid Mech., vol. 89, pt. 2, 1978, 305.
- 12) Schofield, W.H., J. Fluid Mech., vol. 113, 1981, 91.
- 13) Clauser, F.H., J. Aero. Sci., vol. 21, No. 2, 1954, 91.
- 14) Schbauer, G.B. and Klebanoff, P.S., NACA Rep. No. 1030, 1951.
- 15) Bradshaw, P., J. Fluid Mech., vol. 29, pt. 2, 1967, 625.
- 16) Samuel, A.E. and Joubert, P.N., J. Fluid Mech., vol. 66, pt. 3, 1974, 481.
- 17) Simpson, R.L., Chew, Y.-T. and Shivaprasad, B.G., J. Fluid Mech., vol. 113, pt. 2, 23.
- 18) Takemitsu, N., J. Fluid Mech., submitted.