

等価伝達関数法によるガタのある梁系の振動特性解析

Vibration Characteristics of a Beam with a Clearance at the Support
in Terms of the Equivalent Linearized Transfer Function

村上 工 成*・佐藤 壽 芳**

Kousei MURAKAMI and Hisayoshi SATO

記 号

- A_n, B_n : 第 n 調波の実数部, 虚数部のフーリエ係数
- N : 数値化された振動波形データの個数
- i : 振動波形データの番号
- X_i : i 番目のデータの振幅
- j : 虚数単位
- F : 加振力
- D : 応答変位
- C : コンプライアンス
- $|C|, \phi$: C のゲインと位相
- suffix の R, I : フーリエ係数の実部, 虚部を表す
- $[M]$: 質量マトリックス
- $[C]$: 比例粘性減衰の減衰係数マトリックス
- $[\tilde{k}]$: 非線形剛性マトリックス
- $\{x\}, \{X\}$: 変位ベクトル
- $\{f\}, \{F\}$: 荷重ベクトル
- ω : 円振動数
- $[K_{CN}]$: 等価伝達関数で表された剛性マトリックス
- x_0 : 断片線形非線形の折れ点が生ずる変位
- $G_N(X)$: 等価伝達関数
- k_{n1}, k_{n2} : 振幅が小さい領域, 大きい領域に対する断片線形ばね定数の値

1. ま え が き

ガタのある振動系の特性については、古くから関心が持たれ、研究が進められており^{1),2)}、特徴的な性質もよく理解されていた。最近になっては、原子力発電所、化学プラント等における配管系の設計合理化が要請されており、その対処として、実験的に特性を明らかにする観点からも研究が進められている³⁾。配管系には施工上ガタが入りやすいことから、実物大の配管系の実験によって特性を把握することも試みられている⁴⁾。

しかし、これらの研究にもかかわらず、梁の任意の位

置にガタを想定する系にたいし、実務的に適用できる設計算法は確立されておらず、有限要素法等による時刻歴解析が設計手法として一般的であったとみられる。しかし、この方法で振動特性を求めるためには膨大な計算時間が必要であり、見通しのよい結果を求めることには無理があった。

一方、線形の振動系を対象としてモード解析法が使われているが、系に非線形特性が含まれていると対処できない状況にあった。最近、等価伝達関数法、ビルディングブロック法を併用して多自由度非線形系の周波数応答特性を求める手法が提案されている^{5),6)}。本研究では、ガタを含む梁の振動特性推定にこの手法を適用し、よい結果をえたので報告する。

2. 実験の構成

梁のモデルとしては、振動の方向を限定してモード形を単純化し、ガタを精度よく調整できること等を考慮して、図1に示す梁のモデルを用いた。材料にはSUS 304を用いている。梁の両端の固定には解析と実験を精度よく対比できるように固定条件としている。加振点は長辺の固定点から15mmの位置に加振器を設置し、インピーダンスヘッドによって加振力と同時に加振加速度を測定している。ガタは特徴的な点としてL型梁の曲がり部位置6に設定している。ガタを構成するジュラルミン製ス

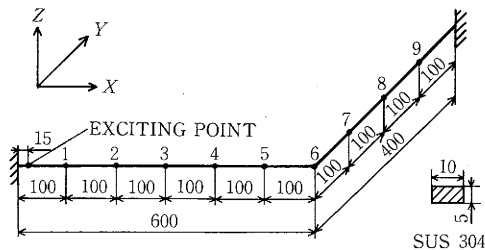


図1 実験に用いた梁の形状

*宇部興産㈱

**東京大学生産技術研究所 第2部

研究速報

トッパーが梁と接触した時にLEDが点灯する回路を作り、この点を起点としてマイクロメータによってすきま量を設定している。一方、梁の振動変位は渦電流型の変位計によって測定している。

加振実験はデジタル式関数発生器、2チャンネルフーリエ解析装置、パーソナルコンピュータ等を用いた図2の装置構成によっている。加振周波数の変更と加振時間の維持をパーソナルコンピュータによって制御しつつ、A/D変換した応答波形をコンピュータに取り込み処理し、コンプライアンス特性を求めている。この方式により、共振点近傍におけるコンプライアンスの急激な変化、加振周波数増加時に生ずる跳躍現象、加振周波数増減の際に生じる履歴現象等の微妙な特性を安定して把握できるようにしている。

3. 等価伝達関数法による周波数応答特性

多自由度非線形系の周波数応答特性は、非線形要素の等価伝達関数を基本周波数成分の入出力の関係で表す記述関数法によって求めることができる^{5),6)}。対象としている系は一つの非線形要素を含む梁系であるが、解析法の可能性を検討する観点から、この提案を適用して周波数応答特性を求めることを試みている。

多自由度非線形系の運動方程式は

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [\tilde{k}]\{x\} = \{f\} \quad (1)$$

と表される。ここで $[\tilde{k}]$ について非線形要素を記述関数で置き換えて線形化する。解の形を複素形式で表すことにより、

$$([K_{GN}] - \omega^2[M] + j\omega[C])\{X\} = \{F\} \quad (2)$$

と書くことができるから

$$\{X\} = ([K_{GN}] - \omega^2[M] + j\omega[C])^{-1}\{F\} \quad (3)$$

と求められる。ここで $[K_{GN}]$ は非線形ばねを(6),(7)に示す記述関数で表したもので、振幅 $\{X\}$ の関数である。

ガタは図3に示す断片線形型のばね特性で表すことが

できその記述関数は

$$\begin{aligned} |X| \leq x_0 \text{ に対して} \\ G_N(X) = k_{n1}/X \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} |X| > x_0 \text{ に対して} \\ G_N(X) = k_{n2} + (k_{n1} - k_{n2})k(u) \end{aligned} \quad (5)$$

と表される。ここで

$$k(u) = (2/\pi)\{\sin^{-1}(u) + u\sqrt{1-u^2}\} \quad (6)$$

$$u = x_0/X \quad (7)$$

である⁵⁾。したがって、(4)と(6)あるいは(7)を連立して各 ω に対する振幅を求め、コンプライアンスあるいはその他の特性を求めることができる。

(3)を構成する振動系は、質点としてL型梁の角に1個、短辺に1個、長辺に2個、都合4個配置したばね質量系とし、ガタの特性 k_{n1} , k_{n2} を、

$$k_{n1} = 19.6\text{N/m}$$

$$k_{n2} = 6,860\text{N/m}$$

と与えている。図4は一次の固有振動数のコンプライアンスを解析によって求めた結果である。

4. 周波数応答特性の計測

系の応答出力をフーリエ解析し、基本波に注目して入出力の関係を探求している。その過程は以下のとおりである。正弦波加振にたいする定常応答波形のフーリエ係数は $n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)/2$ として

$$A_n = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_i \cos \frac{2\pi ni}{N} \quad (8)$$

$$B_n = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_i \sin \frac{2\pi ni}{N} \quad (9)$$

等と与えられる。 F , D のフーリエ係数が求められると、基本周波数に対する伝達関数 C のゲイン、位相はその実数部、虚数部から

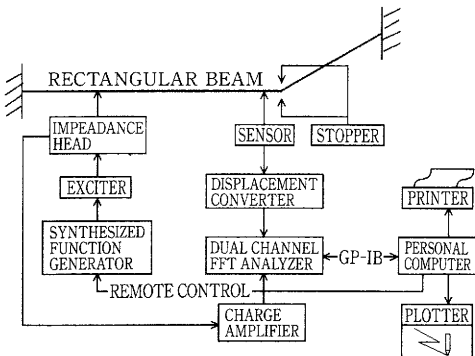


図2 実験装置の構成

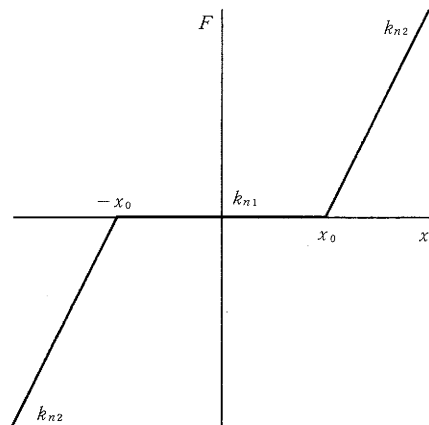


図3 ガタの非線形特性

$$|C| = \sqrt{C_R^2 + C_i^2} \quad (10)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{C_i}{C_R} \right) \quad (11)$$

によって与えられる。

加振周波数の変更は100Hz以下の固有振動数付近では0.01Hz, それ以外では0.1Hzの間隔で行っている。ある加振周波数の定常状態から次の加振周波数に変更し, これによって生じる過渡状態が十分に減衰するのをまって

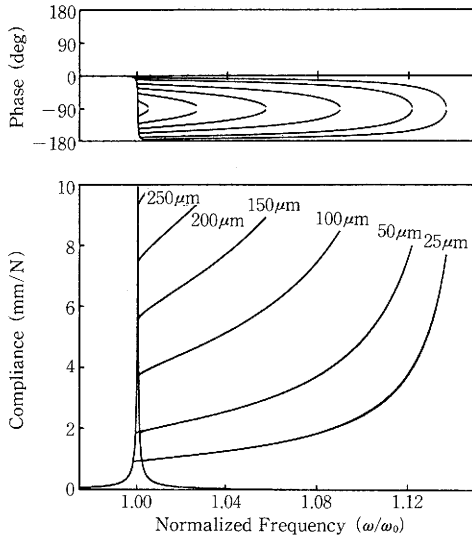


図4 解析による非線形系の周波数応答特性 (一次固有振動数)

研究速報
フーリエ解析を行ってコンプライアンスを求め, 共振点近傍における振幅の抑制, 跳躍現象, 履歴現象等の非線形系に特徴的な周波数応答特性の挙動を確実に, 短時間で求めるようにしている。

有限要素法と線形系の実験により求められた一次, 二次の固有振動数, 曲線適合⁷⁾によって求められた減衰定数等は表1に示すとおりである。線形系の位置6における最大両振幅は一次の固有振動数に対して535 μ mと得られている。ガタの値は

250, 200, 150, 100, 50, 25 μ m

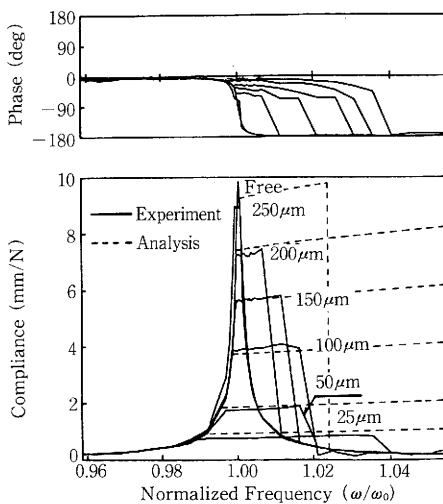
のように設定している。図5は変位測定位置をガタに隣接して置き, 周波数を増加させた場合(a)と, 減少させた場合(b)についてコンプライアンス特性を示している。点線は図4に示した解析の結果である。

5. 解析による応答特性と実験結果との比較

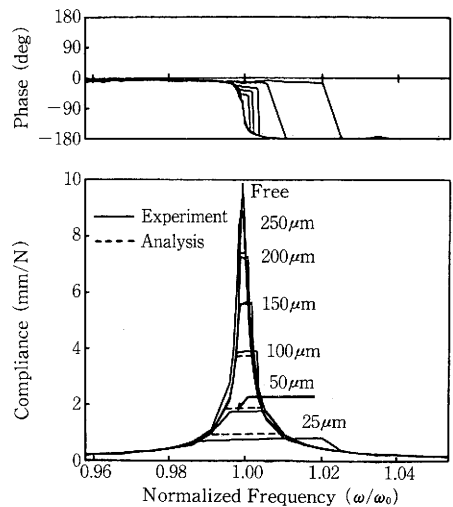
図4の解析結果によれば, 固有振動数近傍ではコンプライアンスがガタのすきま量によって抑制される一方, 左方に折れ曲がったハードスプリングの形となっている。折れ曲がった部分は周波数の増加と共にコンプライアンス

表1 一次, 二次の固有振動数と減衰定数

Mode	Natural Freq. (Hz)		Damping Ratio
	FEM	Exp.	
1st	21.98	20.87	0.00098
2nd	67.48	64.80	0.00095



(a) 加振周波数を増加させた場合



(b) 加振周波数を減少させた場合

図5 実験による非線形系のコンプライアンス (一次固有振動数)

研 究 速 報

スが増加する方向に湾曲している。この際、ガタのすきま量が大きい場合には、延び方も大きくなっている。湾曲部では振幅、反力が非常に大きくなることを意味しているが、この挙動は実系では起こらず、図5(a)にみるように周波数近傍の跳躍現象で線形の特性に戻っている。

コンプライアンス特性の折れ曲がった部分は、固有振動数両側の曲線からつながる二本の曲線からなり、先端に達している。下側の曲線に対応する系の挙動は不安定で、実験では実現されない。加振周波数を増加する場合に対応する上側の曲線もすべては実現されず、図5(a)に示された跳躍現象を生じている。跳躍現象が起こるまでの範囲では、解析結果と実験結果は互によく一致している。解析の場合、ガタの入出力の関係には基本調波のみが仮定されているが、実系では梁がストッパーに衝突して高調波が生じていること、境界条件その他解析で仮定されている条件が完全には満たされていないこと等が外乱となって、解析による特性がすべてはたどられずに跳躍現象が起きているものと考えられる。図5(b)は周波数を減少させた場合の比較である。このほか、線形系のコンプライアンスの値が固有振動数近傍において抑制されていること、加振周波数の増減に対してコンプライアンスに履歴特性が生じていること等の点で実験、解析の結果がよく一致している。

図6は横軸にすきま量、縦軸に線形系の応答振幅で正規化されたモード振幅を取って、実験、解析の結果を比較している。基本波の応答に注目する近似的な解析によっているが、解析結果は実験結果と非常によく一致していることが示されている。

6. あと が き

以上、従来は主として実験、時刻歴解析によって求められていたガタを有する梁系の周波数応答特性が、等価伝達関数法を用いて解析的に求めうることを、すきま量を調整して行った実験結果と対比して示した。これによって渡部らによる提案の有効性を示す一方、従来は明確にされていなかった実務的な設計計算法への可能性を明らかにした。高調波成分の影響の評価、実系における跳躍現象発生周波数の予測等は今後の課題である。

本研究の遂行に当たり、宇部興産(株)機械事業部開発部

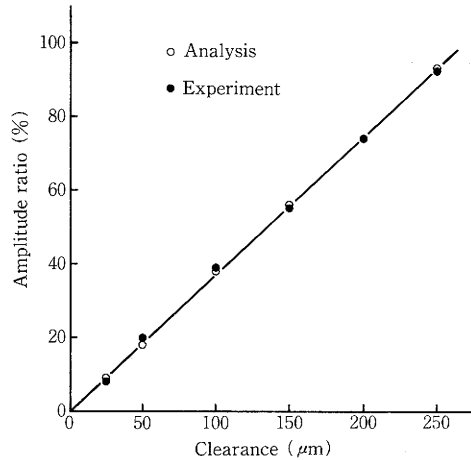


図6 非線形系のモード振幅に関する実験結果と解析結果との比較

西正部長、山本直道課長のご支援を頂いたこと、日立精工(株)研究部渡部和主任技師より貴重なご示唆を頂いたことを感謝する。論文作成に当たり、大堀真敬助手、鈴木英佐子事務官、鈴木和彦技官の助力を得たことに感謝する。(1989年6月28日受理)

参 考 文 献

- 1) J.P. Den Hartog and R.M. Heiles : Forced Vibration in Nonlinear Systems with Various Combinations of Linear Springs, Trans. ASME, 58, A-127, 1936
- 2) 藤井澄二：機械のガタと振動，機械の研究，5-5，昭28，302-306
- 3) 鈴木浩平，青木繁，大山哲司：サポートの非線形特性を考慮した配管系の振動応答解析(第1報，サポートのガタ特性の影響)，機論C，53-490，昭62-6，1141-1146
- 4) 配管系の振動試験報告書，昭和59年度，原子力工学試験センタ，昭60-3
- 5) 渡部和，佐藤壽芳：多自由度非線形系の周波数応答解析，機論C，51-467，昭60-7，1765-1770
- 6) 渡部和，佐藤壽芳：非線形ビルディング・ブロック法の開発と応用，機論C，52-481，昭61-9，2397-2404
- 7) 王信義，佐藤壽芳，大堀真敬：衝撃応答による振動特性推定法と工作機械構造への応用，機論，48-432，昭57-8，1175-1184