研究速報
UDC 656.1/.5：711.7

過飽和ネットワークにおける均衡交通量配分に関する考察

Some Aspects on Traffic Assignment for an Oversaturated Network

桑原雅夫*
Masao KUWAHARA

1．はじめに

交通需要が容量を上回れば，交通渋滞が引き起こされネットワーク内に待ち行列が生成される．このような過飽和ネットワークにおいては，待ち行列内での旅行時間の遅れは通常の旅行時間に比べて非常に大きく，交通量配分を行う場合に待ち行列は無視できない．待ち行列というのは，交通がネットワーク上に滞留する現象で，時間的に変化するものであるため，従来の時間的に静的な交通量配分手法では表現しえない．そこで，動的な配分手法による分析が必要となるわけで，これまでにもいくつかの動的配分手法の研究が成されている．

動的な交通量配分においても，システム最適配分と利用者均衡配分があるが，システム最適配分は，総旅行時間最小化などの目的関数にOD交通量の制約条件とリンク交通量の状態方程式を付け加えた最適化問題として表現でき，最適制御理論を適用した解法（松井[1]）や線形近似によるリニヤプログラミングを用いた解法（Merchant[2]）などが提案されている．

一方，動的な利用者均衡配分についても，静的な配分で行われるように，利用者一人一人が旅行時間を最小化するという均衡原理を表現することができる最適化問題に置き換えようとする試みが成されている．しかしながら，どのような目的関数をとれば利用者均衡を表現できるのかが，今一つ明らかにされていないところである．

本研究は，動的利用者均衡配分を最適化問題として見た場合に，どのような定式化をすれば良いのかを，いくつかの仮定を設けて問題を簡略化した上で考察したものである．

2．配分の仮定

本研究では，以下のような仮定を設けて動的配分を簡略化する．

（1）あるODペア i の k 番目の経路の単位時間T当たりの流入交通量u_{ik}[veh/T]は，時間的に変化せず一定値をとる．この仮定は同時に単位時間当たりのOD交通需要は一定であることを意味している．

（2）経路の所要時間としては，待ち行列での待ち時間のみを考慮し，初期時刻 $t=0$ においては，待ち行列は全く無いものとする（すなわち，もしも待ち行列がその経路上に無ければ，所要時間はゼロである）．

（3）待ち行列でのサービスはFIFO（First In First Out）とし，待ち行列の物理的な長さは無いものとする．

以上の仮定に基づいて，図1のような1OD2経路のネットワーク上に容量上のボトルネックとなるリンクが3つある場合に，待ち行列がどのように生成されていくかを縦軸に累加交通量，横軸に時間をとったグラフ上（図2）で考えてみよう．時刻ゼロにおいて経路上に存在する車が無いものとし，単位時間当たりの交通需要2700[veh/T]が等分に経路1と2に流入したとする．経路1，2ともに1350[veh/T]が起点から流入するので，傾き1350の直線をまず描く．この交通量は仮定（2）より，瞬時にボトルネック1と2に流入する．ボトルネック1，2では，容量が単位時間当たり1250[veh/T]と1000[veh/T]なので，待ち行列が生成され，それぞれの経路において傾き1250と1000の交通量しか流出できない．ボトルネック1と2から流出した交通量は，再び瞬時にボトルネック3に流入し，ボトルネック3への流入交通量は2250[veh/T]に対し容量1800[veh/T]なので，ここでも待ち行列ができる．ボトルネック3では，経路1と2の交通量が混在し，この待ち行列を経路1と2の交通に分離するには，仮定（3）のFIFOより容量1800[veh/T]を，流入交通量の比1250：1000＝5：4で配分すればよい．つまり，同じ時刻にボトルネック3へ流入した車の待ち時間は経路1も2も等しいとするのである．したがって，経路1では1000[veh/T]だけ，経路2では800[veh/T]だけが終点に到着できることになる．このように，終点への到着交通量が起点からの流入量よりも少なく，残りの交通需要は待ち行列としてネットワーク上に滞留するのである．

この例のように，経路の単位時間における流入交通量が一定値をとるという仮定（1）と，待ち行列での待ち時

*東京大学生産技術研究所　第5部

研　究　速　報

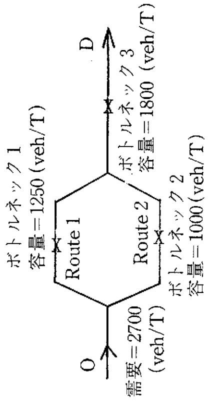
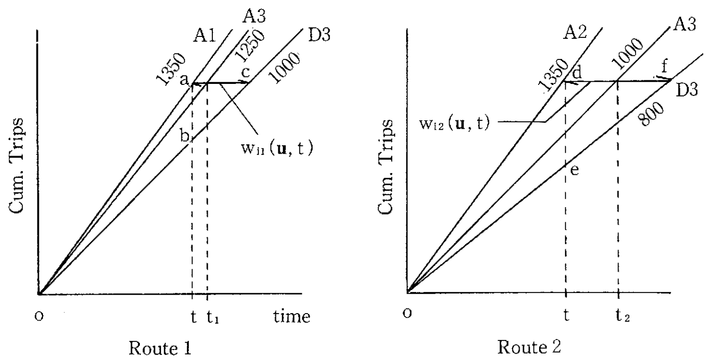


図1　ネットワーク図



Ai＝ボトルネック i への累加流入交通量，Di＝ボトルネック i からの累加流出交通量

図2　経路所要時間の変化(図中の数字は直線の傾き[veh/T])

間のみを考慮するという仮定(2)によって，どのボトルネックにおいても単位時間当たりの流入・流出量が一定となる簡略化が成されている．

この簡略化のもう一つの特徴は，もしも起点からの出発時刻が t の交通について均衡解が得られたとしたら，それ以外の出発時刻の交通についても均衡条件が成立することである．これは，どの経路の所要時間も出発時刻 t について線形に増加する性質があるためである．したがって，均衡配分を考えるばあいには，ある特定の出発時刻を持つ交通についてのみ均衡条件を満足しているかどうかを吟味すればよく，その意味ではある一断面の時刻における静的配分問題へと問題を置き直していると言える．

ここで注意すべきことは，いくつかの経路に共通の待ち行列であっても，待ち行列での待ち時間が経路によって異なってくることである．この例のボトルネック3では，同じ時刻 t に起点を出発した利用者であっても，経路1を通った場合には時刻t_1にボトルネック3に流入できるのに，経路2を通った場合にはt_2 ($>t_1$) に流入することになり，ボトルネック3での待ち時間が異なってくる．これは重要な点で，静的配分のように各リンク所要時間 (この場合はある時刻におけるボトルネックでの待ち時間) を独立に求めてから，経路の所要時間をその経路上のリンク所要時間の和として求めることができないことを示している．したがって，一本の経路は起点から終点まで連続して考える必要があるため，以下では経路所要時間，経路交通量を変数として扱うことにする．

この例でもわかるように，各経路の所要時間は起点での第 k 経路流入交通量u_{ik}とその経路における最小のボトルネック容量s_{ik}のみによって決まる．例えば，経路1の場合は，u_{i1}が1350[veh/T]で，最少容量s_{i1}はボトルネック3において1000[veh/T]であるので，時刻 t に起点を出発したODペア i の車の所要時間$w_{i1}(\mathbf{u}, t)$ は，

$$w_{i1}(\mathbf{u}, t) = \{1/s_{i1}(\mathbf{u}) - 1/u_{i1}\} \cdot u_{i1} \cdot t \qquad (1)$$

$$= (1/1000 - 1/1350) \cdot 1350 \cdot t$$

ここに，　$\mathbf{u} = (u_{11}, u_{12}, \cdots\cdots, u_{21}, u_{22}, \cdots\cdots, u_{I1}, u_{I2}, \cdots\cdots, u_{IK})$

となる．一般に，s_{ik}はその経路の交通量u_{ik}のみならず他の経路交通量にも依存するので，$s_{ik}(\mathbf{u})$と表すのが適当であり，時刻 t に起点を出発した経路所要時間は，経路交通量ベクトル$\mathbf{u}$と時刻 t の関数なので$w_{ik}(\mathbf{u}, t)$のように一般的に書ける．この例の場合には，経路1の所要時間のほうが経路2よりも小さいので，均衡状態とはなっていないが，$w_{i1}(\mathbf{u}, t) = w_{i2}(\mathbf{u}, t)$を解いて$u_{i1}=1500$，$u_{i2}=1200$とすれば，両経路の所要時間は出発時刻 t にかかわらず常に等しくなり，均衡状態が達成される．

3．定　式　化

以上簡略化のための仮定に基づいて，システム最適と利用者均衡配分の定式化を試みることにする．

制約条件としては，ODペア i について経路交通量の和がOD交通需要 (q_i) に等しいという条件と，経路交通量がゼロまたは正の値をとる条件がある．

$$q_i = \sum_k u_{ik} \qquad (2)$$

$$u_{ik} \geqq 0 \qquad (3)$$

システム最適配分の場合の目的関数は，いろいろと考えられるが，例えば，時刻0から t までの所要時間の最小化を目的とすれば，

$$\sum_{ik} \int_0^t w_{ik}(\mathbf{u}, t) \cdot s_{ik} dt \qquad (4)$$

と表せる．これは図2で言えば，三角形oabとodeの面積の和の最小化に相当する．式(4)の$w_{ik}(\mathbf{u}, t)$と$s_{ik}(\mathbf{u})$は，式(1)のように経路交通量$\mathbf{u}$の関数として表せるので，制約条件(2)，(3)のもとで式(4)を最小化する$\mathbf{u}$を求める問題となる．

あるいは，時刻0から t までに起点から流入した車の

所要時間の最小化を目的とすれば，

$$\sum_{ik}\int_0^t w_{ik}(\mathbf{u},\ t)\cdot u_{ik}dt \qquad (5)$$

と表せ，これは三角形oacとodfの面積の和の最小化となる．いずれにせよ，計画者の定義する目的関数を式で表現すれば良いのである．

一方，利用者均衡配分の場合には，先に述べたように均衡原理を式で表現するのは，そう簡単なことではない．仮に，目的関数が$F(\mathbf{u},\ t)$のように与えられたとして，利用者均衡原理の定義より目的関数$F(\mathbf{u},\ t)$の満たすべき条件を考えることにする．制約条件式(2)，(3)の下で$F(\mathbf{u},\ t)$を最小化する場合の必要条件である．Kuhn-Tucker条件を求めてみよう．ラグランジェ関数$L(\mathbf{u},\ t,\ \lambda)$は，

$$L(\mathbf{u},\ t,\lambda)=F(\mathbf{u},\ t)+\sum_i \lambda_i (q_i-\sum_k u_{ik})$$

となり，これをu_{ik}で偏微分してKuhn-Tucker条件が求められる：

$$(\partial F/\partial u_{ik}-\lambda_i)u_{ik}=0 \qquad (6)$$

$$\partial F/\partial u_{ik}-\lambda_i \geqq 0 \qquad (7)$$

ここに，λ_i＝OD制約条件（式(2)）のラグランジェ未定乗数

したがって，経路交通量u_{ik}が正の場合には，$\partial F/\partial u_{ik}$が$\lambda_i$に等しくならなければならない．もしも，$\partial F/\partial u_{ik}$が$w_{ik}(\mathbf{u},\ t)$に等しかったとすると，経路kの所要時間$w_{ik}$は経路交通量$u_{ik}$が正であれば，経路kに独立の$\lambda_i$と等しいことになり，利用されている経路の所要時間$w_{ik}$が皆等しいという利用者均衡配分の定義を表していることになる．

そこで，

$$\partial F(\mathbf{u},\ t)/\partial u_{ik}=w_{ik}(\mathbf{u},\ t) \qquad (8)$$

という微分方程式を解いて目的関数$F(\mathbf{u},\ t)$を求めれば良いことになるが，この微分方程式が解けるためには，式(8)が完全微分方程式でなければならない．すなわち，経路所要時間を経路交通量で1回偏微分してできるヤコビ行列が式(9)のように対称であることが必要である[付1]．

$$\partial w_{ik}(\mathbf{u},\ t)/\partial u_{pq}=\partial w_{pq}(\mathbf{u},\ t)/\partial u_{ik}$$
$$\forall(i,k)\neq(p,q) \qquad (9)$$

しかしながら一般には，$w_{ik}(\mathbf{u},\ t)$は式(1)のようにu_{ik}のみの関数ではなく，他の多くの経路交通量の関数である$s_{ik}(\mathbf{u})$に依存しているので，ヤコビ行列の対称性は保証されない．したがって，システム最適配分の場合のような，目的関数を定義することは一般には困難である．このことは，本研究で簡略化のために設けたいくつかの仮定を取り去った，より一般的な動的均衡配分に対しても同様に言えることである．この場合には，変分不等式による定式化が必要となろう．

特殊なケースとして，一つの待ち行列に流入する交通がただ一つの経路交通量だけの場合のように経路交通量のインターラクションが全く無いようなネットワークにおいては，ヤコビ行列の非対角要素はゼロとなり，対称性が保証される．いくつかの簡単な例を次章で紹介する．

4．簡単なネットワークでの例

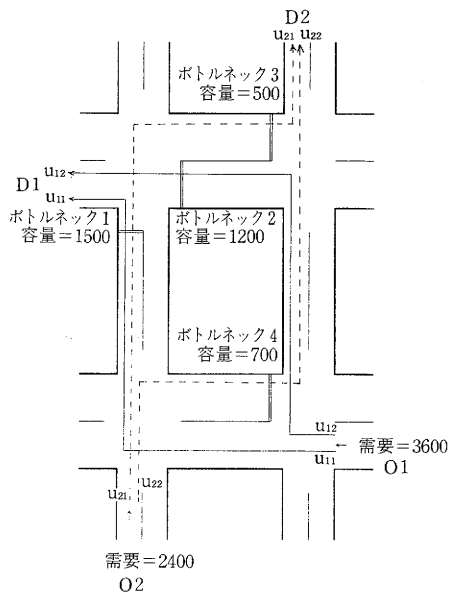
図3のような4つの交差点から成るネットワークで，4ヶ所の交差点流入アプローチが容量上のボトルネックになっており，ボトルネック1から4の容量が図中に示されている．

今，O1からD1までの交通需要3600[veh/T]のみがあるばあいには，経路1と2が考えられ（図中の実線で表されている2経路），均衡状態ではボトルネック1と2において各経路に1つずつの待ち行列が生成される．各待ち行列にはただ1つの経路交通量しか流入しないため，例えば経路1，2の所要時間は，

$$w_{11}(u_{11},\ t)=(1/1500-1/u_{11})\cdot u_{11}\cdot t,\ u_{11}>1500 \qquad (10)$$

$$w_{12}(u_{12},\ t)=(1/1200-1/u_{12})\cdot u_{12}\cdot t,\ u_{12}>1200 \qquad (11)$$

と表され，ヤコビ行列は対角行列となり対称である．したがって，均衡解は式(8)より，以下の目的関数を最小化する最適化問題の解として，u_{11}=2000[veh/T]，u_{12}=1600[veh/T]と与えられる．



══ 容量上のボトルネック，交通量 [veh/T]

図3　4交差点ネットワーク

$$F(\mathbf{u}, t) = \sum_k \int_0^{U_{1k}} w_{1k}(u_{1k}, t)\,du \qquad (12)$$

次に，新たなOD交通需要としてO2からD2への2400 [veh/T]を図3の破線のように追加してみる．この新たなODペアについても2本の経路が考えられ，ボトルネック1には経路交通量u_{11}とu_{21}が流入するため経路間のインターラクションが生じる．

この場合にも，均衡解はただ1つ存在し，4つのリンクすべてに待ち行列ができるのであるが，その状態における各経路の所要時間（時刻tに起点を出発した車について）を式(1)より求めてみると次のようになる．

$$w_{11}/t = (u_{11}+u_{21})/1500 - 1,\quad u_{11}+u_{21} > 1500,$$
$$w_{12}/t = u_{12}/1200 - 1,\quad u_{12} > 1200,$$
$$w_{21}/t = u_{21}/500 - 1,\quad u_{21} > 500,$$
$$w_{22}/t = u_{22}/700 - 1,\quad u_{22} > 700.$$

この場合には，$\partial w_{11}/\partial u_{21} = t/1500$, $\partial w_{21}/\partial u_{11} = 0$ なので，ヤコビ行列の対称性は失われ動的均衡配分の目的関数は式(12)のようには定義できないことになる．このような単純なネットワークでは，式(2)のOD条件と各経路の所要時間を等しいとおいた連立方程式を解くことができて，解は$u_{11}=1556$, $u_{12}=2044$, $u_{21}=1000$, $u_{22}=1400$ [veh/T]と求められる．解の存在性，唯一性については，変分不等式の定式化によってある程度明らかにされている[3]．

5．まとめと今後の課題

本研究では，待ち行列が生成される過飽和ネットワークにおける動的な利用者均衡配分の定式化について，いくつかの簡略化のための仮定に基づいて考察した．静的配分においては，利用者均衡原理をKuhn-Tucker必要条件で表現する最適化問題として定式化できるが，動的均衡配分の場合には，そのような目的関数を求めることが困難である．この理由は，経路の所要時間を経路上の各ボトルネック（またはリンク）ごとに待ち時間の和として表現するのが困難なことと，経路の所要時間に複数の経路が影響を及ぼし合っているためである．

今後の課題としては，(I)動的な利用者均衡配分の解の存在・唯一性などを数学的に吟味すること，(II)実用的な解法を提案することの検討が必要である．これまでにも，最適制御理論を適用するなどの分析が展開されてはいるが，ここで扱ったような簡略化された問題についても目的関数の定義が容易ではないため，より一般的な動的均衡配分問題の定式化は非常に困難なものと想像される．また，その解法となると，動的な配分は交通量の平面的な広がり以外に時間的な広がりをも考慮しなければならないので非常に複雑となり，現段階では容易に見つけられそうにない．

したがって，適当な仮定による簡略化を行うことも必要であり，本研究で用いた仮定は，例えば交差点数十で構成されるようなある程度小さな，かつ混雑の激しいネットワークにおいては，行列での待ち時間が卓越するので妥当性があろう．この簡略化された問題については，静的配分において導入されている変分不等式による定式化などが考えられ，その解法のアルゴリズムもSmith[3], Dafermos[4]などによっていくつか提案されている．解の存在性については，Brouwerの不動点定理などによって証明することができると思われる．実用的な解法としては，混雑した交通状況をかなり正確に再現できるシミュレーションモデルに経路配分機能を持たせ，シミュレーションと配分計算を交互に繰り返す等のヒューリスティックな方法や，各ODペアについて考えられる経路をあらかじめ決めておいてから変分不等式によって解く方法などが考えられよう．

（1989年6月28日受理）

付1）ヤコビ行列の対称性

目的関数$F(\mathbf{u}, t)$の全微分の定義は，

$$dF(\mathbf{u}, t) = \sum_{ik} \partial F(\mathbf{u}, t)/\partial u_{ik} \cdot du_{ik}$$

と書け，解$F(\mathbf{u}, t)$が存在するためには，

$$\partial^2 F(\mathbf{u}, t)/\partial u_{ik}\partial u_{pq} = \partial^2 F(\mathbf{u}, t)/\partial u_{pq}\partial u_{ik},\quad \forall (i, k) \neq (p, q)$$

を満足しなければならない．これに式(8)を代入すると，

$$\partial w_{ik}(\mathbf{u}, t)\}/\partial u_{pq} = \partial w_{pq}(\mathbf{u}, t)\}/\partial u_{ik},$$

となる．したがって，ヤコビ行列

$$J = \left|\begin{array}{llll} \partial w_{11}/\partial u_{11}, & \partial w_{11}/\partial u_{12}, & \cdots\cdots, & \partial w_{11}/\partial u_{IK} \\ \partial w_{12}/\partial u_{11}, & \partial w_{12}/\partial u_{12}, & \cdots\cdots, & \partial w_{12}/\partial u_{IK} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \partial w_{IK}/\partial u_{11}, & \partial w_{IK}/u_{12}, & \cdots\cdots, & \partial w_{IK}/u_{IK} \end{array}\right|$$

が対称であることが必要となる．

参考文献

1) 松井寛：総走行時間最小化配分と等時間配分の動的化，土木学会論文報告集，No. 339, pp.239-242, 1983.
2) Merchant and Nemhauser：A Model and an Algorithm for the Dynamic Traffic Assignment Problems, Transportation Science, Vol.12, No. 3, pp. 133-199, 1978.
3) Smith, M.J.：An Algorithm for Solving Asymmetric Equilibrium Problems with a Continuous Cost Flow Function, Trnsportation Research 17B, pp. 365-371, 1983.
4) Dafermos, S.：Traffic Equilibrium and Variational Inequalities, Transportation Science, Vol. 14, pp. 43-54, 1980.