研　究　速　報

UDC 551.466：626.02：535.8

海洋波集波レンズ
——細長体理論による特異点分布——
Ocean Wave Focusing
——Line Distribution of Singularity Which Focuses Ocean Waves——

木　下　　健*・村　重　　淳*
Takeshi KINOSHITA and Sunao MURASHIGE

1. は じ め に

海洋波の向きを変えて波を一点に集める集波レンズは波浪制御技術の一つであり，静穏な海域の確保と波浪エネルギーの有効利用の要素技術として期待できる．Mehlumら[1]は，レンズの形状の詳細は明らかにしていないが，適当な物体を置くことにより集波が行えることを水槽試験と数値シミュレーションで示している．また，工藤ら[2]はレンズの形として没水平板を提案し，特異点分布法により波形の計算を行い実験結果と比較している．本報では，レンズの形を細長体と仮定しmatched asymptotic expansion法を利用して，どのような特異点分布により集波できるか，ということを検討した．

2. 定　式　化

流体は，非粘性，非圧縮の渦無し流れであると仮定し，速度ポテンシャルΦ ($\boldsymbol{v}=-\mathrm{grad}\Phi$；$\boldsymbol{v}$は速度ベクトル)を導入する．また，流体の運動は，微小かつ周期的であり，水深は無限大とする．座標系はFig. 1のように定める．すなわち，静水面をxy面，鉛直下方をz軸の正方向とする．仮定より，速度ポテンシャルΦは，

$$\Phi(x,y,z;t)=Re\left\{\frac{iga}{\omega}\phi(x,y,z)\,e^{i\omega t}\right\} \tag{1}$$

と表せる．ここで，gは重力加速度，ωは入射波の角振動数，aは入射波の振幅を表す．ϕは複素数値をとり，連続の条件よりラプラスの式，

$$\Delta\phi=0 \tag{2}$$

を満たす．自由表面変位$z=\zeta(x,y;t)$はベルヌーイの式の二乗項を無視することにより，

$$\zeta(x,y;t)=-\frac{1}{g}\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,y,z;t)\right]_{z=0} \tag{3}$$

で表される．入射波がxの正方向に進んでいるとすると，入射波ポテンシャルϕ_0は，

$$\phi_0(x,z)=\exp[-Kz-iKx] \tag{4}$$

ここで，Kは波数を表し，水深無限大の場合は，

$$K=\omega^2/g \tag{5}$$

となる．

いま考えているポテンシャルの境界値問題を解く場合，次のような，(x', y', z')に単位強さの吸い込みを置いたときの線形自由表面条件を満たす調和関数であるグリーン関数G^{3D}の導入が重要となる[3]．

$$\begin{aligned}G^{3D}(x,y,z;\,x',y,z')=&-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\\&+\pi K\exp[-K(z+z')]\{\boldsymbol{H}_0(KR)-N_0(KR)\}\\&+2K\exp[-K(z+z')]\int_0^{z+z'}\frac{e^{Ks}}{\sqrt{s^2+R^2}}ds\\&+2\pi iK\exp[-K(z+z')]H_0^{(2)}(KR)\end{aligned} \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{H}_0(KR)$はStruve関数，$N_0(KR)$はNeumann関数，$H_0^{(2)}(KR)$は第二種Hankel関数である．また，r_1，r_2，Rは，それぞれ，

$$\begin{aligned}r_1&=\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{1/2}\\r_2&=\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2\}^{1/2}\\R&=\{(x-x')^2+(y-y')^2\}^{1/2}\end{aligned} \tag{7}$$

である．吸い込みの強さの分布を$\sigma^{3D}(x',y',z')$で表すと，ポテンシャルϕは，

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\sigma^{3D}(x',y',z')\,G^{3D}(x,y,z;x',y',z')\,ds \tag{8}$$

で表される．ここで，Sは吸い込みを分布させている面を

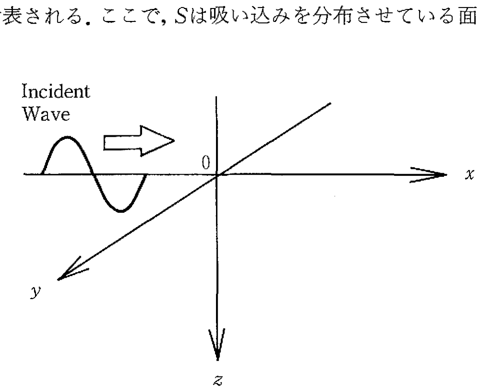


Fig. 1　座標系

*東京大学生産技術研究所　第2部

表す．さらに（6）式は，$KR\to\infty$で第5項以外はすべて無視できるので，次のように近似できる．

$$G^{3D}(x,y,z;x',y',z')\sim\sqrt{\frac{8\pi K}{R}}\exp[-K(z+z')-iKR-i\frac{\pi}{4}]\quad \text{as } KR\to\infty \quad (9)$$

3．細長体理論[4)]

細長体（物体の幅Bと長さLの比$B/L=O(\varepsilon)$）を置くことにより波を集めることを考える．物体の長さLと波長λの比を$\lambda/L=O(\varepsilon)$とすると，物体から数波長以上離れたところ（far field）から，物体を観察すると物体は細長い棒と考えることができる．したがって，物体の存在はその棒に沿って置いた特異点の分布により表せる．一方，物体の近傍（near field）では流場は二次元的であり，ストリップ法的な定式化が可能である．

3.1　Far Field

y軸上に沿って細長体を置くことにより，正のx軸方向に進む波を正のx軸上のある一点に集めることを考える．流場は，x軸に関して対称，y軸に関して非対称であるので，吸い込みとx軸方向に向きを持つ二重極をy軸上に分布させる．無限に長い物体を置くとすると，far fieldポテンシャルϕ^{3D}は，

$$\phi^{3D}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\{\sigma^{3D}(y')+\mu^{3D}(y')\frac{\partial}{\partial x'}\}\times G^{3D}(x,y,z;x',y',z')\Big]_{x'=0,z'=0}dy' \quad (10)$$

と表せる．

ここで，$\mu^{3D}(x',y',z')$は二重極の強さの分布を表し，上付きの$3D$はfar fieldを表す．

Rは，

$$R=r-(x'\cos\theta+y'\sin\theta)\quad \text{for } r\gg x',y' \quad (11)$$

ここで，

$$x=r\cos\theta\ ,\quad y=r\sin\theta \quad (12)$$

と表せるので，far fieldポテンシャルϕ^{3D}のouter expansionは，

$$\phi^{3D}(x,y,z)\sim\sqrt{\frac{K}{2\pi r}}\exp\Big[-Kz-iKr-i\frac{\pi}{4}\Big]\times H^{3D}(K,\theta) \quad (13)$$

となる．ここで，$H^{3D}(K,\theta)$は，Kochin関数と呼ばれ，

$$H^{3D}(K,\theta)=-\int_{-\infty}^{\infty}\{\sigma^{3D}(y')+\mu^{3D}(y')iK\cos\theta\}\times\exp[Ky'\sin\theta]dy' \quad (14)$$

と表される．また，停留位相の原理より，far fieldポテンシャルのinner expansionは，

$$\phi^{3D}(x,y,z)=\{i\sigma^{3D}(y)-K\mu^{3D}(y)\operatorname{sgn}(x)\}\times\exp[-Kz-iK|x|]\quad \text{for } |x|\ll 1 \quad (15)$$

となる．吸い込みと二重極の強さはnear fieldとのmatchingにより決定する．

3.2　Near Field

near　fieldでは，y軸に垂直な二次元断面で考える．near fieldポテンシャルϕ^{2D}は，

$$\phi^{2D}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\Big[\Big\{\sigma^{2D}+\mu^{2D}\frac{\partial}{\partial x'}\Big\}\times G^{2D}(x,z;x',z')\Big]_{x'=0,z'=0} \quad (16)$$

で表せる．ここで，上付きの$2D$はnear fieldを表す．G^{2D}は次のように求められている[5)]．

$$G^{2D}(x,z;x',z')=\log\Big(\frac{r'_1}{r'_2}\Big)-2\mathrm{P.V.}\int_0^{\infty}\frac{e^{-K(z+z')}}{k-K}\cos K(x-x')dk+i2\pi\exp[-K(z+z')-iK|x-x'|] \quad (17)$$

ここで，r'_1，r'_2は，

$$r'_1=\{(x-x')^2+(z-z')^2\}^{1/2}$$
$$r'_2=\{(x-x')^2+(z+z')^2\}^{1/2}$$

を表す．

また，このG^{2D}は$K|x-x'|\to\infty$では第3項以外はすべて無視できるので，

$$G^{2D}(x,z;x',z')\sim 2\pi i\exp[-K(z+z')-iK|x-x'|]\quad \text{as } K|x-x'|\to\infty \quad (18)$$

と近似できる．したがって，near　fieldポテンシャルのouter expansionは，

$$\phi^{2D}(x,z)\sim iH^{\pm}(K)\exp[-Kz-iK|x|]\quad \text{as } Kx\to\pm\infty \quad (19)$$

と表せる．ここで$H^{\pm}(K)$はKochin関数で，吸い込みの対称性と二重極の反対称性を利用して，

$$\sigma^{2D}=\frac{H^{+}(K)+H^{-}(K)}{2},\quad \mu^{2D}=\frac{H^{+}(K)-H^{-}(K)}{2iK} \quad (20)$$

と表すと，

$$H^{\pm}(K)=\sigma^{2D}+iK\operatorname{sgn}(x)\mu^{2D} \quad (21)$$

と書ける．

3.3　Matching

matched asymptotic expansion法より，far fieldポテンシャルのinner expansion(15)式とnear fieldポテンシャルのouter expansion(21)式を比較すると，三次元と二次元の特異点の強さの関係が，

$$\sigma^{2D}=\sigma^{3D}(y),\quad \mu^{2D}=\mu^{3D}(y) \quad (22)$$

と表せる[4)]．

4．集　　波

次のような二つの流場を重ね合わせることにより集波を表現することを考える．

（a）$x>0$で円筒波，$x<0$で波無し（Fig. 2. a）

(b) $x>0$ で波無し，$x<0$ でx軸の正方向に進む入射波 (Fig. 2. b)

4.1　流場(a)

流場(a)はfar fieldポテンシャルを利用して考える．(14)式のKochin関数$H^{3D}(K,\theta)$が，

$$H^{3D}(K,\theta)=e^{iK\ell\cos\theta} \tag{23}$$

のようになれば，$(x,y)=(\ell, 0)$に中心を持つ円筒波ができると考えられる．したがって，次式のような積分方程式を解くことになる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{\sigma_{ring}^{3D}(y')+\mu_{ring}^{3D}(y')iK\cos\theta\}e^{iKy'\sin\theta}dy' = \begin{cases} -e^{iK\ell\cos\theta} & \text{for } \cos\theta>0 \\ 0 & \text{for } \cos\theta<0 \end{cases} \tag{24}$$

ここで，下付きの$ring$は円筒波を表す．

さらに，流場のy軸に関する対称性を考慮すると(24)式は，

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{ring}^{3D}(y')e^{iKy'\sin\theta}dy'=-\frac{1}{2}e^{iK\ell\cos\theta} \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\mu_{ring}^{3D}(y')iK\cos\theta e^{iKy'\sin\theta}dy'=-\frac{1}{2}e^{iK\ell\cos\theta} \end{aligned}\right\} \quad \text{for } \cos\theta>0 \tag{25}$$

と表せる．$K\to\infty$を仮定すると，(25)式はフーリエ変換により，次式のように表せる．

$$\sigma_{ring}^{3D}(y')=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i(\ell\sqrt{K^2-\gamma^2}-\gamma y')]d\gamma \quad \text{for } \cos\theta>0,\ K\to\infty \tag{26}$$

ここで，$\gamma=K\sin\theta$である．

また，Hankel関数によって，

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i(K\ell\cos\theta-\gamma y')]d\gamma \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[iK\ell r'\cos(\theta+\delta)]d\gamma \\ &=-K\frac{\ell}{r'}H_1^{(1)}(Kr') \end{aligned} \tag{27}$$

ここで$H_1^{(1)}(Kr')$は第一種Hankel関数で，

$$\ell=r'\cos\delta,\ y'=r'\sin\delta$$

と表せる[6]．二重極に対しても同様な解析が行える．さらに，ここで$Kr'\to\infty$の仮定のもとでHankel関数を漸近展開により近似すると吸い込みと二重極の強さの分布は，

$$\begin{aligned} \sigma_{ring}^{3D} &\sim \frac{K}{4i}\frac{\ell}{r'}\sqrt{\frac{2}{\pi Kr'}}\exp[i(Kr'-\frac{3\pi}{4})] \\ \mu_{ring}^{3D} &\sim -\frac{1}{4i}\sqrt{\frac{2}{\pi Kr'}}\exp[i(Kr'-\frac{\pi}{4})] \\ &\text{as } Kr'\to\infty \end{aligned} \tag{28}$$

となる．

ここでは，Kochin関数の形から円筒波を表すポテンシャルを求めたが，波を一点に集めるポテンシャルはほかにも考えられる（Appendix）．

4.2　流場(b)

流場(b)は，near fieldポテンシャルを利用して考える．散乱波のKochin関数$H_0^{\pm}(K)$を

$$H_0^+(K)=i,\ H_0^-(K)=0 \tag{29}$$

のように与えると，入射波と重ね合わせることにより，流場(b)が表現できる．さらに，(20)式よりnear fieldポテンシャルの吸い込みと二重極の強さは，

$$\sigma_0^{2D}=\frac{i}{2},\ \mu_0^{2D}=\frac{1}{2K} \tag{30}$$

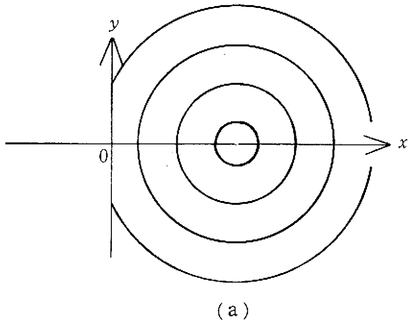
のように与えられる．

4.3　重ね合わせ

円筒波の振幅を決定するために，near fieldにおけるエネルギー保存則を考える．円筒波を表す特異点分布の係数を$Ae^{i\theta}$とおき，流場(a)と(b)のnear fieldポテンシャルを重ね合わせると，(22)式より吸い込みと二重極の強さはそれぞれ，

$$\begin{aligned} \sigma^{2D} &= \sigma_0^{2D}+Ae^{i\theta}\sigma_{ring}^{2D}=\sigma_0^{2D}+Ae^{i\theta}\sigma_{ring}^{3D}(y) \\ \mu^{2D} &= \mu_0^{2D}+Ae^{i\theta}\mu_{ring}^{2D}=\mu_0^{2D}+Ae^{i\theta}\mu_{ring}^{3D}(y) \end{aligned} \tag{31}$$

で与えられる．near fieldで，Kochin関数を利用して入射波，反射波，透過波のエネルギー保存則を表すと次のようになる．



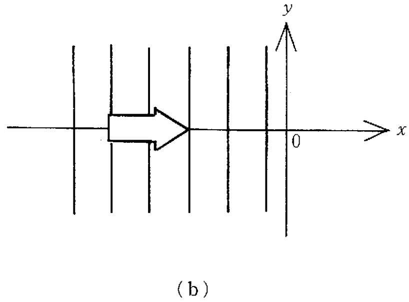


Fig. 2　重ね合わせによる集波の表現

$$|1+iH^+|^2+|iH^-|^2=1 \tag{32}$$

したがって，(20)，(30)，(32)式より，

$$A=[\,|\,\sigma^{3D}_{ring}(y')+iK\mu^{3D}_{ring}(y')\,|^2 + |\,\sigma^{3D}_{ring}(y')-iK\mu^{3D}_{ring}(y')\,|^2]^{-1/2} \tag{33}$$

で与えられ，θは任意にとれることがわかる．ここで，Aは定数ではなくy'の関数であるので，Kochin関数は，厳密には(23)式の右辺で与えられる円筒波を表さない．しかし，物体の長手方向のAの分布は，波数K，焦点距離ℓ，物体の長さLで決まるので，それらをAが$-L/2\leqq y'\leqq L/2$であまり変動しないように選ぶことにより円筒波に近い流場が表現できる．

以上より，流場(a)と(b)を重ね合わせることにより集波を表すポテンシャルは次のように与えられる．

〈far field〉

$$\phi^{3D}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\Big[\Big\{\sigma_0{}^{3D}+Ae^{i\theta}\sigma^{3D}_{ring}(y') + (\mu_0{}^{3D}+Ae^{i\theta}\mu^{3D}_{ring}(y'))\frac{\partial}{\partial x'}\Big\} \times G^{3D}(x,y,z;x',y',z)\Big]_{x'=0,z'=0}dy' + \phi_0(x,z) \tag{34}$$

ここで，$\sigma_0^{3D}=\sigma_0^{2D}$，$\mu_0^{3D}=\mu_0^{2D}$，である．

〈near field〉

$$\phi^{2D}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\Big[\Big\{\sigma_0{}^{2D}+Ae^{i\theta}\sigma^{2D}_{ring} + (\mu_0{}^{2D}+Ae^{i\theta}\mu^{2D}_{ring})\frac{\partial}{\partial x'}\Big\} \times G^{2D}(x,z;x',z')\Big]_{x'=0,z'=0}+\phi_0(x,z) \tag{35}$$

ここで，$\sigma^{2D}_{ring}=\sigma^{3D}_{ring}(y)$，である．

5．実際の設計への指針

(19)，(20)，(21)，(22)，(28)，(29)式より，near fieldでの反射波のポテンシャルϕ_{ref}と透過波のポテンシャルϕ_{tran}はそれぞれ，

$$\phi_{ref}=iH^-\exp[-Kz+iKx]=0 \qquad \text{as } Kx\to-\infty$$

$$\phi_{tran}=(1+iH^+)\exp[-Kz-iKx] = A\frac{K}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi Kr'}}\Big(\frac{\ell}{r'}+1\Big) \times\exp[-Kz-iK(x-Kr'-\theta)] \qquad \text{as } Kx\to+\infty \tag{36}$$

で与えられる（ここでθは任意）．これより，反射波は無く，透過波は入射波に対して，$Kr'+\theta$だけ位相が進んでいることがわかる．このような流場を実現する二次元断面が得られれば，集波レンズの形状が決定できる．なお，r'はレンズ上のある点と焦点との距離であるから，細長体近似と高周波の近似は幾何光学に対応している．

6．ま　と　め

細長体理論に基づき，集波を表現する特異点分布を求めた．波数，焦点距離，物体の長さを適当に選ぶことにより，集波が表現できると考える．特異点分布は，一般の波数に対しては積分方程式(24)を，波数$K\to\infty$の仮定のもとでは解析解(28)を得たが，今後は本論中の仮定がどの程度有効であるか，波数，焦点距離，物体の長さをどのように選べば最良の集波効果が得られるか等を本報で求めた解を利用して調べる．また，得られた特異点分布と同等の物体形状の中で，建造が容易でかつ実在流体中で高性能のものを検討する予定である．

(1989年7月7日受理)

参 考 文 献

1) Mehlum. E and Stamnes. J, Power Production Based on Focusing of Ocean Swells, First Symposium on Wave Energy Utilization, 1979, pp. 29-35.
2) 工藤君明ほか，没水平板の集波効果に関する研究，日本造船学会論文集，第160号，昭和61年11月．
3) 別所正利，波の中の船の運動の理論について，防衛大学校理工学研究報告，第3巻，第2号，昭和40年5月．
4) Motoshima. H, The Wave Pattern and Exciting Forces of a Slender Body，日本造船学会論文集，第143号，昭和53年5月．
5) 別所正利，波の中の船の横揺れ運動について，防衛大学校理工学研究報告，第3巻，第1号，昭和40年5月．
6) クーラン・ヒルベルト，数理物理学の方法，第3巻，第3章．
7) 石田茂資，渡辺厳，Snake motionをする造波機によって発生する斜め規則波の特性について，西部造船会会報，第69号，昭和59年11月．

Appendix

Snake型集波ポテンシャル[7]

Snake型造波機は，造波機を幾つかの要素に分割し，各要素を独立して制御してsnake motionを行わせることにより，方向スペクトルを持つ波を発生する．斜め規則波を発生させることを考えると，造波機（y軸に沿って並べる）は次のような吸い込み分布で近似できる．

$$\sigma^{3D}_{snake}(y)=e^{iKy\cos\theta} \tag{A-1}$$

ここで，θは波の伝ぱん角を表し，正のx軸方向に進む場合を$\theta=\pi/2$と定義する．この考え方を応用し，

$$\cos\theta=\frac{y}{\sqrt{y^2+\ell^2}} \tag{A-2}$$

として，吸い込み分布を

$$\sigma^{3D}_{snake}(y)=\exp\Big[iK\frac{y^2}{\sqrt{y^2+\ell^2}}\Big] \tag{A-3}$$

のように書き換えれば，波はx軸上の一点（ℓ，0，0）に集まると考えられる．一方，流場(a)を完成するに，二重極分布が必要となるが，near fieldとfar fieldの吸い込み，二重極の強さの関係(20)，(22)式より，

$$\mu^{3D}_{snake}(y)=\frac{1}{iK}\exp\Big[iK\frac{y^2}{\sqrt{y^2+\ell^2}}\Big] \tag{A-4}$$

となる．(30)式による流場(b)と，(A-3)，(A-4)による流場(a)と重ね合わせることにより集波が表現できる．