

## CED概念による破壊力学

Fracture Mechanics Based on the Concept of CED

渡辺勝彦\*

Katsuhiko WATANABE

従来の破壊力学における主要パラメータはすべて特殊な構成条件のもとにおいてのみ定義されるものであり、このため実際の破壊現象への適用にあたっては種々の制約が必要となり、またパラメータの意味があいまいとなるといった問題があった。ここでは、このような問題点を解消し、き裂の進展開始から最終破断までの一貫した取り扱いを可能とするものとして提案されているCED概念による破壊力学の概略を、主として弾塑性問題を対象に、基本となるパラメータCEDの考え方や基本的性質についてのまとめ、実際の破壊問題への適用例を通じて紹介する。

## 1. はじめに

破壊力学は、き裂の挙動、強度を評価する工学的手法として発達し、その対象とする範囲もますます広がってきている。しかし一方、その基礎となるべき力学体系を眺めるとき、例えば、

(1)弾性破壊においてはエネルギー・バランスによる議論が有効とされながら、一般の非弾性破壊においてはその適用に成功しておらず、これらの破壊はエネルギー的にあたかも別種の問題であるかのような取り扱いがなされている、

(2)応力拡大係数 $K$ 、 $J$ 積分、クリープに対する $C^*$ といった主要パラメータはすべて特殊な構成条件のもとにおいてのみ定義されるものであり、一般的構成条件のもとではパラメータ自体明らかでない、

(3)対象とする現象によりパラメータを使いわけねばならず、き裂問題の取り扱い法としての一貫性に欠けるものとなっている、

といった基本的な問題をかかえたままである。そしてこのことが、特に非弾性現象への破壊力学の適用を広げてゆくにあたって、その適用性を限定するものとなっていると思われる。

破壊力学においては、その始めより、エネルギー解放率の概念<sup>1)</sup>、および $K$ 支配場<sup>2)</sup>、HRR特異性支配場<sup>3)</sup>といったき裂端近傍の特異場の概念が破壊力学を意味あるものとするための基本となる指導的概念とされてきている。上述のような状況を打破するための種々の試みがなされているが<sup>4)~6)</sup>大部分この流れ、特にエネルギー解放率的な考え方に沿ったものといえ、部分的には成功しているようであるが、上の基本的問題点をすべて解決するといったものとはなっていない。一方著者らは、あらゆるき裂

問題において一貫して明白な力学的意味を持ち、問題によらず共通の基本的概念となりうるものとしてCED (Crack Energy Density, き裂エネルギー密度)の概念を提案し<sup>7)</sup>、やはり上に述べたような状況の打破を目指してこれを中心とする破壊力学の体系について研究を進めてきた<sup>8)~20)</sup>。これは従来の破壊力学における基本概念としてのエネルギー解放率、き裂周り特異場の概念をひとまわずおき、代わりにその位置にCEDを据えることによってき裂問題を眺めるものである。本稿では、紙面の都合もあり、主たる対象を基本となる静的な弾塑性問題におき、関連する基本的事項のまとめと実際の破壊問題への具体的適用例を通じてその概要を紹介する。これにより、CEDを最も基本的な概念とし、エネルギー解放率や特異場の概念を主から従の補助的な位置におくことで、現在までの破壊力学に現れている上のような問題点はすべて解消すると共にその有効性の背景がより合理的、統一的に説明される体系の構築が可能となること、従来の破壊力学ではその取り扱いに成功していない混合モード問題も含め、弾塑性破壊において小規模降伏、大規模降伏の区別なく、き裂の進展開始からその後の進展、最終的不安定破断までのき裂挙動が一貫して扱えるものとなること等が示される。

## 2. CEDとは

CEDは「き裂前縁を含む面内の各位置が初期の状態から現在までに担ってきたエネルギーを、考えている面内の単位面積当りで表したもの」として定義される量であり、記号 $\mathcal{E}$  (英大文字Eの筆記体)で表示するものとする<sup>7)</sup>。

き裂モデルとしては種々のものが考えられ、CEDは各モデルに対し、上の定義に従ってその具体的表示が与えられる。本稿では、CEDの分布を表現できかつ連続体力学により扱うことができる、さらにはそれらの特殊な場

\*東京大学生産技術研究所 第1部

合として、従来最も用いられてきた連続体中に完全に鋭いき裂を考えるモデルに対する議論も行うことができるという観点から、き裂を切欠きにより表現する切欠きき裂モデル<sup>9),10)</sup>とき裂を含む面の非連続性を考える非連続き裂モデル<sup>21)</sup>を取り上げ論を進める。

初期の時刻  $\tau = 0$  においてき裂長さ  $a_0$  であったき裂材が任意の負荷履歴を受けて時刻  $\tau = t_0$  よりき裂が進展を始め、現在の時刻  $\tau = t$  においてき裂長さが  $a(t)$  となっているものとする。図 1 は切欠きき裂モデルによりその変化を表したものであり、図中  $\rho$  は半円状切欠き端の半径、 $\Gamma(a_0)$  は切欠き端の径路、 $\Gamma(a)$ 、 $\Gamma(X_1)$  はそれぞれ  $X_1 = a$ 、現在のき裂端前方の任意の  $X_1$  における  $\Gamma(a_0)$  と同一形状の径路である。き裂の進展は切欠き底部を切り開き、図 1 (b) における現在のき裂端後方のうすずみ部は、き裂が閉じる場合には剛性を有するが、き裂が開いている状態では剛性を有さないものとする。このようにするとき図 1 (b) の状態における CED の分布  $\mathcal{E}(t, X_1)$  は、その定義より

$$\mathcal{E}(t, X_1) = \int_{\Gamma(X_1)} W dX_2 \quad (X_1 \geq a \geq a_0) \quad (1)$$

として与えられる<sup>9)-10)</sup>。ただし、 $W$  はひずみエネルギー密度で、 $\sigma_{ij}$ 、 $\epsilon_{ij}$  をそれぞれ応力、ひずみテンソル、 $(\dot{\phantom{x}}) = \partial(\phantom{x})/\partial\tau$  とするとき

$$W = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\tau \quad (2)$$

である。なお  $(\dot{\phantom{x}})$  は、通常は  $\tau - d\tau$  から  $\tau$  の変化に対するものと  $\tau$  から  $\tau + d\tau$  の変化に対するものを区別する必要はないが、進展するき裂を考える場合には、時刻  $\tau$  におけるき裂端における量を意味あるものとするため、 $\tau - d\tau$  から  $\tau$  の変化に対して定義するものとする。

非連続き裂モデルは、図 2 に示すように、初期におい

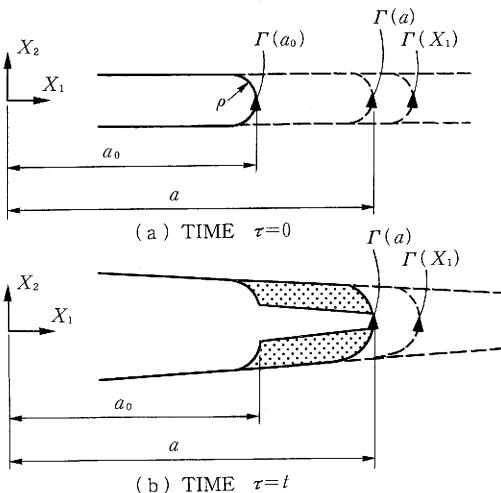


図 1 切欠きき裂モデル

ては完全な面であったき裂を含む面が変形と共に引き伸ばされるとし、引き伸ばされた面の中央部を切り開き、新生面に働く応力を零とすることによりき裂の進展を考えるモデルである。このモデルは非連続を考える面に対し、面外相対変位 (図 2 (c) 参照)

$$\llbracket \delta_n \rrbracket = \llbracket \delta_{22} \quad \delta_{23} \quad \delta_{12} \rrbracket \quad (3)$$

とそれに対応する面外応力

$$\llbracket \sigma_n \rrbracket = \llbracket \sigma_{22} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{12} \rrbracket \quad (4)$$

の間の構成関係を何らかの方法で与え、非連続面を除く連続体部分については通常の連続体に対する構成関係を考えることにより実際の解析が可能なモデルとなる<sup>21)</sup>。特に非連続面において  $\delta_{23} = \delta_{12} = 0$ 、 $\sigma_{23} = \sigma_{12} = 0$  とし、 $\sigma_{22}$  と  $\delta_{22}$  の間に剛完全塑性体の関係を与え、連続体部分を線形弾性体とすると、このモデルはいわゆる Dugdale モデル<sup>22)</sup>に一致する。非連続き裂モデルにおいてはひずみひずみエネルギー面密度ともいうべき量が

$$W_{plane} = \int_0^t \llbracket \sigma_n \rrbracket \cdot \{ \delta_n \} d\tau \quad (5)$$

として定義され、CED 分布は定義に基づき

$$\mathcal{E}(t, X_1) = W_{plane} \quad (X_1 \geq a \geq a_0) \quad (6)$$

として与えられる<sup>10)</sup>。

以上のように、各き裂モデルにおける CED 分布は実際の負荷履歴を追うことにより式 (1)、(6) で与えられるが、特に荷重点変位が時間と共に単調に増加するような負荷のもとにおいてき裂が滑らかに進展する場合の時間の経過に伴う CED 分布の変化を模式的に示したものが図 3 である。  $0 \leq \tau \leq t_0$  においては  $X_1 \geq a_0$  において分布は単調に増加し、  $t_0 \leq \tau$  においてはき裂の進展に伴って分布は右方に移動していく。ここでき裂端、  $X_1 = a$  における CED を特に CTED (Crack Tip Energy Density) と呼ぶことにするとき、進展するき裂の CTED 変化率  $d\mathcal{E}/da(t, a)$  は

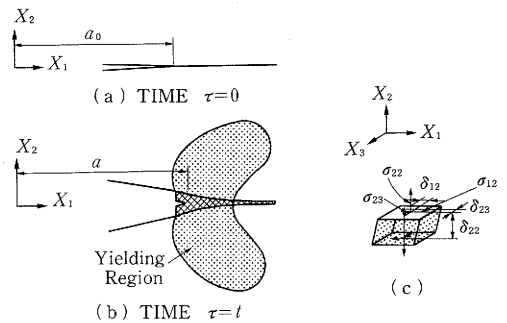


図 2 非連続き裂モデル

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{da}(t,a) &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(t,a) - \mathcal{E}(t-\Delta t,a)}{\Delta a} \\ &+ \lim_{\Delta X_1 (= \Delta a) \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(t-\Delta t,a) - \mathcal{E}(t-\Delta t,a-\Delta a)}{\Delta X_1} \\ &= \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(t,a) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X_1}(t,a) \end{aligned} \quad (7)$$

であるので (図 3 参照), 上式の中辺第 1 項で定義される,  $a-da$  から  $a$  の変化における新たなき裂端での CED の上乘せ率  $\partial \mathcal{E} / \partial a(t,a)$  と, 第 2 項で定義される  $a-da$  のき裂に対する CED 分布のき裂端での勾配  $\partial \mathcal{E} / \partial X_1(t,a)$  の和となっていることがわかる<sup>10)</sup>.

ところで, CED の定義における“き裂前縁を含む面”として, 切欠きき裂モデルでは図 1 (a) の破線ではさまれた幅  $2\rho$  の領域を, 非連続き裂モデルでは変形後引き伸ばされる部分を考えていることになり, これらき裂前縁を含む面を実質的な破壊進行領域と見なしていることに相当する. 完全に鋭いき裂を考えるモデルは, 切欠きき裂モデルでは  $\rho \rightarrow 0$  とするとき, 非連続き裂モデルでは式 (3), (4) の間の構成関係において剛性を限りなく高めていったときの極限として表現される. このとき, 例えば式 (1) において  $\rho \rightarrow 0$  とするときを考えれば明らかであるが, 完全に鋭いき裂では CTED のみ有限な値を有し,  $X_1 > a$  における CED は零となる, すなわち CED の観点から見ると, 完全に鋭いき裂はき裂端の一点においてのみ破壊が進行すると考えるモデルとなっていることに注意したい.

さてここまでにおいては, き裂は直進するものと考え, き裂を含む面における CED について扱ってきたが, CED はき裂前縁を含む任意方向の面においても定義され, 混合モード問題においてはこれが重要となる. 対象とする面内における CED の分布や対象とする面内方向に屈折してその方向に伸びだしたき裂に対する扱いは, 上に述

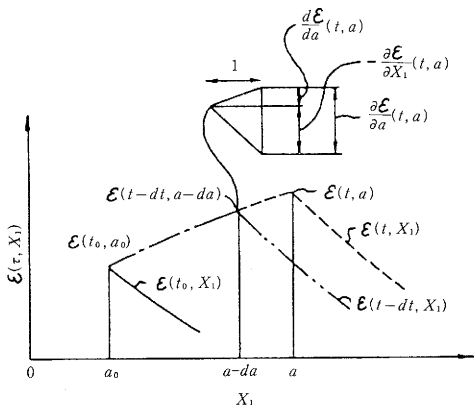


図 3 き裂成長に伴う CED 分布の変化

べてきた直進するき裂に対するものを準用すればよいので, ここでは任意の方向における CTED に対してのみ具体的表示を与える. すなわち, ここで図 4 に示すような固定座標系  $(X_1, X_2, X_3)$  を  $\varphi$  だけ回転させた移動座標系  $(x_1, x_2, X_3)$  を考え,  $x_1$  軸正の部分と  $X_3$  軸を含む面を  $\varphi$  面,  $x_1$  軸の正方向を  $\varphi$  方向と呼ぶことにすると, 時刻  $t$  ( $\leq t_0$ ) における  $\varphi$  方向の CTED,  $\mathcal{E}_\varphi(t)$  は, 定義より

$$\mathcal{E}_\varphi(t) = \int_{\Gamma_\varphi^0} W dx_2 \quad (8)$$

で与えられる<sup>11),12)</sup>. ただし  $\Gamma_\varphi^0$  は半円状切欠き端径路のうち  $\varphi$  方向に想定する破壊進行面 (図中の破線ではさまれる領域) に含まれる部分である.

一般に応力, ひずみ, 変位は,  $\varphi$  面に関する対称成分, 逆対称成分等を考えることにより, I, II, III の各モードに寄与する成分に分離することができ, 従って  $W$  も, さらには  $\mathcal{E}_\varphi(t)$  も一般に各変形モード寄与分に分離することができる<sup>11),12)</sup>. すなわち各モードに対応する量を上付き I, II, III で表すとき

$$\mathcal{E}_\varphi(t) = \mathcal{E}_\varphi^I(t) + \mathcal{E}_\varphi^{II}(t) + \mathcal{E}_\varphi^{III}(t) \quad (9)$$

となり, ここで例えば  $\mathcal{E}_\varphi^I(t)$  は

$$\mathcal{E}_\varphi^I(t) = \int_{\Gamma_\varphi^0} W^I dx_2, \quad W^I = \int_0^t \sigma_{ij}^I \dot{\epsilon}_{ij} d\tau \quad (10)$$

である.

ここでは切欠きき裂モデルにより  $\varphi$  方向 CTED の表示を与えたが, 非連続き裂モデルによっても可能であり, また,  $\mathcal{E}_{\varphi=0}(t)$  は式 (1), (6) における  $\mathcal{E}(t,a_0)$  であり, 混合モード下で直進するき裂に対する式 (1), (6) による CED 分布  $\mathcal{E}(t, X_1)$  も当然各変形寄与分に分離される.

### 3. CED にかかわる基礎的事項

#### 3.1 CED と荷重-変位曲線

図 5 に示すようなき裂材において (非連続き裂モデルでもよい), 初期き裂長さがいくらであれ, 時刻  $\tau$  に対して 1 対 1 に定まる滑らかに増加する荷重点変位  $u(\tau)$  を

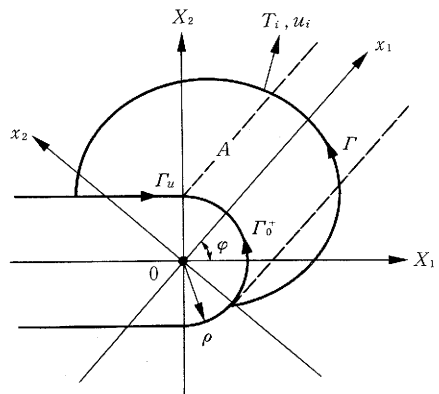


図 4  $\varphi$  方向 CTED に関与する積分径路

生じるように負荷するものとし、初期き裂長さ  $a_0$  の関数で与えられる時刻  $\tau = t_0(a_0)$  でき裂が進展を始め、それ以後、き裂は滑らかに進展し、刻々のき裂長さが  $a_0$  と  $\tau$  の関数として  $a(a_0, \tau)$  により与えられるものとする。このとき材料がクリープのような時間依存性は存在しない弾塑性体であるとき、その弾塑性体としての構成条件にかかわらず次のような関係が存在する<sup>8)~10),15)</sup>。

進展開始前のき裂 ( $t \leq t_0$ ) 荷重の変化を初期き裂長さ  $a_0$  と時刻  $\tau$  の関数として  $P(a_0, \tau)$  と表し、 $B$  を板厚とするとき

$$\mathcal{E}(t, a_0) = -\frac{1}{B} \int_0^t \frac{\partial P(a_0, \tau)}{\partial a_0} \dot{u} d\tau \quad (11)$$

初期き裂の違いが図 6 に示すような  $\varphi$  方向への長さ  $\Delta a_0$  の屈折部の有無であるとき、 $P_\varphi(\Delta a_0, \tau)$  が  $\varphi$  方向の屈折部長さ  $\Delta a_0$  のき裂材に対する時刻  $\tau$  における荷重を表すとして

$$\mathcal{E}_\varphi(t) = -\frac{1}{B} \int_0^t \frac{\partial P_\varphi(\Delta a_0, \tau)}{\partial (\Delta a_0)} \Big|_{\Delta a_0=0} \cdot \dot{u} d\tau \quad (12)$$

進展するき裂 ( $t_0 < t$ ) 時刻  $\tau$  と  $u(\tau)$  には 1 対 1 対応があるので、荷重  $P$ 、き裂長さ  $a$  を  $a_0$  と  $u$  の関数  $P(a_0, u)$ 、 $a(a_0, u)$  と表すとき、式 (7) における CED 上乘せ率

$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(t, a)$  が

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(t, a) = \frac{1}{B} \frac{\partial P(a_0, u)}{\partial a_0} \Big/ \left\{ \frac{\partial a(a_0, u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial a(a_0, u)}{\partial a_0} \right\} \quad (13)$$

で与えられる。

式 (11)~(13) の関係は、初期き裂長さの異なる試験片に対する荷重-荷重点変位-全き裂長さの間の関係が求まれば、それからき裂進展開始前の CTED、進展開始後の CED 上乘せ率が評価されることを示している。

### 3.2 CED と径路独立積分

切欠き裂モデルにおいて、図 7 に示すようなき裂端

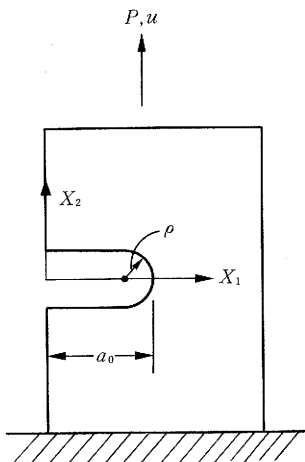


図 5 負荷を受けるき裂材

を囲む任意の積分径路  $\Gamma$ 、閉径路  $\Gamma + \Gamma_u + \Gamma_d - \Gamma(X_1) + \Gamma_d' + \Gamma_d''$  によって囲まれる面積を  $A$  とするとき、径路積分

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_J(t, X_1) &= \int_{\Gamma} (W dx_2 - T_i u_{i,1} d\Gamma) \\ &\quad - \int_{\Gamma_u' - \Gamma(X_1) + \Gamma_d'} T_i u_{i,1} d\Gamma \\ &\quad - \int_A \int_0^t (\sigma_{i,1} \dot{\epsilon}_{ij} - \epsilon_{i,1} \dot{\sigma}_{ij}) d\tau dA \quad (14) \end{aligned}$$

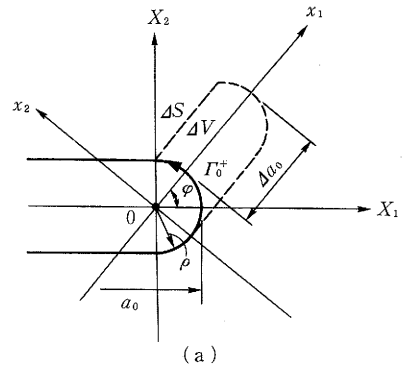
は構成条件によらず径路独立な積分となり、式 (1) で与えられる CED 分布  $\mathcal{E}(t, X_1)$  は

$$\mathcal{E}(t, X_1) = \mathcal{E}_J(t, X_1) \quad (15)$$

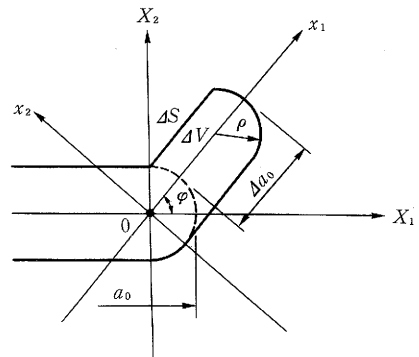
として評価される<sup>13)</sup>。ここで  $T_{ij}$ 、 $u_i$  は径路上の表面力と変位である。

式 (8) の  $\varphi$  方向 CTED、さらにはその各変形モード寄与分についても径路独立積分による表示が可能であり、図 4 において  $\Gamma_0^+$  を囲む径路を  $\Gamma + \Gamma_u$  とするとき、積分

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{J\varphi}(t) &= \int_{\Gamma + \Gamma_u} (W dx_2 - T_i u_{i,1} d\Gamma) \\ &\quad - \int_A \int_0^t (\sigma_{i,1} \dot{\epsilon}_{ij} - \epsilon_{i,1} \dot{\sigma}_{ij}) d\tau dA \quad (16) \end{aligned}$$



(a)



(b)

図 6 直線切欠き裂と屈折切欠き裂

$$\mathcal{E}_{J\varphi}^I(t) = \int_{\Gamma+\Gamma_u} (W^I dx_2 - T_i^I u_{i,1}^I d\Gamma) - \int_A \int_0^t (\sigma_{ij,1}^I \dot{\sigma}_{ij}^I - \epsilon_{ij,1}^I \dot{\sigma}_{ij}^I) dx dA \quad (17)$$

は構成条件によらず径路独立となり、

$$\mathcal{E}_\varphi(t) = \mathcal{E}_{J\varphi}(t) \quad (18)$$

$$\mathcal{E}_\varphi^I(t) = \mathcal{E}_{J\varphi}^I(t) \quad (19)$$

である<sup>12)</sup>。モード II, III 寄与分についても類似の関係が成り立つ。ここで式(14)における  $(\cdot)_{,1}$  は  $\partial(\cdot)/\partial X_1$  であるが、式(16)、(17)においては  $\partial(\cdot)/\partial x_1$  である。

ここでは示さないが、非連続き裂モデルにおける CED についても類似な径路独立積分表示が可能である<sup>16)</sup>。

### 3.3 従来のパラメータとの関係

CTODを除き、従来のパラメータは完全に鋭いき裂に対して定義されている。例えば切欠きき裂モデルであれば、完全に鋭いき裂に対する量は  $\rho \rightarrow 0$  の極限值として定義されるわけであるが、このようにして定義される完全に鋭いき裂に対する量を例えば  $\mathcal{E}^c(t, a)$  のように上付き  $c$  を付して表すことにする。

**線形弾性体** このとき  $\sigma_{ij} = \partial W / \partial \epsilon_{ij}$  であることから  $\sigma_{ij,1} \dot{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij,1} \dot{\sigma}_{ij}$  となり、式(14)、(15)より、さらには  $J$  積分の定義、周知の  $J$  積分、応力拡大係数、エネルギー解放率の間の関係も考慮すると

$$\mathcal{E}^c(t, a) = \mathcal{E}_f^c(t, a) = \int_{\Gamma} (W dX_2 - T_i u_{i,1} d\Gamma)^c = J^c(t) = \frac{\kappa+1}{8G} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{K_{III}^2}{2G} = \mathcal{Y} \quad (20)$$

が成り立つ。  $K_I, K_{II}, K_{III}$  は各モードの応力拡大係数であり、  $\mathcal{Y}$  はエネルギー解放率、  $G$  は剪断弾性係数、  $\kappa$  は  $\nu$  をポアソン比として、平面ひずみのとき  $\kappa = 3 - 4\nu$ 、平面応力のとき  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  である。

また、  $\mathcal{E}_\varphi^c(t)$ 、  $\mathcal{E}_\varphi^{1c}(t)$  は応力拡大係数により

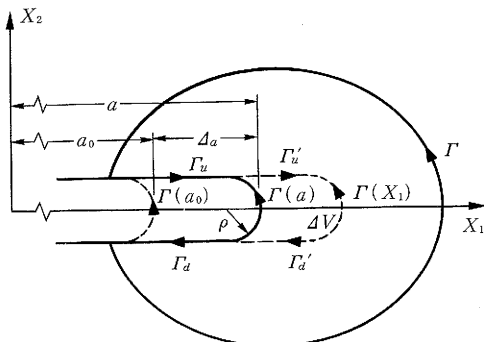


図7 切欠きき裂モデルと積分径路

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\varphi^c(t) &= \frac{K_I^2}{8G} \cos^2 \frac{\varphi}{2} (\kappa + \cos \varphi) \\ &+ \frac{K_{II}^2}{8G} \cos^2 \frac{\varphi}{2} (\kappa - 3 \cos \varphi + 4) \\ &+ \frac{K_I K_{III}}{8G} \sin \varphi (-\kappa - 2 \cos \varphi - 1) \\ &+ \frac{K_{III}^2}{2G} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\varphi^{1c}(t) &= \frac{K_I^2}{8G} \cos^4 \frac{\varphi}{2} (\kappa + \cos \varphi) \\ &+ \frac{K_{II}^2}{8G} 3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} (\kappa + 2 + 3 \cos \varphi) \\ &+ K_I K_{III} 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos^3 \frac{\varphi}{2} (-2\kappa - 1 - 3 \cos \varphi) \end{aligned} \quad (22)$$

と与えられ、モード II, III 寄与分についても同様な関係が得られる<sup>13)</sup>。

**弾塑性体** 全ひずみ塑性体の場合にはやはり  $\sigma_{ij} = \partial W / \partial \epsilon_{ij}$  であるので  $\sigma_{ij,1} \dot{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij,1} \dot{\sigma}_{ij}$  となり、式(14)、(15)、 $J$  積分の定義から

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^c(t, a_0) &= \mathcal{E}_f^c(t, a_0) \\ &= \int_{\Gamma} (W dX_2 - T_i u_{i,1} d\Gamma)^c = J^c(t) \end{aligned} \quad (23)$$

が成り立つ。したがって  $J$  積分は全ひずみ塑性体に対する CTED の意味を持つ。

図8に示すような、初期き裂長さが  $a_0$  と  $a_0 + da_0$  である2本の試験片に対する、構成条件を線形弾性体とする場合と任意の弾塑性体とする場合の荷重-変位曲線を考えると、2本の荷重-変位曲線ではさまれる部分の面積は、式(11)より、考える構成条件のもとにおける  $\mathcal{E}(t, a_0) \cdot da_0$  に等しくなる。そこで、弾塑性体を考える場合において塑性域が小さく、荷重-変位曲線の関係がほぼ線形と見なしうる場合(小規模降伏)には、図8において

$$(\text{横線部の面積}) \approx (\text{縦線部の面積}) \quad (24)$$

が成り立ち、線形弾性体に対しては式(20)が成り立つことも考慮すると

$$\mathcal{E}^c(t, a) \approx \frac{\kappa+1}{8G} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{K_{III}^2}{2G} \quad (25)$$

が成り立つことになる。ただし、小規模降伏であっても、わずかでも塑性変形が生じる限り(横線部の面積)をエネルギー解放率と結び付けることはできず

$$\mathcal{Y} \approx \frac{\kappa+1}{8G} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{K_{III}^2}{2G} \quad (26)$$

は成り立たないことに注意したい。

式(11)の右辺は荷重-変位曲線により定義された  $J$  積分<sup>23)</sup> に一致するものとなっており、従って荷重-変位曲線による  $J$  は CTED にほかならないことがわかる。ただ

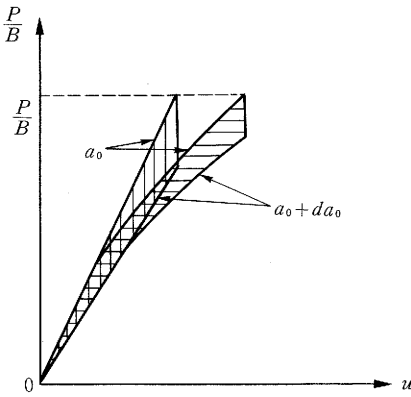


図 8 荷重-変位曲線とCTED

し、この $J$ が径路独立積分として定義された $J$ 積分に一致するのは全ひずみ理論による場合のみであり、一般には両者は一致しない。

疲労き裂パラメータ $\Delta J$ の意味もCEDにより説明され<sup>9)</sup>、安定成長き裂に対する $dJ/da$ は、 $J$ -controlled growthの条件が満たされるとき、CEDの上乗せ率 $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(t, a)$ に一致することが証明される<sup>17)</sup>。

クリープ  $C^*$ パラメータはクリープ・ポテンシャルの存在を前提に定常クリープ状態において定義されており、このとき、 $C$ を定数、 $\dot{\mathcal{E}}^c(t, a_0) = \partial \mathcal{E}^c(t, a_0) / \partial t$ として

$$C^* = C \dot{\mathcal{E}}^c(t, a_0) \quad (27)$$

が成り立つ<sup>14)</sup>。特にクリープ則がNorton則 $\dot{\epsilon}_{cr} = D\bar{\sigma}^n$ で与えられるときには $C = n / (n + 1)$ である。ここで $\dot{\epsilon}_{cr}$ は相当クリープひずみ速度、 $\bar{\sigma}$ は相当応力、 $D, n$ は材料定数である。

以上のように、従来のパラメータは、それらが定義されるための条件を課すことによりすべてCEDと対応づけられ、CTODについては他のパラメータと比べると少し異質であるが、非連続き裂モデルを考えるとき、式(5)、(6)よりCTEDと対応づけられることがわかる。

#### 4. パラメータとしての意味

3.1 節のCEDと荷重-変位曲線の関係はここでとりあげた切欠き裂モデルや非連続き裂モデルに限らず、より複雑なき裂端の状況を想定するモデルに対しても成り立つ<sup>9)</sup>。そしてこのことは、図9において実線と破線を異なる2つのき裂モデルに対する荷重-変位曲線とするとき、面積 $OAB \sim$ 面積 $OA'B'$ が成り立てば、き裂端部で起こっている状況は全く異なっても、それぞれのモデルに対するCTEDについてはその値はほぼ等しくなることを意味している。ここで、いま仮に非連続き裂モデルで実現される状況が真実であるとし、ところがわれわれは真実を知らないので問題を切欠き裂モデルやその

$\rho \rightarrow 0$ とする極限である完全に鋭いき裂を考えるモデルで扱っているという場合を考える(現実の状況が正にこれである)。このとき非連続き裂モデルに対するCTEDは正にき裂端での真実を反映するものであり、き裂端で起こっている変化の程度をエネルギーの次元で代表するものとなっている。荷重-変位曲線における差異が小さければCTEDの値における差も小さいということは、この真実を反映したCTEDが切欠き裂モデルや $\rho \rightarrow 0$ のき裂モデルに対するCTEDで間接的に評価できるということを意味しており、これらのモデルによるCTEDが真実のき裂端で生じる変化の程度を代表するパラメータとなることを示している。これが実際のき裂問題への適用におけるCTEDのパラメータとしての意味であり、実際のき裂端での状況は極めて複雑であるが、少なくとも荷重-変位曲線において大きな差異を生じることがないように適切なモデルを用いている限り、それによって評価されるCTEDは現実のき裂端での変化の程度をエネルギーの次元で代表的に表すパラメータとなっていることになる。

$K$ や $J$ は従来それらが支配する特異場の概念によってパラメータとしての意味が説明されているが、大切なのは、例えば $K$ であれば実際の荷重-変位曲線を線形と見なすことに無理がないかどうか、すなわち式(25)が成り立つかどうかであり、 $K$ 支配場は存在しなくともこれさえいえれば、CTEDを介して $K$ はき裂端そのものでの変化の程度を代表的に表すパラメータと考えられることになる。 $J$ についても同様である。

なおCEDと荷重-変位曲線の間の関係により、切欠き裂モデルでは $\rho$ を十分小さくすれば、非連続き裂モデルでは非連続面の剛性を十分大きくすれば、CEDの分布は影響を受けるが、CTEDについてはそれらの値の影響をほとんど受けなくなることも説明され、この事実はCTEDの実際の評価において有用である。

### 5. 弾塑性破壊問題への適用

#### 5.1 安定成長き裂の破壊抵抗評価

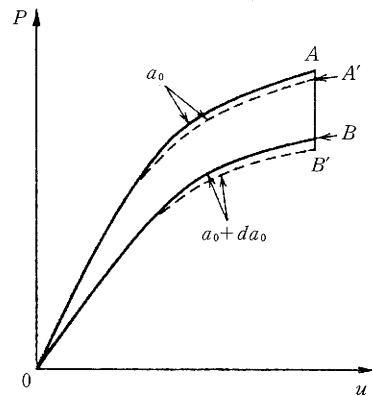


図 9 異なるき裂モデルに対する荷重-変位曲線

CEDがパラメータとして前章で述べたような意味を持つ、すなわち、考える位置における現在までの変化の程度を代表的に表しうるものとするれば、一定の破壊様式で進展するき裂についてはその破壊抵抗をCEDで表すとき(下付きcを付して表す)、 $\mathcal{E}_c(t,a)$ は一定、 $\mathcal{E}_c(t, X_1)$ は一樣な分布で推移することが期待される。このとき

$$\frac{d\mathcal{E}_c(t,a)}{da} = \frac{\partial \mathcal{E}_c(t,a)}{\partial a} + \frac{\partial \mathcal{E}_c(t,a)}{\partial X_1} = 0 \quad (28)$$

であり、 $\mathcal{E}_c(t, X_1)$ が一樣分布であることから $\frac{\partial \mathcal{E}_c(t,a)}{\partial X_1}$ も一定で、従って $\frac{\partial \mathcal{E}_c(t,a)}{\partial a}$ も一定となることが期待される。

そこで一樣な平面ひずみ破壊が保たれるように図10のような溝付き試験片を作成し破壊実験を行った<sup>18)</sup>。材料はアルミニウム合金2024-T3である。図11は各初期き裂長さに対する、荷重点変位の増加に伴う荷重と成長き裂の変化を示すものであり、図中の●、■等は破面から測定した内部のき裂長さ、階段状折れ線は実験中表面から観察したき裂長さである。両者はほぼ一致し、き裂は前縁の形状を直線状に保ちながら進展したことがわかる。図12はこの結果を双3次のB-spline関数で平滑化したものであり、これを式(11)、(13)に適用して $\mathcal{E}_c(t, a_0)$ 、 $\frac{\partial \mathcal{E}_c(t,a)}{\partial a}$ を評価している。図13、14はその結果であり、図13の各曲線の最終点がき裂進展開始点の $\mathcal{E}_c(t_0, a_0)$ を表す。 $\mathcal{E}_c(t_0, a_0)$ はほとんど初期き裂長さの影響を受けない。図14は $\frac{\partial \mathcal{E}_c(t,a)}{\partial a}$ の変化を示すものであり、予想どおりほぼ一定の値となっており初期き裂長さの影響もほとんど受けていない。図中のSECPは別途行った同一材料の厚さ1mmの薄板に対する結果であり<sup>19)</sup>、この場合

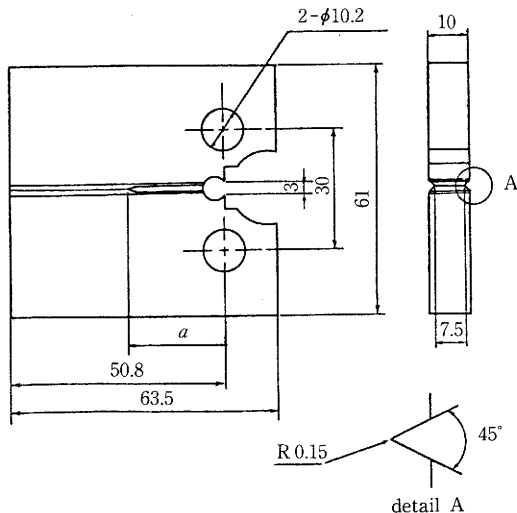


図10 溝付きCT試験片

はき裂進展開始時の引裂き型の破壊から徐々にshear lipが成長し、完全に剪断型の破壊となったところから $\frac{\partial \mathcal{E}_c(t,a)}{\partial a}$ は一定となっている。

図15は、一樣の破壊様式のもとでは式(28)が成り立つことが期待され、さらに $\frac{\partial \mathcal{E}_c(t,a)}{\partial a}$ は直接実験により求められることから、 $\frac{\partial \mathcal{E}_c(t,a)}{\partial X_1}$ をそれぞれ平面ひずみ型破壊時と剪断型破壊時における $-\left(\frac{\partial \mathcal{E}_c(t,a)}{\partial a}\right)$ の値として

$$\mathcal{E}_c(t,a) = \mathcal{E}_c(t_0, a_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\mathcal{E}_c(\tau, a)}{d\tau} d\tau \quad (29)$$

により、CTEDの変化を求めたものである。当然ではあるが、平面ひずみ破壊のときには進展開始からその後の進展時においてもCTEDは一定に保たれ、SECPの場合は、引裂き型からshear lipが増すと共にCTEDは増大し、完全な剪断型の実現以後では一定となっている。

図16はき裂の進展も考慮したErnstの式<sup>24)</sup>によりJ積分を評価したものであり、3.3節で述べたように、き裂進展開始時に近いところでは $\frac{dJ}{da} = \frac{\partial \mathcal{E}_c(t,a)}{\partial a}$ に一致するはずのものであるが、0.0059KN/mm<sup>2</sup>となって両者はぴったり一致している。

以上から、破壊様式が一定であればCEDによる破壊抵抗は一定になり、その値は破壊様式に固有の値をとるといえそうである。

### 5.2 混合モード下の破壊

式(10)で定義される $\mathcal{E}_\varphi^I(t)$ の $\varphi$ に関する最大値を $\mathcal{E}_{\varphi\max}^I$ と表すことにする。このときモードIのみが加わる場合には $\mathcal{E}_{\varphi\max}^I = \mathcal{E}_{\varphi=0}^I(t) = \mathcal{E}(t, a_0)$ となり、3.3節で述べたように荷重-変位曲線によるJ積分は $\mathcal{E}(t, a_0)$ にほかならないので、いわゆる $J_{Ic}$ クライテリオンは $\mathcal{E}_{\varphi\max}^I = \mathcal{E}_{\varphi=0}^I(t) = \mathcal{E}(t, a_0) = \mathcal{E}_{Ic}(t_0, a_0) = J_{Ic}$ と書ける。したがって混合モードの場合、 $J_{Ic}$ クライテリオンの一つの自然な拡張として、 $\mathcal{E}_{\varphi\max}^I = \mathcal{E}_{Ic}(t_0, a_0) = J_{Ic}$ と

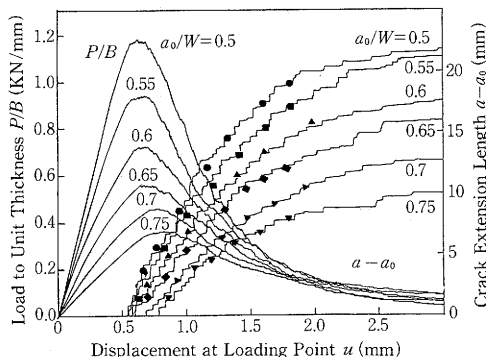


図11 荷重点変位の増加に伴う荷重とき裂成長の変化

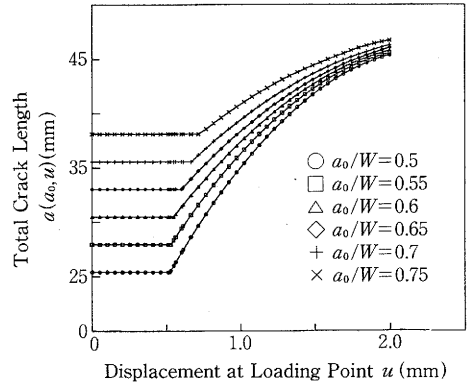
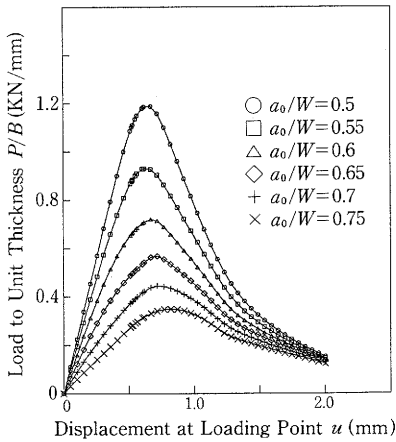


図12 平滑化した荷重点変位の増加に伴う荷重とき裂長さの変化

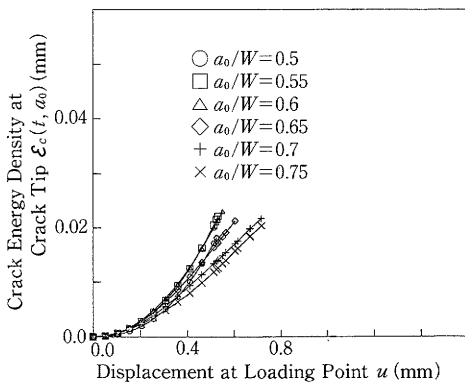


図13 き裂進展前のCTED

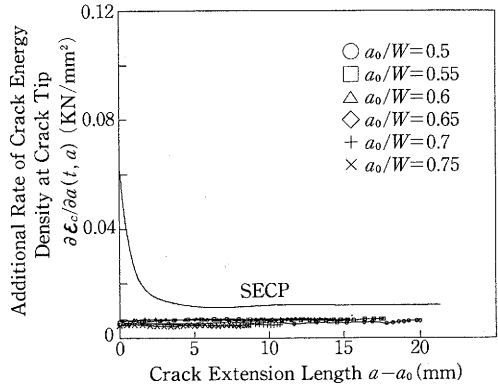


図14 CED上乘せ率の変化

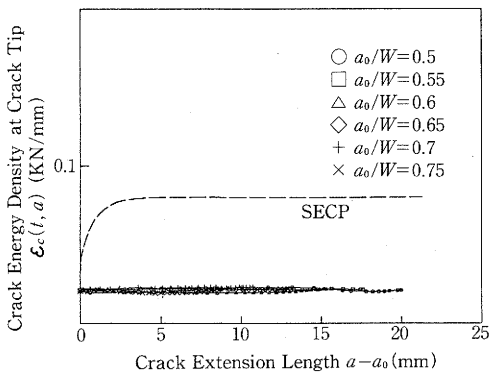


図15 き裂進展に伴うCTEDの変化

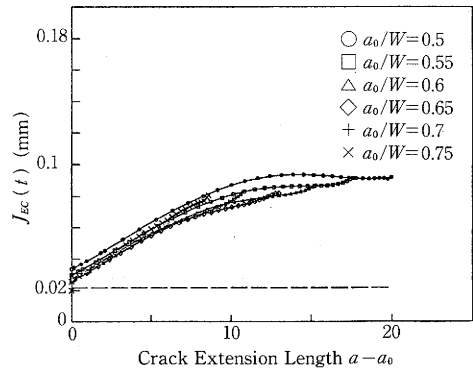


図16 き裂進展に伴うJ積分の変化

なったとき、 $\mathcal{E}_{\varphi_{\max}}^I$ が得られる方向に破壊が起こると考えることができ、これを $\mathcal{E}_{\varphi_{\max}}^I$ クライテリオンとよぶことにする。このクライテリオンの式(22)の $\mathcal{E}_{\varphi}^{Ic}(t)$ を用いての脆性破壊への有効性は示されており<sup>11)</sup>、ここでは弾

塑性破壊への適用例を示す。すなわち、高松らによる図17の形状のアルミニウム合金2024-T3による弾塑性破壊実験結果<sup>25)</sup>に $\mathcal{E}_{\varphi_{\max}}^I$ クライテリオンを適用した結果が図18であり<sup>20)</sup>、坂田らにより試みられているクライテリオ



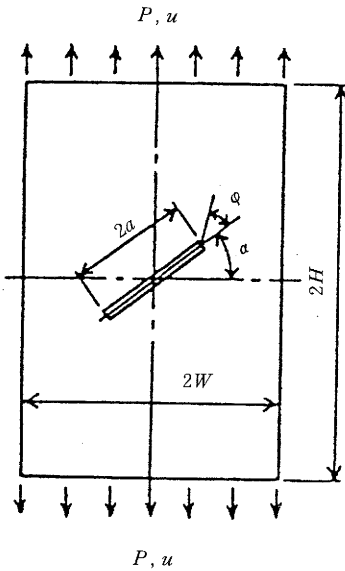


図17 斜向き裂を有する試験片

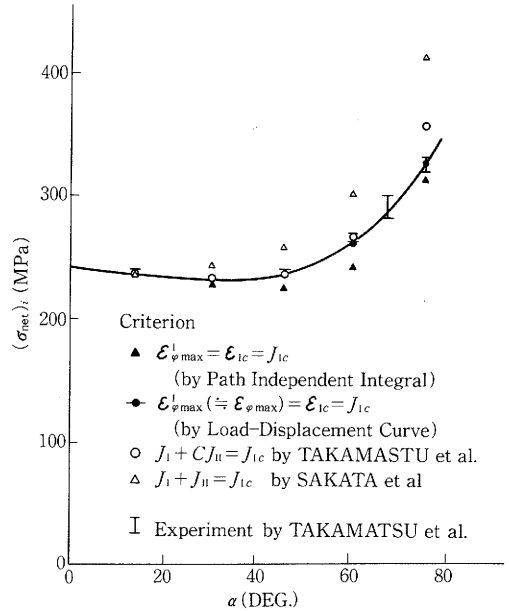


図18  $(\sigma_{net})_i$  と  $\alpha$  の関係

ン<sup>26)</sup>と高松らによるクライテリオン<sup>25)</sup>による結果もあわせ示してある。ここで $(\sigma_{net})_i$ は破壊開始時における負荷軸方向に垂直な最小断面における応力 $((\sigma_{net})_i = P / (2W - 2a \cos \alpha) B)$ である。図中▲は式(17)の径路独立積分 $E_{J\phi}^I(t)$ により $E_{\phi_{max}}^I$ を有限要素解析して得られた結果であり、この方法によるときき裂の傾き角 $\alpha$ が大きくなると $E_{J\phi}^I(t)$ を大き目に評価する傾向があるので、 $E_{\phi}^I(t)$ が最大となる $\phi$ のあたりで $E_{\phi}(t)$ も最大となり、その値 $E_{\phi_{max}}$ が $E_{\phi_{max}}^I$ とほぼ等しくなる性質を利用し、式(12)に基づく荷重-変位曲線による $E_{\phi}(t)$ の評価と $E_{J\phi}^I(t)$ 積分による評価を併用して考案した精度良い $E_{\phi_{max}}^I$ の評価法<sup>19)</sup>により得られた結果が●である。この結果は実験値と $\alpha$ の全域にわたって一致し、モードIのみが存在する場合に $E_{\phi_{max}}^I$ クライテリオンを適用した結果がいわゆる $J_{Ic}$ クライテリオンになっていることも考慮するとき、 $E_{\phi_{max}}^I$ クライテリオンは開口型破壊に対する脆性破壊から延性破壊までの統一的クライテリオンになっている可能性がある。

6. おわりに

CED概念を中心にした破壊力学の要点を紹介した。CEDと荷重-変位曲線との間の関係は相手が弾性体であれ弾塑性体であれ成立するが、エネルギー解放率と荷重-変位曲線との間の同様の関係は弾性体に対してしか成り立つものではないことに注意したい。このことはエネルギー解放率の概念に基づいて展開しようとしてできなかったことが、CEDの概念によれば可能となることを示唆しているものといえる。いずれにせよ、破壊力学にCEDの概念を取り込むことにより、破壊力学自体の見通

しがよくなり、その可能性が増すものと思われる。

(1989年6月1日受理)

参考文献

- 1) A.A. Griffith, Phil. Trans. Roy. Soc., 221(1920), 163.
- 2) G.R. Irwin, Fracturing of Metals, (1948), ASM. 152.
- 3) J.W. Hutchinson, J. Mech. Phys. Solids, 16-1(1968), 13.
- 4) B. Budiansky and J.R. Rice, J. App. Mech., ASME, 40(1973), 201.
- 5) 岸本, 青木, 坂田, 機論, 46-410, A (1979), 1049.
- 6) S.N. Atluri, Eng. Frac. Mech., 16-3(1982), 341.
- 7) 渡辺, 機論, 47-416, A (1981), 406.
- 8) 渡辺, 機論, 48-433, A (1982), 1226.
- 9) 渡辺, 機論, 51-463, A (1985), 873.
- 10) 渡辺, 畔上, 機論, 52-475, A (1986), 727.
- 11) 渡辺, 塩見, 機論, 49-446, A (1982), 1277.
- 12) 渡辺, 宇都宮, 機論, 53-491, A (1986), 1285.
- 13) 渡辺, 機論, 50-453, A (1984), 894.
- 14) 渡辺, 倉繁, 機論, 50-454, A (1984), 1291.
- 15) 渡辺, 宇都宮, 機論, 54-503, A (1987), 1383.
- 16) 渡辺, 吉川, 機論, 53-487, A (1987), 573.
- 17) 渡辺, 畔上, 機論, 52-480, A (1986), 1899.
- 18) 畔上, 権, 渡辺, 機論に投稿中.
- 19) 渡辺, 畔上, 平野, 機論, 52-475, A (1986), 736.
- 20) 宇都宮, 渡辺, 機論に投稿中.
- 21) 渡辺, 佐藤, 機論, 53-488, A (1987), 786.
- 22) D.S. Dugdale, J. Mech. Phys. Solids, 8(1960), 100.
- 23) J.R. Rice, P.C. Paris and J.G. Merkle, ASTM STP 536(1973), 231.
- 24) H. Ernst et al., ASTM STP 743(1981), 476.
- 25) 高松, 市川, 機論, 53-486, A (1987), 246.
- 26) 坂田ほか4名, 機論, 51-469, A (1985), 2129.