研究解説　　UDC 666.6：539.4.011

セラミックスの破壊力学
――マイクロクラックによる高靱性化について――
Fracture Mechanics of Ceramics
――On Microcrack Toughening――

都井　裕*
Yutaka TOI

セラミックスの破壊力学，特にマイクロクラックによる高靱性化（Microcrack Toughening）に関し，筆者らの，連続体損傷力学に基づく計算力学的アプローチの成果を参照しながら，解説を加える．

1．序

ファインセラミックスが，耐熱性，耐摩耗性，耐腐食性，高温強度，硬度，断熱性，軽量性などの諸点において優れていることから，新しい構造材料の一つとして注目を集めており，これらの利点を生かして，工作機械・工具類，エンジン部品，化学機器部品，耐熱構造材，スポーツ用品などに応用されていることはよく知られているが，セラミックスは元来，その原子間結合（イオン結合あるいは共有結合）および結晶構造（複雑ですきまが多い）より，転移の移動あるいは増殖が金属のように容易ではなく，その結果，塑性変形をほとんど伴わずに急激に破壊する，脆性あるいは半脆性と呼ばれる挙動を示す[1),2)]．

この欠点を改善した高靱性セラミックスとして，部分安定化ジルコニアなどのように，ジルコニアの応力誘起変態（Stress-Induced Transformation：せん断的体積膨張を伴う，正方晶→単斜晶マルテンサイト変態）を利用したものと，ジルコニア分散セラミックスなどのように，ジルコニア粒子周辺に発生する微細割れ（Microcrack）が破壊エネルギーの消費に大きく寄与しているものとがある．前者のような応力誘起変態を利用した強靱化はTransformation Toughening[8),9)]と呼ばれており，後者のようなマイクロクラックによる高靱性化はMicrocrack Toughening[10)-19)]と称されている．

本解説は，このMicrocrack Tougheningを伴うセラミックスの破壊力学に対する連続体力学的アプローチ，特に著者らが試みた有限要素法による計算力学的アプローチ[3)-7)]を紹介することを目的としている．2章で，この問題に対する既存の研究を簡単に紹介し，3章では，有限要素解析で用いた，マイクロクラッキングを伴う脆性固体の構成式について述べる．続く4章，5章ではそれぞれ，静的定常亀裂，動的伝播亀裂に対する有限要素解析結果について述べる．最後の6章は結言である．

2．セラミックスのMicrocrack Toughening

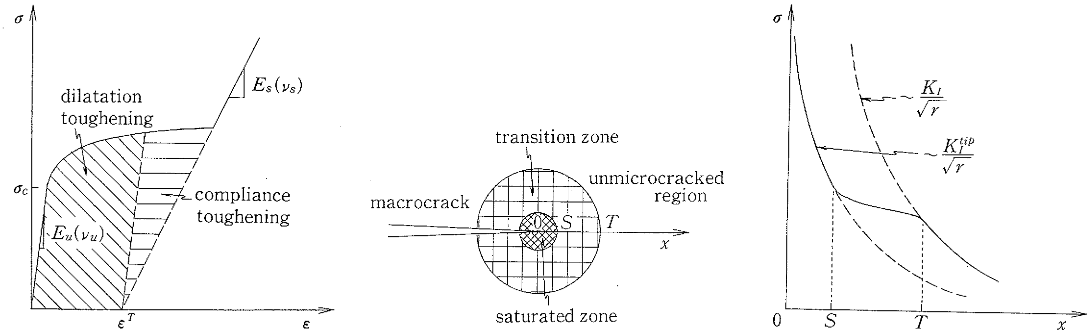
セラミックスを含む多結晶脆性体の製造過程（焼結後の冷却過程）においては，単相材料では結晶の熱的異方性，多相材料では相間の熱膨張率の相違により残留応力が生ずる．この残留応力により，結晶粒界あるいは分散粒子とマトリックス間に応力集中が誘起され，マイクロクラックが発生する．固体に作用する外力（引張力）が増大すると，すでに存在するマイクロクラックはそれぞれの粒界に同じサイズで留まるが，他の粒界に新たなマイクロクラックが生ずる．すなわち，マイクロクラック密度の増加という形で損傷が進展し，その結果として固体の弾性定数が低下する．引張力の向きに対し都合のよい方向を向いたすべての結晶粒界，あるいはすべての分散粒子周辺にマイクロクラックが発生すると，それ以上マイクロクラック密度は増加せず，マイクロクラックの飽和現象が起こり，それ以後，弾性定数値は一定値を保つ（すなわち，再び線形弾性挙動を呈する）．また，マイクロクラックの発生によって，初期の残留応力が一部解放されることにより，材料中に伸びを生じ，これが除荷時の永久ひずみ（Transformation Strain）となる．

ここに述べた材料挙動を，応力・ひずみ線図として書き表したものがFig.1(a)である．図中，E_uは初期のヤング率，σ_cはマイクロクラックが発生する応力，E_sはマイクロクラック飽和後のヤング率，ε^Tは永久ひずみである．なお，ポアソン比の値もマイクロクラックの影響により変化する．初期の値をν_u，飽和後の値をν_sと記すことにする．

このようなマイクロクラッキングを伴う脆性固体において見られるMicrocrack Toughening現象については，文献10)，11)，13)，14)，16)，17)，19）などで，理論解析的な考察が試みられている．

静荷重を受ける定常（停留）亀裂に関する主要な結果

*東京大学生産技術研究所　第2部



(a) stress-strain relation　(b) microcracking near the crack-tip　(c) stress distribution near the crack-tip

Fig. 1　Concept of microcrack toughening

は以下のとおりである[19]．すなわち，脆性固体中の定常マクロクラック（Macrocrack：微視的構造に比べ十分大きいサイズの亀裂）を考え，マクロクラック先端近傍のマイクロクラック損傷領域が十分に小さいと仮定する（いわゆる「小規模降伏」と同様の仮定である）．また，定常亀裂，すなわちクラック成長開始に関する議論では重要な役割は果たさない永久ひずみε^Tは零とし，荷重は単調増加であり，除荷も伴わないと仮定する（すなわち，非線形弾性挙動）．これらの仮定のもとで，モードⅠ（開口型変形）の荷重をうける半無限長クラックを考える（以下，マクロクラックを単にクラックと表現する）．

クラック先端近傍を囲む領域は，Fig. 1(b)に示すように，3つの領域に分けられる．すなわち，最も内側のマイクロクラックが飽和している領域，その外側のマイクロクラックが発生してはいるがいまだ飽和していない領域，さらに最も外側のマイクロクラックが発生していない領域である．マイクロクラック飽和領域では，前述したように，材料は再び線形弾性挙動を呈しており，この領域内における積分路から計算されるJ積分[20]J_tとクラック先端近傍の応力拡大係数$K_I{}^{tip}$とは，次式の関係にある．

$$J_t=\{(1-\nu_s{}^2)/E_s\}(K_I{}^{tip})^2 \qquad (1)$$

また，クラック先端から十分に離れた，マイクロクラック未発生領域における積分路から計算されるJ積分J_uは，小規模マイクロクラッキングの仮定より，マイクロクラック損傷領域が存在しない場合のクラック先端近傍の応力拡大係数K_Iと，次式の関係にある．

$$J_u=\{(1-\nu_u{}^2)/E_u\}(K_I)^2 \qquad (2)$$

K_Iは，(1)式に対する外力項と考えてもよい．非線形弾性場におけるJ積分の経路独立性より，

$$J_t=J_u \qquad (3)$$

が成立する．したがって，(1)式および(2)式より，$K_I{}^{tip}$とK_Iの比として次式を得る．

$$K_I{}^{tip}/K_I=\sqrt{(1-\nu_u{}^2)E_s/(1-\nu_s{}^2)E_u} \qquad (4)$$

一般に，$E_s<E_u$および$\nu_s<\nu_u$であるから，

$$K_I{}^{tip}/K_I<1 \qquad (5)$$

となり，クラック先端近傍の応力レベルの低下という形で，Microcrack Tougheningが生じていることがわかる．Fig. 1(c)はこれを模式的に示した図である．なお，実際には，破壊靱性値K_cもマイクロクラッキングにより低下すること（すなわち，強度劣化）を考慮しなければならず，(5)式がそのままMicrocrack Tougheningの定量的評価ということにはならない．

他方，クラックの安定成長時のMicrocrack Tougheningについても，文献11)，13)，16)などで解析的に考察されている．

定常亀裂，すなわちクラックの成長開始条件に関する議論では，(4)式に示されたように，マイクロクラック飽和時の弾性定数（主としてヤング率）が支配的なパラメータであったが，クラック成長時のMicrocrack Tougheningを議論する場合には，クラック先端近傍に形成されたプロセスゾーン（この場合はマイクロクラック領域）の名残りであるプロセスゾーンウェイクにおいて消費された非可逆的エネルギーが重要な役割を果たす．すなわち，クラックの進展をエネルギーの収支の立場から記述すると，以下の式が成立する[21]．

$$\partial W/\partial A=\partial(U_e+U_n)/\partial A+\partial\Gamma/\partial A+\partial K/\partial A \qquad (6)$$

ここに，∂Aはクラック面積の増分を表し，W，U_e，U_n，Γ，Kはそれぞれ，外部エネルギー，弾性ひずみエネルギー，塑性などによる散逸エネルギー，破面形成エネルギー，運動エネルギーである．ここで，外部エネルギーの増分から弾性ひずみエネルギー，散逸エネルギー，運動エネルギーの増分を差し引いた量，すなわち

$$\partial W/\partial A-\{\partial(U_e+U_n)/\partial A+\partial K/\partial A\} \quad (=\partial\Gamma/\partial A) \qquad (7)$$

は，クラック進展に費やされる正味のエネルギーであり，クラック進展の推進力と考えることができる．前述の，プロセスゾーンウェイクにおいてマイクロクラッキングにより散逸するエネルギーは，上式の$\partial U_n/\partial A$の項に含

まれる量であり，これが大きくなるほど，クラック進展のDriving Forceは小さくなり，材料はより強靱化されたと考えることができる．マイクロクラッキング材料におけるこの散逸エネルギーはFig. 1(a)の斜線部により表され，この散逸エネルギーによるMicrocrack Tougheningは，図に示すように，Compliance TougheningおよびDilatation Tougheningの2成分より成ると考えることができる．

以上に紹介した定常亀裂および伝播亀裂におけるMicrocrack Tougheningに関する議論ではいずれも，小規模マイクロクラッキングの条件下で，特に伝播亀裂に対しては多くの仮定を設けて，応力拡大係数の低減率によりMicrocrack Tougheningを論じており，慣性力の影響も考慮されていない．CharalambidesとMcMeeking[15),18)]による有限要素解析の試みはあるが，上述の諸研究の枠を出ていない．

次章以降で紹介する筆者らが実施した計算力学的見地からの研究においては，これらの制限を排除し，前述の諸研究を一般化するとともに，より実際の現象に即した解析結果を呈示することを目的としている．

これを行うためにまず，Microcrack Tougheningの程度を評価する際に用いる，クラック先端の力学的環境を表すパラメータを選択しなければならない．本研究では，積分形パラメータであるJ積分を，動的問題を含む任意の材料非線形問題に一般化したT^*積分を用いることとした．これは，以下のように定義される[22)]．

$$T^*=\int_{\Gamma_e}[(W+T)n_1-t_i(\partial u_i/\partial x_1)]d\Gamma \tag{8}$$

ここに，

x_i　：直角座標系

　　（x_1はクラック方向，x_2はクラックに垂直）

Γ_e　：クラック先端を囲む任意の小ループ

t_i　：Γ_e上のtractionのx_i方向成分

u_i　：変位のx_i方向成分

n_1　：Γ_e上の外向き法線のx_1方向成分

W　：次式で定義される単位体積当たりの全応力仕事密度

$$W=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \tag{9}$$

T　：次式で定義される単位体積当たりの運動エネルギー

$$T=(1/2)\rho\,\dot{u}_i\dot{u}_i \tag{10}$$

（記号についてはFig. 2を参照）．実際の計算はEDI法（Equivalent Domain Integral法）[23)]により，上式を以下のような面積分形に書き換えた上で行う．

$$\begin{aligned}T^*=&-\int_{A-A_e}\{(W+T)(\partial S/\partial x_1)\\&-\sigma_{ij}(\partial u_i/\partial x_1)(\partial S/\partial x_j)\}dA\\&-\int_{A-A_e}\{\partial(W+T)/\partial x_1-\sigma_{ij}(\partial\varepsilon_{ij}/\partial x_1)\\&-\rho\ddot{u}_i(\partial u_i/\partial x_1)\}SdA\end{aligned} \tag{11}$$

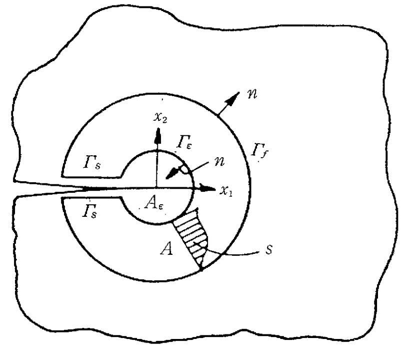


Fig. 2　Nomenclature for a plane crack

ここに，

A_e　：Γ_eにより囲まれる領域

Γ_f　：クラック先端を囲むΓ_eより外側のループ

A　：Γ_fにより囲まれる領域

S　：次式の条件を満たす任意の連続関数

$$S=1 \text{ on } \Gamma_e \text{ および } S=0 \text{ on } \Gamma_f \tag{12}$$

T^*積分は，線形・非線形弾性体中の静的定常亀裂に対してはJ積分と一致し，また，弾性体中の高速伝播亀裂に対してはエネルギー解放率と等価である．一般の材料非線形問題に対しては，明確な物理的意味をもたないが，経路独立性なども含め，J積分の自然な拡張となっており，ほぼ(7)式左辺に相当する量と考えてよい．本研究では，亀裂パラメータとして一貫してこのT^*積分を用いることとする．

3．マイクロクラッキングを含む脆性固体の構成式

本章では，次章以降に述べるMicrocrack Tougheningに関する有限要素解析において用いられる，マイクロクラッキングを伴う脆性体の構成式について説明する．本構成式は，McMeekingら[15),18)]の有限要素解析において用いられた，Fu[12)]，Evans[13)]，BudianskyとO'Connell[24)]らに基づく連続体損傷モデル[25)]を増分形に書き改め，ひずみ速度の影響を取り入れたもので，以下のように記述される[3)]．

文献15）においては，Fu[12)]に基づき，マイクロクラック密度ξと相当応力σ_eの関係として，次式が仮定されている．

$$\begin{aligned}\xi&=0 && \text{when}\quad \sigma_e<\sigma_c\\ \xi&=\lambda(\sigma_e-\sigma_c) && \text{when}\quad \sigma_c\leqq\sigma_e\leqq\sigma_s\\ \xi&=\lambda(\sigma_s-\sigma_c) && \text{when}\quad \sigma_e>\sigma_s\\ &=\xi_s\end{aligned} \tag{13}$$

ここに

$$\sigma_e=\sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$$

式中，σ_cはマイクロクラックが発生する限界応力値であり，σ_sはマイクロクラック密度が飽和する応力値，ξ_sはその飽和値である．$\sigma_c \leqq \sigma_e \leqq \sigma_s$の応力レベルにおいて，$\xi$は$(\sigma_e-\sigma_c)$に比例して増大し，その比例係数が$\lambda$である．ただし，マイクロクラックは最大主応力が引張力である領域にのみ生ずると仮定する．ここでは，(13)式にひずみ速度の影響を追加した，次式を用いる．

$$\dot{\xi}=0 \qquad \text{when} \quad \sigma_e<\sigma_c \tag{14a}$$

$$\dot{\xi}=(1/\eta)\{\sigma_e/(\sigma_c+\xi/\lambda)-1\} \qquad \text{when} \quad (\sigma_c+\xi/\lambda)\leqq\sigma_e \tag{14b}$$

$$\dot{\xi}=0 \qquad \text{when} \quad \xi_s\leqq\xi \tag{14c}$$

ここに，(・)は時間微分を意味する．(14b)式では，標準的な粘塑性理論[26]と同様の考え方によりひずみ速度の効果を導入しており，粘性係数がηである．

BudianskyとO'Connell[24]に基づけば，マイクロクラックの存在により，弾性定数は次式のように変化する．

$$E_m/E_u=\nu_m/\nu_u=1-(16/9)\xi=1/f \tag{15}$$

ここに，E_m，ν_mはマイクロクラックの発生後のヤング率とポアソン比である．(15)式におけるマイクロクラック密度ξの定義は，

$$\xi=(2N/\pi)\ \langle A^2/P\rangle \tag{16}$$

であり，ここに，Nは単位体積当たりのマイクロクラック数，Aはマイクロクラック面積，Pは周長，記号〈 〉は平均値を意味する．直径Dの円形マイクロクラックの場合は，$A=\pi D^2/4$, $P=\pi D$であるから，(16)式より$\xi=ND^3/8$となる．また，fは弾性定数低減率の逆数であり，ξと次式のような関係にある．

$$f=9/(9-16\xi) \tag{17}$$

この式を時間微分すると，次式を得る．

$$\dot{f}=144/(9-16\xi)^2\cdot\dot{\xi} \tag{18}$$

3次元等方線形弾性体の構成式におけるヤング率およびポアソン比を(15)式のE_m，ν_mで置き換えた式：

$$\varepsilon_{ij}=(f+\nu)/E_u\cdot\sigma_{ij}-\nu/E_u\cdot\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{19}$$

を時間微分すると次式を得る．

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=(f+\nu)/E_u\cdot\dot{\sigma}_{ij}-\nu/E_u\cdot\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij}+\dot{f}/E_u\cdot\sigma_{ij} \tag{20}$$

(14)式を，(17)式，(18)式とともに，(20)式に代入すると，3次元マイクロクラック脆性体に対する，次のひずみ速度依存型構成式を得る．

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}=(1+\nu)/E_u\cdot\dot{\sigma}_{ij}-\nu/E_u\cdot\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{when} \quad \sigma_e<\sigma_c \tag{21a}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{ij}&=C_{ijkl}(\xi)\dot{\sigma}_{kl}+\dot{\varepsilon}_{ij}^{ve}(\sigma_{ij},\xi)\\&=\{9/(9-16\xi)+\nu\}/E_u\cdot\dot{\sigma}_{ij}-\nu/E_u\cdot\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij}\\&\quad+\{144/(9-16\xi)^2\cdot(1/\eta)[\sqrt{\sigma_{ij}\cdot\sigma_{ij}}/(\sigma_c+\xi/\lambda)-1]\}/E_u\cdot\sigma_{ij}\\&\qquad \text{when} \quad (\sigma_c+\xi/\lambda)\leqq\sigma_e\end{aligned} \tag{21b}$$

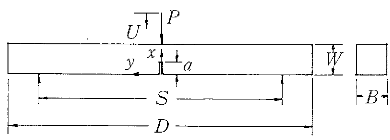
$$\dot{\varepsilon}_{ij}=C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}=\{9/(9-16\xi_s)+\nu\}/E_u\cdot\dot{\sigma}_{ij}-\nu/E_u\cdot\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} \qquad \text{when} \quad \xi_s\leqq\xi \tag{21c}$$

(21b)式からわかるように，この場合の全ひずみ速度は，マイクロクラックによる弾性定数低下を反映した非線形弾性成分と，マイクロクラッキングに対するひずみ速度効果を反映した見かけ上の粘弾性成分の2成分より成る．有限要素解析では，この非線形弾性成分は接線剛性において考慮し，粘弾性成分は初期ひずみとして扱う．

4．静的定常亀裂の有限要素解析

Fig. 3に示すSENB (Single Edge Notched Beam)の3点曲げ問題に対する有限要素解析結果[4]について述べる．使用した材料定数値は$E_u=0.161\times10^{12}$(N/m²)，$\nu_u=0.225$，$\sigma_c=0.226\times10^8$(N/m²)，$\lambda=0.154\times10^{-6}$(m²/N)，$\xi_s=0.37$，$\eta=0.1$(1/sec)である．Fig. 4はFig. 3の試験体の左半分に対する要素分割図(240要素，279節点，544自由度)であり，双一次変位場を仮定した4節点アイソパラメトリック要素が使用されている．Fig. 5は，計算された荷重・荷重点変位の関係である．Fig. 6は，切欠き先端近傍のマイクロクラッキング進展図であり，各要素ごとに4つのGauss積分点におけるマイクロクラック密度の最大値をプロットしている．$P=91.2$[N]の状態を見ると，切欠き先端近傍が，2章で述べたような3つの領域に分かれていることがわかる．

Fig. 7は，同じ荷重レベルにおける切欠き先端付近の



$W=5$, $B=10$, $a=2$, $S=40.6$, $D=50$ [mm]

Fig. 3　Three-point bending of a SENB

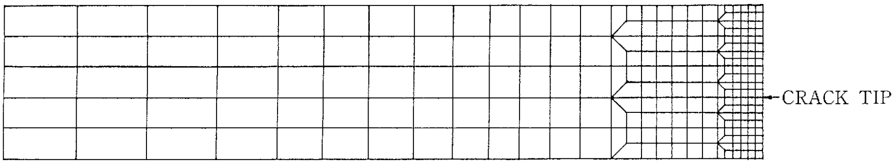


Fig. 4　Finite element mesh subdivision

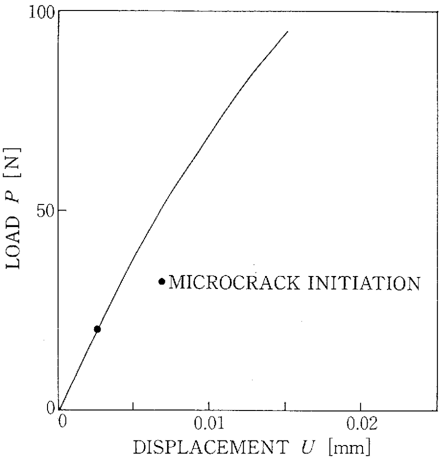


Fig. 5　Load-displacement curve

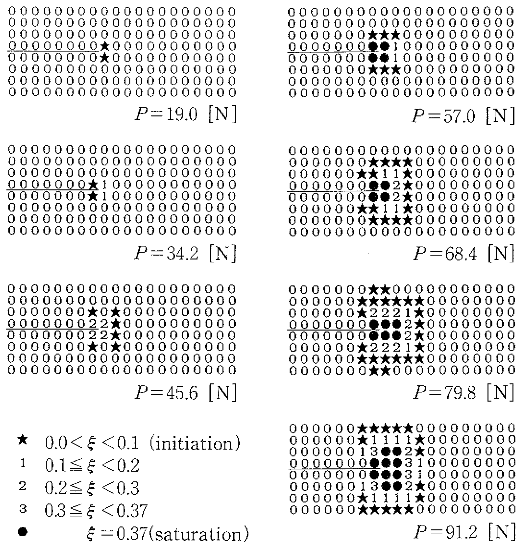


Fig. 6　Development of the zone of microcracks near the notch

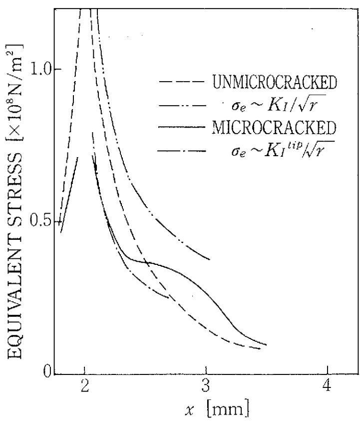


Fig. 7　Equivalent stress distribution near the notch

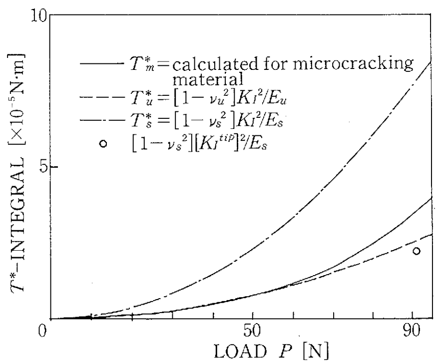


Fig. 8　Variation of T^*-integral with load for the stationary crack

相当応力分布である．図には，マイクロクラッキング材料に対する計算結果（実線）と弾性特異場（$1/\sqrt{r}$）のフィッティング結果（1点鎖線），線形弾性体に対する計算結果（破線）と精密解（2点鎖点）[27]が示されている．切欠き先端近傍のマイクロクラック飽和領域における応力分布は，図からわかるように弾性特異性を有しているが，その応力レベルは，線形弾性体，すなわちマイクロクラッキングを伴わない材料中のそれと比較すると相当低下しており，3章前半で述べた，定常亀裂に対するMicrocrack Tougheningが観察される．

Fig. 8には，計算された種々のT^*積分値の荷重履歴がプロットされている．まず，T^*_mおよびT^*_uはそれぞれ，マイクロクラッキング材料および線形弾性体に対し，有限要素法により計算された値である．Fig. 5およびFig. 6からわかるように，$P=50$[N]程度までは，マイクロクラック領域は十分に小さく荷重・変位曲線もほとんど線形である．したがって，T^*_mとT^*_uもほとんど等しい．以後は，T^*_mが若干大きい値となる．

T^*_uは線形弾性体における応力拡大係数K_Iと次式の関係にある．

$$T^*_u=(1-\nu_u^2)K_I^2/E_u \qquad (22)$$

マイクロクラック飽和領域が線形弾性挙動を呈することを考えれば，マイクロクラッキング材料においてもT^*_mと$K_I{}^{tip}$の間に同様な関係が成立すると予想される．

$$T^*_m \fallingdotseq (1-\nu_s^2)(K_I{}^{tip})^2/E_s \qquad (23)$$

もう一つのT^*積分であるT^*_sは，

$$T^*_s=(1-\nu_s^2)K_I^2/E_s \qquad (24)$$

と定義される．これの物理的意味は，式の形から明らかなように，試験体全体がマイクロクラック飽和時の弾性定数を有する線形弾性体であった場合の仮想的T^*積分値である．(22)式と(24)式より，T^*_uとT^*_sの比は，

$$T^*_u/T^*_s=(1-\nu_u^2)E_s/(1-\nu_s^2)E_u \tag{25}$$

となるが，これは(4)式より，小規模マイクロクラッキングを仮定した場合の応力拡大係数の低減率の2乗であることがわかる．Fig. 8を見ると，$T^*_m/T^*_s(=[K_I{}^{tip}/K_I]^2)$ は，大規模マイクロクラッキング状態においてT^*_u/T^*_sより大きい．このことは，大規模マイクロクラッキング状態におけるMicrocrack Tougheningは，小規模マイクロクラッキング状態におけるそれよりも小さいことを意味している．

なお，(23)式の関係を確認するために，$P=91.2$[N]において両辺の値を比較したが（Fig. 8中の○印は(23)式右辺の値），必ずしも良好に一致していない．これは，Fig. 7の線形弾性体に対する結果（計算値と精密解）からも明らかなように，Fig. 4の要素分割数が十分でなく，有限要素解析による$K_I{}^{tip}$値の精度が悪いためと考えられる．文献4)のAppendixでは，同じ問題をより細かいメッシュで解析し，上述の関係が十分に成立することを確認している．すなわち，マイクロクラック損傷領域が大きい場合でも，クラック先端近傍は線形弾性的に挙動しており，応力拡大係数$K_I{}^{tip}$概念は有効である．

5．動的伝播亀裂の有限要素解析

Broberg[28]により弾性理論解の与えられている動的伝播亀裂の問題を，マイクロクラッキング材料を仮定して有限要素法により解析し，Microcrack Tougheningについて考察した[5]．使用した材料定数値は$E_u=0.123\times10^{12}$ (N/m²)，$\nu_u=0.333$，$\sigma_c=0.200\times10^9$ (N/m²)，$\lambda=0.740\times10^{-8}$ (m²/N)，$\xi_s=0.37$，$\eta=0.1\times10^{-5}$ (1/sec)，$\rho=3110$ (kg/m³)である．

Fig. 9は問題の概念図であり，一様な応力σ ($\sigma=0.10\times10^9$ (N/m²))を受けて平衡状態にある無限体中を，初期長さ零から左右対称に一定速度$2c$で伝播するクラック（一端の速度はc）が解析対象である．Brobergにより与えられた動的応力拡大係数の理論解は，次の2つのパラメータに依存する．

$$c_L/c_S\ ,\ c/c_S$$

ここに，c_Lとc_Sはそれぞれ，固体中の縦波速度およびせん断波速度であり，次式により計算される．

$$c_L{}^2=E(1-\nu)/\rho(1+\nu)(1-2\nu) \tag{26a}$$

$$c_S{}^2=E/2\rho(1+\nu) \tag{26b}$$

本解析では，これらに関し，次の値を選択した．

$$c_L/c_S=2$$

$c/c_S=0.2$, 0.4 and 0.6

Fig. 10は，Fig. 9の第1象限に対する要素分割図（1296要素，1369節点，2737自由度（初期値））であり，クラック長さに対し十分大きな解析領域を取り，クラックが伝播する部分を細かく分割している．

前章の静的定常亀裂の議論と同様に，Fig. 11に，$c/c_S=0.4$の場合のT^*積分値の時刻歴を示す．図中，○印と●印はそれぞれ，線形弾性体およびマイクロクラッキング脆性体に対するT^*積分値の有限要素計算結果である．また，他の2つのT^*積分はそれぞれ，以下のように定義される．

$$T^*_u=[A_I(c,E_u,\nu_u)K_I{}^2]/(2G_u) \tag{27}$$

$$T^*_s=[A_I(c,E_s,\nu_s)K_I{}^2]/(2G_s) \tag{28}$$

ここに，

$$\begin{aligned} A_I(c)&=\beta_1(1-\beta_2{}^2)/D(c)\\ D(c)&=4\beta_1\beta_2-(1+\beta_2{}^2)^2\\ \beta_1&=1-(c/c_L)^2\\ \beta_2&=1-(c/c_S)^2 \end{aligned} \tag{29}$$

また，K_Iは動的応力拡大係数であり，通常これは

$$K_I=K(c)\hat{K}_I \tag{30}$$

と書かれ，$K(c)$はvelocity factor，$\hat{K}_I$はstatic factorと呼ばれる．この場合，$\hat{K}_I=\sigma\sqrt{\pi a(t)}$ ($a(t)=ct$)である．

T^*_uおよびT^*_sの物理的意味は，前章の静的定常亀裂の場合に準じて考えればよいが，$c/c_s>0.55$の場合，クラック速度がRayleigh波速度を上回り，$A_I(c,E_s,\nu_s)$が負値をとるという不都合が生ずる．これを回避するため

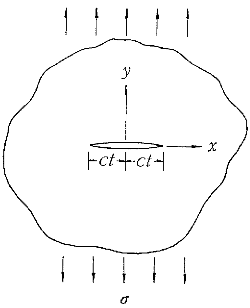


Fig. 9　Broberg's problem

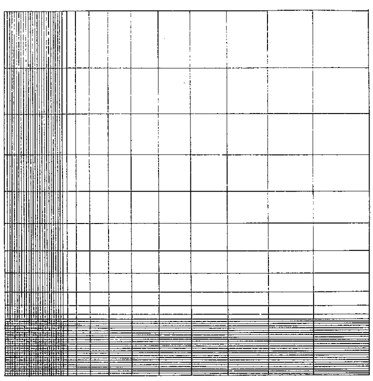


Fig. 10　Finite element mesh subdivision

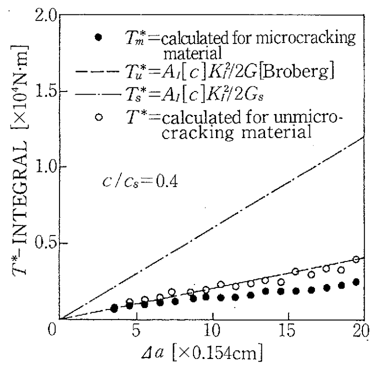


Fig. 11　Time histories of T^*-integral for the propagating crack

に，本計算ではν_sとc/c_Lはマイクロクラック発生前の値と等しいと仮定した．この条件のもとで，与えられたK_Iは外力と釣り合っていることを付言しておく．

Fig. 11より，応力拡大係数に関するBrobergの解[28]より計算されたT^*_uと線形弾性体に対し有限要素法で計算されたT^*とが良好に対応していることがわかる．また，T^*_sとマイクロクラッキング材料に対するT^*_mとの比較より，相当程度のMicrocrack Tougheningが生じていることがわかる．これは，Fig. 12におけるクラック先端近傍の相当応力分布からも観察される．

Fig. 13とFig. 14は，クラック伝播速度を3通りに変えた場合の，マイクロクラック損傷領域およびT^*積分値の時刻歴の比較である．Fig. 13より，伝播速度が遅いほど，マイクロクラック損傷が大きさ，程度とも甚大であることがわかる．このことから類推すれば，伝播速度が大きいほど，Microcrack Tougheningは小さいと考えられ，Fig. 14の結果も大略そのようになっている．しかしながら，クラック先端近傍における要素数が必ずしも十分でなく，$c/c_s=0.6$および0.4のケースではマイクロクラック飽和領域が全くか，あるいはほとんど見られない．定量的により確実な結果を得るためには，メッシュ数，T^*積分の計算法などに関し，再考の余地があろう．

なお，$c/c_s=0.2$の場合のクラック先端における応力拡大係数の有限要素計算値K_I^{tip}を用いて，T^*積分：

$$T^*_m=[A_I(c,E_s,\nu_s)(K_I^{tip})^2]/(2G_s) \qquad (31)$$

を求めたところ，$T^*_m/T^*_u \fallingdotseq 0.86$となったが，この値はFig. 14における$T^*_m/T^*_u$の直接計算値と良好に対応している．すなわち，静的定常亀裂の時と同様，この場合もK_I^{tip}は有効な概念と言える．

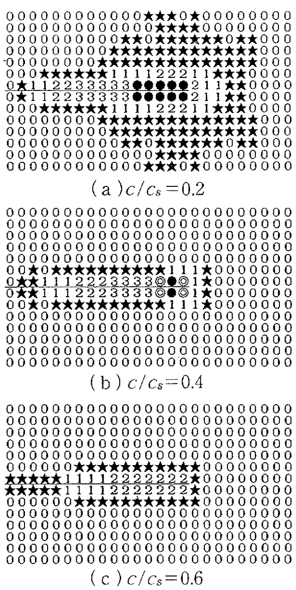
6．結　　語

セラミックスの破壊力学，特にMicrocrack Toughening効果について，著者らが実施した，連続体損傷力学を基礎とする計算力学的アプローチの成果を引用しながら解説した．文献3）～5）は他の多くの有限要素解析結果を含んでいるので参照されたい．セラミックスの高靱性化のもう一つの重要なメカニズムであるTransformation Toughening，およびコンクリート，岩盤など他のマイクロクラッキング脆性材料の破壊現象に対しても同様のアプローチが可能であることを付記して結びとしたい．

謝　　辞

3～5章の内容は，87年11月から88年11月にかけて著者が米国ジョージア工科大学に滞在中に実施した，同大学計算力学センター長Atluri教授との共同研究成果に基づいていることを付記し，ご指導いただいた同教授に謝意を表します．

（1989年3月30日受理）



★: $0.0<\xi<0.1$ (initiation)　1: $0.1\leq\xi<0.2$
2: $0.2\leq\xi<0.3$　3: $0.3\leq\xi<0.37$
◎: $\xi=0.37$ (saturation at one Gaussian point)
●: $\xi=0.37$ (saturation at more than one Gaussian points)

Fig. 13 Microcracked zones for different crack velocities

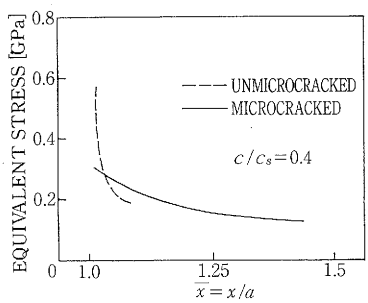


Fig. 12 Equivalent stress distribution at $t=15\mu$sec

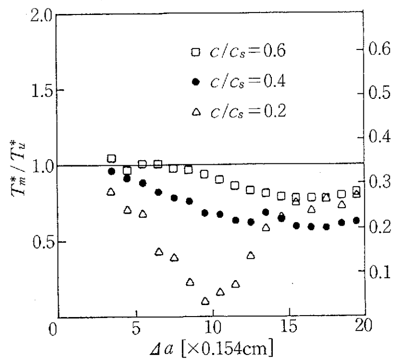


Fig. 14 Time histories of T^*-integral for different crack velocities

参考文献

1) 西田俊彦，安田栄一編著：セラミックスの力学的特性評価，日刊工業新聞社，(1986).
2) 奥田 博，平井敏雄，上恒外修己：構造材料セラミックス（ファインセラミックステクノロジーシリーズ6），オーム社，(1987).
3) Y. Toi and S. N. Atluri : Finite Element Analysis of Static and Dynamic Fracture of Brittle Microcracking Solids (Part 1 : Formulation and Simple Numerical Examples), to be published in Int. J. of Plasticity, (1989).
4) Y. Toi and S.N. Atluri : Finite Element Analysis of Static and Dynamic Fracture of Brittle Microcracking Solids (Part 2 : Stationary and Growing Macro-Cracks Under Static Loading), ibid., (1989).
5) Y. Toi and S.N. Atluri : Finite Element Analysis of Static and Dynamic Fracture of Brittle Microcracking Solids (Part 3 : Stationary and Rapidly-Propagating Cracks Under Dynamic Loading), ibid., (1989).
6) Y. Toi, T. Nishioka and S.N. Atluri : The T^*-integral Parameter and Its Applications to Dynamic Fracture Mechanics of Brittle Microcracking Solids, Proceedings of the Seventh International Conference on Fracture, (1989).
7) Y. Toi and S.N. Atluri : Finite Element Analysis of Dynamic Fracture of Brittle Microcracking Solids, Proceedings of the ASME 1989 Pressure Vessel and Piping Conference, (1989).
8) B. Budiansky, J.W. Hutchinson and J.C. Lambropoulos : Continuum Theory of Dilatant Transformation Toughening in Ceramics, Int, J. Solids Structures, Vol. 19, No. 4, (1983), 337～355.
9) J.C. Lambropoulos : Shear, Shape and Orientation Effects in Transformation Toughening, Int. J. Solids Structures, Vol. 22, No. 10, (1986), 1083～1106.
10) B.R. Lawn : Physics of Fracture, J. Am. Ceram. Soc., Vol. 66, No. 2, (1983), 83～91.
11) A.G. Evans and K.T. Faber : Crack-Growth Resistance of Microcracking Brittle Materials, J. Am. Ceram. Soc., Vol. 67, No. 4, (1984), 255～260.
12) Y. Fu and A.G. Evans : Some Effects of Microcracks on the Mechanical Properties of Brittle Solids (I. Stress, Strain Relations), Acta metall., Vol. 33, No. 8, (1985), 1515～1523.
13) A.G. Evans and Y. Fu : Some Effects of Microcracks on the Mechanical Properties of Brittle Solids (II. Microcrack Toughening), Acta metall., Vol. 33, No. 8, (1985), 1525～1531.
14) M. Ortiz : A Continuum Theory of Crack Shielding in Ceramics, J. Appl. Mech., Vol. 54, (1987), 54～58.
15) P.G. Charalambides and R.M. McMeeking : Finite Element Method Simulation of Crack Propagation in a Brittle Microcracking Solid, 6, (1987), 71～87.
16) J.W. Hutchinson : Crack Tip Shielding by Microcracking in Brittle Solids, Acta metall., Vol. 35, No. 7, (1987), 1605～1619.
17) M. Ruhle, A.G. Evans, R.M. McMeeking and P.G. Charalambides : Microcrack Toughening in Alumina/Zirconia, Acta metall., Vol. 35, No. 11, (1987), 2701～2710.
18) P.G. Charalambides and R.M. McMeeking : Transformations, Microcracking and Toughening in Ceramics, Constitutive Modeling for Nontraditional Materials (edited by V. Stokes and D. Krajcinovic), AMD-Vol. 85, ASME, (1987), 189～215.
19) M. Ortiz : Microcrack Coalescence and Macroscopic Crack Growth Initiation in Brittle Solids, Int. J. Solids Structures, Vol. 24, No. 3, (1988), 231～250.
20) J.R. Rice : Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture, Fracture (Edited by H. Liebowitz), Vol. 2, Academic Press, (1968), 191～311.
21) J. Eftis and H. Liebowitz : On Fracture Toughness Evaluation for Semi-Brittle Fracture, Eng. Fract. Mech., Vol. 7, (1975), 101～135.
22) S.N. Atluri (Editor) : Computational Methods in the Mechanics of Fracture, Vol.2 of Computational Methods in Mechanics, First Series of Handbooks on Mechanics and Mathematical Methods, North-Holland, (1986).
23) G.P. Nikishkov and S.N. Atluri : An Equivalent Domain Integral Method for Computing Crack-Tip Integral Parameter in Non-Elastic Thermo-Mechanical Fracture, Eng. Fract. Mech., Vol. 26, No. 6, (1987), 851～867.
24) B. Budiansky and R.J. O'Connell : Elastic Moduli of a Cracked Solid, Int. J. Solids Structures, (1976), Vol. 12, (1976), 81～97.
25) L.M. Kachanov : Introduction to Continuum Damage Mechanics, Martinus Nijhoff Publishers, (1986).
26) D.R.J. Owen and E. Hinton : Finite Elements in Plasticity ; Theory and Practice, Pineridge Press Ltd., (1980).
27) A.S. Kobayashi (editor) : Experimental Techniques in Fracture Mechanics, Society for Experimental Stress Analysis Monograph, No. 1(published jointly by the Iowa State University and Society for Experimental Stress Analysis), (1973).
28) K.B. Broberg : The Propagation of a Brittle Crack, Arkiv fur Fysik, 18, (1960), 159～192.