

# 数値流体力学におけるいくつかの基礎的事項

Some Basics in the Computational Fluid Dynamics

竹 光 信 正\*

Nobumasa TAKEMITSU

最近、日本でも数値流体力学の研究が盛んになっており、流体工学にたずさわっている人で数値流体力学の存在を知らない人はないくらいである。本稿は、数値流体力学におけるいくつかの基礎的事項、とくに非圧縮粘性流体のNavier-Stokes方程式の成り立ち、およびいくつかの代表的なスキームにつき、差分法を例にとりその基本的な考え方について述べたものである。

## 1. 緒 言

われわれの身近で生じている流動現象は、生体内の微小循環系を除きそのほとんどが乱流である。しかし、このような高いReynolds数の流れを正しく解析することは、流れのもつスケールの多様性のため圧縮性、非圧縮性流体のいずれにもかかわらず、きわめて困難である。それは、エネルギーのカスケード過程、あるいは高波数成分の波の挙動をいかにして正しく離散化した方程式に取り込んだらよいかという問題がわからないからである。

本稿においては、現実の流体はすべて圧縮性をもつにもかかわらず、(その意味において方程式が特異であるが) 非圧縮性の流体方程式が数値流体力学で何故よく扱われるかということ述べる。併せてモデル方程式を使ってこれまでおこなわれてきた研究の中からいくつかの代表的な差分スキームをとりあげ、その基本的な考え方や問題点を述べる。本稿が何かの御参考になれば幸いである。なお、他に優れた成書<sup>1)~3)</sup>や解説<sup>4)5)</sup>もあることを付記する。

## 2. Navier-Stokes方程式

### 2.1 粘性流体の運動方程式とエネルギー(熱輸送)の方程式

粘性流体の運動方程式と連続の方程式は次のように書ける<sup>6)~8)</sup>。

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( e_{ij} - \frac{2}{3} \Theta \delta_{ij} \right) \right\} \quad (1)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \Theta = 0 \quad (2)$$

ただし、 $\rho$ は流体の密度、 $u_i$ は速度ベクトル、 $t$ は時間、 $F_i$ は単位質量あたりの外力ベクトル、 $p$ は圧力、 $x_i$ は位置ベクトル、 $\mu$ は粘性係数、 $\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタ記号で、繰り返し下つき添字は1から3までの和を表すもの

とする。また、 $D/Dt$ はLagrange微分、 $e_{ij}$ は変形速度テンソル、 $\Theta$ は膨張速度でそれぞれ次のように定義される。

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (3)$$

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad \Theta = \frac{1}{2} e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } v \quad (4), (5)$$

なお、式(1)は流体中の応力テンソル $\sigma_{ij}$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\Theta\delta_{ij} + \mu e_{ij} \quad (6)$$

においてStokesの関係

$$\lambda + 2\mu/3 = 0 \quad \lambda: \text{第2粘性係数(率)} \quad (7)$$

を使って導かれたもので、Navier-Stokesの方程式と呼ばれている。また、式(6)のように応力と変形速度との間に線形関係が成り立つ流体をNewton流体とよんでいる。ここでは、Newton流体のみを対象とする。

次に、流体の内部エネルギーを $E$ 、熱伝導率を $k$ とすると、エネルギー保存則は、

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -p\Theta + \Phi + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (8)$$

と書ける。ここで、 $\Phi$ は運動エネルギーが粘性によって熱に変換される量を表し(散逸関数)、

$$\Phi = \mu \left( \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} - \frac{2}{3} \Theta^2 \right) \quad (9)$$

である。単位質量について熱力学の関係式

$$dE = TdS - pdV = TdS - pd(1/\rho) \quad (10)$$

$S$ : エントロピー、 $T$ : 絶対温度

を使うと式(8)は

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \Phi + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (11)$$

とも書ける。

結局、粘性流体の運動と熱輸送を解析する立場にたてば、式(1)、(2)、(8)(あるいは(11))を解けばよい。ただし、これらの方程式を解いて流れ場を決めるために

\*東京大学生産技術研究所 第1部

は、これらの方程式のほかに流体の状態方程式が必要である。流体を理想気体とすると、状態方程式は Boyle-Charles の法則

$$p = \rho RT, \quad R: \text{Gas const.} \quad (12)$$

で表せる。空気の場合には、

$$R = 287 \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{ K}, \quad (13a)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu &= C_1 \frac{T^{3/2}}{C_2 + T}, \quad C_1 = 1.458 \times 10^{-6} \text{ kg/ms } \sqrt{\text{K}}, \\ C_2 &= 110.4^\circ \text{K} \\ \gamma &= c_p/c_v \quad c_p: \text{定圧比熱} (= \gamma R/(\gamma - 1)), \\ c_v &: \text{定積比熱} (= R/(\gamma - 1)) \\ E &= c_v T, \quad h = c_p T, \quad h: \text{エンタルピー} \\ P_r &= c_p \mu / k = \nu / \alpha = 0.72 \\ P_r &: \text{Prandtl Number}, \\ \alpha &= k / \rho c_p: \text{温度伝導率} \end{aligned} \right\} (13b)$$

と表せる。

2・2 流体が非圧縮であるための条件

流れ場の代表的な長さスケールを  $L$ 、代表的な速度を  $U$  とする。このとき、連続の方程式 (2) おいて

$$|\Theta| \ll U/L \quad \text{or} \quad |(D\rho/Dt)/\rho| \ll U/L \quad (14)$$

が成り立てば流体は非圧縮として近似できる。

いま、熱力学的な状態変数として流体の密度  $\rho$  とエントロピー  $S$  を選ぶと

$$\frac{Dp}{Dt} = a^2 \frac{D\rho}{Dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \frac{DS}{Dt}, \quad a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s, \quad a: \text{音速} \quad (15a, b)$$

であるから、条件 (14) は

$$\left| \frac{1}{\rho a^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{1}{\rho a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \frac{DS}{Dt} \right| \ll \frac{U}{L} \quad (16)$$

となる。ここで、左辺第 2 項は流れ場で大きな温度変化がある場合を除き、寄与が小さいことを考慮してさしあたり等エントロピー流を仮定する。すなわち、式 (16) の圧力の Lagrange 微分の評価において粘性と熱伝導の効果を無視する。このとき式 (1) は

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \frac{1}{2} \rho \frac{Du_i u_i}{Dt} = \rho u_i F_i - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (17)$$

と書けるから、これを使うと条件 (16) は  $|(Dp/Dt)/\rho a^2| \ll U/L$  より

$$\left| \frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{2a^2} \frac{Dq^2}{Dt} + \frac{U_i F_i}{a^2} \right| \ll \frac{U}{L}, \quad q = |\mathbf{v}| \quad (18)$$

となる。以下、この左辺の各項の大きさについて調べる。

$$(a) \left| \frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right| \ll \frac{U}{L} \text{ の条件} \quad (19)$$

これは流れの非定常性が小さいという条件である。いま、流れの非定常性の程度を振動数  $n$  で表すことにすると (周期的な流れでなくてもよい)、長さ  $L$  の領域内ではほぼ一様な速度  $U$  をもつ流体は  $n^{-1}$  の時間のオーダーで圧力変動の符号を変える。したがって、 $\partial p/\partial t \sim (\rho L n) U \cdot$

$n$  であるから条件 (19) は

$$\frac{1}{\rho a^2} \cdot \rho L U n^2 \ll \frac{U}{L}, \quad \frac{n^2 L^2}{a^2} \ll 1 \quad (20)$$

となる。この条件は、式 (20) で  $n \sim U/L$  とおくと次に述べる条件と一致するため、 $n \gg U/L$  のときには次に述べる条件より厳しい。ただし、 $L \sim \lambda$  (音波の波長) とおくと  $n\lambda/a = 1$  であるので、音波を問題とする流れ場では流体を非圧縮として取り扱うことはできない。

$$(b) \left| \frac{1}{2a^2} \frac{Dq^2}{Dt} \right| \ll \frac{U}{L} \text{ の条件} \quad (21)$$

この条件が実際上最も重要である。上に述べた理由から、 $|\partial q^2/\partial t| \leq |\mathbf{v} \cdot \nabla q^2|$  の場合だけを考えればよい。  $O(\mathbf{v} \cdot \nabla q^2) \sim U^3/L$  であるから、条件 (21) は

$$U^2/a^2 = M^2 \ll 1, \quad M = U/a: \text{Mach 数} \quad (22)$$

となる。すなわち、条件 (21) が満足できれば長さ  $L$  の領域内で流体の速度が 0 から  $U$  まで変化しても流体は非圧縮と考えてよい。

常温常圧 (15°C, 1 気圧) の空気では  $a = 340.6 \text{ m/s}$ 、水では  $a = 1470 \text{ m/s}$  であり、 $M \leq 0.3 (U \leq 100 \text{ m/s} = 360 \text{ km/h})$  : 空気中、 $U \leq 440 \text{ m/s}$  : 水中) では流体の圧縮性を無視してよい。

$$(c) |U_i F_i/a^2| \ll U/L \text{ の条件} \quad (23)$$

単位質量あたりの外力  $F_i$  として重力加速度  $g$  をとると、条件 (23) を考えなければならないのは、流体としては通常空気の場合である。等エントロピーの状態方程式

$$p = c\rho^\gamma, \quad c: \text{const.} \quad (24)$$

を使うと、式 (15b) によって  $a^2 = \gamma p/\rho$  であるから条件 (23) は、

$$gL/a^2 = \rho g L / \gamma p = L / \gamma L_0 \ll 1, \quad (25)$$

$$L_0 = p/\rho g: \text{scale-height}$$

と書ける。標準状態の空気では  $L_0 = 8.4 \text{ km}$  であるから、通常の場合条件 (23) は満足されている。ただし、気象の問題のように大規模なスケールの運動を取り扱うときには (問題にもよるが)、条件 (25) は満足されず空気を非圧縮として扱うことはできない。

(d) 次に、流体が非圧縮であるための条件 (16) の左辺第 2 項

$$\left| \frac{1}{\rho a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \frac{DS}{Dt} \right| \ll \frac{U}{L} \quad (26)$$

について考える。これは、関係式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho &= -\frac{1}{\rho a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{(\partial \rho/\partial T)_p}{(\partial S/\partial T)_p} = \frac{\beta T}{c_p} \end{aligned} \quad (27)$$

$\beta = -(\partial \rho/\partial T)_p/\rho$  : 熱膨張率、 $c_p = T(\partial S/\partial T)_p$  と (11) を使うと、

$$\left| \frac{\beta}{\rho c_p} \left\{ \Phi + \frac{\partial}{\partial x_i} (k \frac{\partial T}{\partial x_i}) \right\} \right| \ll \frac{U}{L} \quad (28)$$

Table 1  $L = 1 \text{ cm}$ ,  $U = 10 \text{ cm/s}$ としたときの条件(29)の評価とPrantl数 ( $P_r$ )

種類	$\Delta T = 15^\circ\text{C}$			$\Delta T = 100^\circ\text{C}$			$\Delta T = 1000^\circ\text{C}$		
	(a)	(b)	$P_r$	(a)	(b)	$P_r$	(a)	(b)	$P_r$
空気	$5 \times 10^{-10}$	$7 \times 10^{-4}$	0.7	$8 \times 10^{-10}$	$1.2 \times 10^{-2}$	0.7	$6 \times 10^{-9}$	0.9	0.6
水	$4 \times 10^{-13}$	$3 \times 10^{-7}$	8.1	$1.5 \times 10^{-6}$	$3.5 \times 10^{-6}$	1.8			

\* (a) =  $\beta U^2 / c_p R_e$ , (b) =  $\alpha \beta \Delta T / LU$  ( $\Delta T: 0^\circ\text{C}$ を基準にとる)

と同値である。結局、条件  $|\beta \Phi / \rho c_p| \ll U/L$ ,

$|\beta \partial (k \frac{\partial T}{\partial x_i}) / \partial x_i / \rho c_p| \ll U/L$ , すなわち

$$\frac{\beta U^2}{c_p} \frac{1}{R_e} \ll 1, \frac{\alpha \beta \Delta T}{LU} \ll 1, \Delta T: \text{温度差 (29a, b)}$$

$R_e = UL/\nu$ : Reynolds Number

を考えれば十分である。実際に、数値を使って評価するとTable 1のようになる。したがって、たとえば燃焼が起こっているような大きな温度差のあるところでは流体は非圧縮近似できない。Boussinesq近似が大きな温度差のあるところで実験と一致しないゆえである。

以上、要するに流体を非圧縮近似してよいかどうかは考える問題によって異なるが、条件(20), (22), (25), (29)が満足できれば流体を非圧縮近似してよい。これらのうち、応用上最も重要なのは条件(22)であり、通常われわれの近辺で生じる流れの問題では、(高速で飛行する場合や燃焼の問題を扱う場合を除き)これらの条件は満足されている。

### 2.3 非圧縮粘性流体の運動方程式と熱輸送

以上に述べたような理由で、粘性流体の運動と熱輸送の問題を解くのに通常は流体を非圧縮近似する。このとき、方程式系(1)~(12)は次のように書ける。

$$\frac{D u_i}{D t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (30)$$

$$D = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (31)$$

$$\frac{D T}{D t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\nu}{2 c_p} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (32)$$

ただし、 $\nu$ は流体の動粘性率(係数)で  $\nu = \mu / \rho$ で定義される。

これらの方程式系は、2・1で述べた圧縮性流体の方程式系に比べてずいぶん簡略化されている。その根拠は流体運動の結果生じる圧力のゆらぎが小さく、したがってそれに伴う流体の密度等熱力学的変数の変化が無視できるということである。このことは、しかし流体の温度や密度が空間的に一定であることを意味するものではない(流体が非圧縮であるとは、いままで述べてきたことから  $D\rho/Dt = 0$ を意味する)。実際、非一様な温度分布のある場では流体の密度は空間的に一様でない。

### 2.4 Navier-Stokes方程式と計算の格子点数

さて、流体の温度や密度が時間・空間的に一様であるとして式(30), (31)を解くにしても次のような問題があ

る。

(a) 非圧縮近似の方程式系(30), (31)においては、

(i) 連続の方程式(31)は圧力と直接結びついていない。

(ii) 圧力の境界値はア prioriにはわからない。

(b) 運動量輸送方程式(30)の非線形項  $u_j (\partial u_i / \partial x_j)$  は、連続の方程式(31)を使うと

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \quad (33)$$

とも書ける。いま、 $i = j = 1$ とにおいて  $u_1 = u = \cos(\omega t - kx)$ とのおくと

$$u^2 = \cos^2(\omega t - kx) = \frac{1 + \cos 2(\omega t - kx)}{2} \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &= \cos(\omega t - kx) \cdot k \sin(\omega t - kx) \\ &= \frac{k}{2} \sin 2(\omega t - kx) \end{aligned} \quad (34b)$$

となる。したがって、(34a, b)よりそれぞれ

(i) 非線形項の存在はNavier-Stokes方程式(30)を時間平均しても0にならない成分(2次流れ)を生じさせる。  
(ii) 非線形項の存在は入力の変数成分と異なる波数の波を生じさせる。

こうしたことから、(a)からは(30)と(31)をどのように適切に結合させて解くか、あるいは圧力の境界条件をどのように与えたらよいかといった問題が生じる。たとえば、式(30)のdivergenceをとって圧力に関するPoisson方程式を解くにしても、圧力の境界条件をDirichlet型で与えると連続の方程式(31)は必ずしも満足されない<sup>9)</sup>。

また、(b)の問題はとくに高Reynolds数(Reynolds数 =  $UL/\nu$ )のときに顕著である。層流の場合には、各種の波数成分の相互作用によって最終的に熱に変わるエネルギー散逸のスケール  $l_d$  は  $\nu$  と  $U$  と  $L$  によって決まると考えられる。これらの物理量から長さスケール  $l_d$  を作ると、 $l_d = (\nu L/U)^{1/2} = L R_e^{-1/2}$ となる。したがって、1次元あたりに必要な格子点数は大ざっぱに  $N \sim L/l_d = R_e^{1/2}$ となる。これより、層流計算に必要な格子点数はほぼTable 2で表せる程度になる。

他方、自然界で生じる流れはそのほとんどが乱流である。たとえば、川の中の小石のまわりの流れを例にとっても、 $U \sim 100 \text{ cm/s}$ ,  $L \sim 1 \text{ cm}$ ,  $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ とすると  $R_e = UL/\nu \sim 10^4$ である。このような乱流においては、乱れが統計的に一様かつ等方的であるような高波数領域においては、乱流は統計的に平衡で  $\epsilon$  と  $\nu$  によって一意的に決まる(Kolmogoroff)。これらの物理量によって散逸スケール(Kolmogoroff length scale)  $l_d$  を作る

$$l_d = (\nu^3/\epsilon)^{1/4} = L R_e^{-3/4}, \quad \epsilon \sim U^3/L \quad (35a)$$

となる。したがって、必要な格子点数(あるいは乱流中の自由度)の大ざっぱなオーダーは

Table 2 流体の数値解析に必要な格子点数

$R_e$ 数	層流			乱流		
	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^3$	$10^4$	$10^5$
2次元	$10^2$	$10^3$	$10^4$	—	—	—
3次元	$10^3$	$3 \times 10^4$	$10^6$	$5.6 \times 10^6$	$10^9$	$1.8 \times 10^{11}$

$$N \sim (L/l_d)^3 = R_e^{9/4} \quad (35b)$$

となる。これによる評価もTable 2に示した。

ところで、過去10~30年間における計算機の進歩をみるとFig. 1のようである。Fig. 1(a)から計算機のスピードも含めた実質的な計算コストが約8年間で1/10になっていることがわかる。ただし、これは数値解析法の発展を度外視したもので、よいスキームが開発されればこの数値はもっと小さくなる。この意味でよりよい数値解析法の開発は極めて重要であるが、一般に数値解析法の開発・考案には長い年月を要するのでとくに日本の場合、周囲の理解が必要であろう。

他方、計算機で使える格子点数はFig. 1(b)から約10年間で $10^2$ 倍になっている。ただし、これはひいき目にみた数値である。事実、1959年頃に日本で利用できたパラメトロン計算機では使える格子点数は100程度であるということである<sup>11)</sup>。いずれにしろ、Table 2とこれらの図からわかることは、現時点(1989年)で計算できる乱流の $R_e$ 数は $O(10^3)$ 程度である。実際、現在乱流の直接シ

ミュレーションと言われているものはこの程度の $R_e$ 数で、しかも限られた流れの場(チャンネル流)しか行われていない<sup>12)13)</sup>。さらに、こうしたことは誰にでもできるものではなく、また流体の圧縮性を考慮した直接シミュレーションはほとんど行われていない<sup>14)</sup>。

### 2.5 モデル方程式

以上のようなわけで、方程式系(30)、(31)をきちんと解くこと自体がそう簡単ではない。そこで、これらの方程式系のもつ性質を知るためにモデル方程式が使われる。こうしたモデル方程式は、ある特定の初期条件、境界条件のもとでは厳密解をもつので、解の性質を調べるのに都合がよく、したがってまた数値解析法の性質を調べるのにも都合がよい。ただし、モデル方程式はあくまでもモデルであるということを忘れてはならない。以下に、これらのモデル方程式のうち代表的なものを1次元の場合についてあげておく。

#### (1) 波動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a : \text{const.} > 0 \quad (36)$$

初期条件

$$t = 0 \text{ のとき } u = F(x) \quad (37a)$$

のもとでの解は

$$u = F(x - at) \quad (37b)$$

であり、特性曲線および波の進む速度はそれぞれ

$$x - at = \text{const.}, \quad a = x_t \quad (37c)$$

である。

#### (2) 熱伝導方程式(拡散方程式)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \alpha > 0 \quad (38)$$

#### (3) Burgur's方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \nu \geq 0 \quad (39)$$

#### (4) Poisson方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) \quad (40)$$

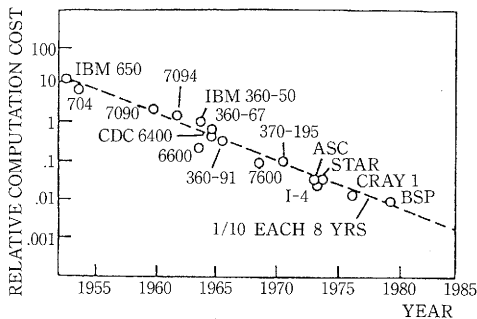
数値流体力学においてはこの方程式を直接解かなければならないことが多いという意味で上記3つのモデル方程式とは性格が異なるが、よくでてくる方程式なのであげておく。

### 3. 差分近似

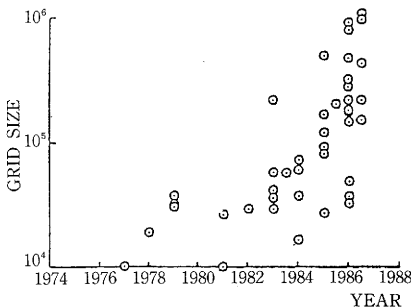
さて、2で述べたいろいろな方程式を近似するのに差分法、有限要素法、境界要素法、有限体積法、スペクトル法、離散渦法等種々の方法がある。これらの方法については、それぞれ長所と欠点があり、それらについてはそれぞれの成書を参考にして戴くとして、ここでは以下差分法について述べる。

#### 3.1 Taylor級数による展開

いま、空間の点 $x$ を



(a) 計算スピードの変化<sup>1)</sup>



(b) 格子点数の変化<sup>10)</sup>

Fig. 1 計算機の進歩

$$x = j\Delta x \text{ or } (j-1)\Delta x, \Delta x = h \quad (41)$$

で定義し、格子点を Fig. 2 のようにとるものとする。この格子点のとり方にも種々のとり方があるが、最もよく使われる Regular Mesh と Staggered (MAC) Mesh とを示した (3次元も同様である)。Regular Mesh の利点は境界条件を課しやすいことであり、Staggered Mesh の利点は連続の方程式と圧力項を含めたすべての差分オペレーターが一貫性をもつことである。ここでは、とくにことわらない限り Regular Mesh を使って話を進める。

関数  $u$  を点  $j$  のまわりで Taylor 展開すると

$$u_{j+1} = u_j + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (42a)$$

$$u_{j-1} = u_j - h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (42b)$$

のように 2 通りの表式が得られる。式 (42a, b) はそれぞれ前進差分 (forward difference), 後退差分 (backward difference) とよばれる。式 (42a) - (42b) を作ると、 $\partial u / \partial x$  は

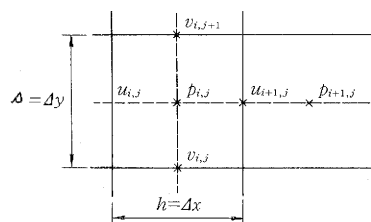
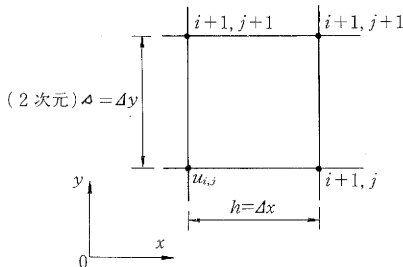
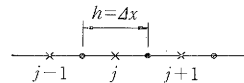
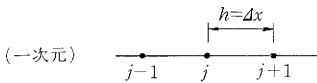
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \quad (43)$$

と近似され、右辺第 2 項以下は打ち切り誤差 (Truncation Error (以下、アンダーラインで示す)) とよばれる。また、(42a) + (42b) を作ると、 $\partial^2 u / \partial x^2$  は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} (u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (44)$$

と近似できる。式 (43), (44) は中心差分近似と呼ばれ、いずれも打ち切り誤差は  $O(h^2)$  であり、点  $j$  を中心にして両側の点  $j+1$  と  $j-1$  を公平に取り入れる近似法である。この意味で楕円型方程式を近似するには最もよい方法である。

**Ex. 1 Forward Time and Centered-Space (FTCS) Difference or Forward Euler Method**



(a) Regular Mesh

(b) Staggered (MAC) Mesh

Fig. 2 格子点の配置

この方法は、時間について前進差分をとり、空間について中心差分をとる方法で、拡散方程式 (38) を例にとると、

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{h^2} (u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j)^n + \left[ -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\alpha h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \right] \quad (45)$$

となる。ただし、

$$t = n\Delta t \text{ or } (n-1)\Delta t, \Delta t : \text{時間刻み幅} \quad (46)$$

で、この場合の打ち切り誤差は  $O(\Delta t, \Delta x^2)$ , あるいは  $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$  と表現される。式 (45) を書き直して

$$u_j^{n+1} = u_j^n + r(u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j)^n + O(\Delta t, \Delta x^2), \quad r = \alpha \Delta t / h^2 \quad (47)$$

として時間  $n$  を進めていく方法を Time-Marching Method (時間発展法) という。式 (47) を安定に計算できる時間刻みは、空間の刻み幅  $h$  と関係し、後に述べる方法により

$$\Delta t \leq h^2 / 2\alpha \quad (48)$$

となる。この条件は CFL 条件 (Courant, Friedrichs and Lewy Condition) と呼ばれる重要な条件である。

Forward Euler 法は簡便であるためよく使われる。しかし、これをたとえば波動方程式 (36) に適用すると無条件不安定であるから注意が必要である。

**Ex. 2 Crank-Nicolson 法**

これは、時間について中心差分をとり、拡散項について時刻  $n+1$  と  $n$  のものを平均する方法で、(38) を例にとると

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{h^2} \{ (u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j)^{n+1} + (u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j)^n \} + O(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (49)$$

となる。これは、書き直すと

$$-\frac{1}{2} r u_{j-1}^{n+1} + (1+r) u_j^{n+1} - \frac{1}{2} r u_{j+1}^{n+1} = S_j^n \quad (50)$$

$$S_j^n = \frac{1}{2} ru_{j-1}^{n+1} + (1-r)u_j^n + \frac{1}{2} ru_{j+1}^{n+1}$$

となる。すなわち、左辺に時刻  $n+1$  のものを含むためこれらを連立方程式として解かなければ次の時間ステップに進むことができない。このように新しい時刻の変数について連立方程式を解かなければならないものを陰解法 (Implicit Method) という。また、この例のように3項だけの未知数で表せる方程式の係数行列を3重対角行列 (Tridiagonal Matrix) といい、次の形に書ける。

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a_N & b_N & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$a_j = -r/2, \quad b_j = 1+r, \quad c_j = -r/2, \quad S_j \rightarrow S_j^n$$

$$S_1 \rightarrow S_1 + ru_0^{n+1}/2, \quad S_N \rightarrow S_N + ru_{N+1}^{n+1}/2$$

ただし、 $u_0^{n+1}$ 、 $u_{N+1}^{n+1}$ は既知の境界条件とする。この3重対角行列方程式はGaussの消去法<sup>15)</sup>あるいはThomasのアルゴリズム<sup>16)</sup>によって簡単に解くことができる。

Crank-Nicolson法は、Forward Euler法に比べると新しい時刻の未知数に関して連立方程式を解かなければならないという欠点を有するものの、時間刻み  $\Delta t$  の大きさのいかにかわからず安定なスキームであること、時間刻みに関する精度がForward Euler法に比べてよいことからよく使われる方法である。

**Ex. 3 ADI法 (Alternating-Direction Implicit Method)**

この方法は2次元でないとい説明できないので、(38)を2次元に拡張する。2次元の拡散方程式をそのままCrank-Nicolson法によって離散化したのでは、新しい時刻の未知数に関する連立方程式はもはや3重対角行列ではなく、計算が複雑になることは避けられない。そこで、次のように解くべき方程式を2段階にsplitする。拡散方程式(38)を例にとると

$$\text{Step 1} \quad \frac{u^{n+1/2} - u}{\Delta t/2} = \alpha \left\{ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^{n+1/2} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^n \right\} \quad (52a)$$

$$\text{Step 2} \quad \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \alpha \left\{ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^{n+1/2} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^{n+1} \right\} \quad (52b)$$

ただし、 $\partial^2 u / \partial x^2$ 、 $\partial^2 u / \partial y^2$ 等は中心差分近似する。そうすると、おのおののステップでそれぞれ  $x$  方向、 $y$  方向に関する3重対角行列を解けばよいので計算が簡単になり、しかもおのおののステップでは打ち切り誤差は  $O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$  であるにもかかわらず、第2ステップ終了後には  $O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$  となり ((52a) + (52b))、無条件安定という好ましい性質をもつ興味ある方法である。

ADI法の骨子は、結局2次元の問題を1次元のオペレータを2回使って解くところにある。このため、Splitting Methodと呼ばれることもあり、また3次元への拡

張も容易である。

**Ex. 4 Fractional-Step Method**

この方法は、ADI法とほぼ同じ頃ソ連の数学者によって考案された。(38)を例にとると、

$$\text{Step 1} \quad \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\Delta t/2} = \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^{n+1/2} \quad (53a)$$

$$\text{Step 2} \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t/2} = \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^{n+1} \quad (53b)$$

のように2段階に分離して計算を行う。このようにしてもおのおのの段階は無条件安定であり、かつそれぞれ  $x$  方向、 $y$  方向に関して3重対角行列を解けばよいので計算が簡単である。ただし、差分式の精度は  $O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$  である。この方法(53a, b)もADI法と同じく、2次元の問題を1次元のオペレータに落とすのでSplitting Methodとも呼ばれている。

非圧縮粘性流体の方程式系(30)、(31)では、通常

$$\text{Step 1} \quad \frac{v^* - v^n}{\Delta t} + A(v)^n = \frac{1}{Re} \nabla^2 v^n \quad (54a)$$

$v^*$  : tentative velocity

$$A(v) = (v \cdot \nabla) v, \text{ or } \nabla \cdot (v v),$$

$$\text{or } -\nabla x (\nabla \times v) + \frac{1}{2} |v|^2$$

$$\text{Step 2} \quad \frac{v^{n+1} - v^*}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} = 0 \quad (54b)$$

をFractional-Step Methodと呼んでいる。ただし、式(54b)における  $p^{n+1}$  は、(54b)のdivergenceをとった方程式

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\nabla \cdot v^*}{\Delta t}, \quad \nabla \cdot v^{n+1} = 0 \quad (54c)$$

を解いて計算する。

なお、次のことに注意しなければならない。それは、Fractional-Step法では第1段階における方程式がもとの解くべき方程式とconsistentでない、中間の速度の境界条件に任意性が残るとのことである。ADI法においては、第1段階の方程式はもとの方程式とconsistentであるが、第1段階そのものの時間に関する精度は  $O(\Delta t)$  であるので境界条件まで含めて考えるとADI法でも全体の精度は  $O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$  となる。

**4. 差分解の適合性、収束性および安定性**

ここでは、以上に得られた差分方程式の解は、どのような条件のときもとの偏微分方程式の解になりうるかということについて考える。ただし、線形な偏微分方程式

$$\partial u / \partial t = Au \quad (55)$$

の初期値境界値問題を対象とする。オペレータ  $A$  としては1次元のものを対象とすることにし、Navier-Stokes方程式を対象とするため  $\partial / \partial x$ 、あるいは  $\partial^2 / \partial x^2$  を考える。

さて、式(55)は適正な問題 (well-posed problem) で

あるとする。すなわち、解が存在して一意であり、解は初期値と境界値とに連続的に依存するものとする。

4・1 適合性 (consistency)

偏微分方程式を PDE (Partial Differential Equation), 差分方程式を FDE (Finite-Difference Equation), 打ち切り誤差を TE (Truncation Error) で表すとき、条件

$$\lim_{mesh \rightarrow 0} (PDE - FDE) = \lim_{mesh \rightarrow 0} (TE) = 0 \quad (56)$$

が満足されれば、この偏微分方程式に対する差分方程式は適合している (consistent) という。たとえば、Ex. 1 の Forward Euler 法 (45) ではこの条件は満足されている。

Ex. 5 DuFort-Frankel Method

これは、拡散方程式 (38) を例にとれば

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\alpha}{h^2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \quad (57)$$

とする方法である。すなわち、Richardson の方法 (無条件不安定)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\alpha}{h^2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (58)$$

で拡散項の差分表示  $2u_j^n$  を  $u_j^{n+1}$  と  $u_j^{n-1}$  とで平均をとったものであり、このようにすると無条件安定になる。この方法は、3 ステップの時刻のものを使って陽に時間を進める。ただし、打ち切り誤差は、

$$TE = -\alpha \left( \frac{\Delta t}{h} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\alpha h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (59)$$

となるので、 $\Delta t, h, \Delta t/h \rightarrow 0$  とすれば差分方程式 (57) は拡散方程式 (38) と適合しているが、 $\Delta t, h \rightarrow 0, \Delta t/h = \beta = \text{const.}$  のように  $mesh \rightarrow 0$  とすると、(59) から差分方程式 (57) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (60)$$

となり、もとの方程式と適合性をもたない。

4・2 安定性 (Stability)

いままで述べた方法は、2 時刻の値を使うものはずべて

$$u_j^{n+1} = c(\Delta t) F(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots)^n \quad (61)$$

$c(\Delta t)$ : 差分オペレーター

の形に書ける。初期条件  $F(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots)^0$  が与えられたとき、 $c(\Delta t)$  を  $n$  回オペレートすると、 $u_j^n = \{c(\Delta t)\}^n F^0$  が得られる。このとき、 $\{c(\Delta t)\}^n$  が条件

$$\{c(\Delta t)\}^n < \infty \quad (62)$$

を満足するとき、差分方程式 (61) は安定であるという。

安定性の条件 (62) は抽象的であるので、具体的に調べる方法を以下に示す。

(a) von Neumann の方法

この方法は、Fourier 級数を使う方法で差分式 (61) に

$$u_j^n = G^n \exp(ikj\Delta x) \quad (63)$$

$G$ : Amplification Factor (増幅率)

を代入して、この波の増幅・減衰を調べる方法で、最もよく使われている。 $G$  は増幅率と呼ばれ、計算を 1 ステップ進めたとき  $u_j$  がどのくらい拡大されるかを示す。したがって、安定であるための条件は

$$|G| \leq 1 \quad (64)$$

となることである (von Neumann の条件)。ただし、この条件は、一成分の波の場合には安定性の必要十分条件となるが、多成分の場合には必要条件にはなっても十分条件とならないこともある。また、境界条件を考慮すると、行列の固有値を評価しなければならないのでここでは考えないことにする。

さて、Forward Euler 法 (45) を例にとると

$$u_j^{n+1} = u_j^n + r(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n), \quad r = \alpha \Delta t / h^2 \quad (65)$$

であるから、この式に (63) を代入すると

$$G^{n+1} e^{ikj\Delta x} = G^n e^{ikj\Delta x} + r G^n \{ e^{ik(j+1)\Delta x} + e^{ik(j-1)\Delta x} - 2e^{ikj\Delta x} \} \quad (66a)$$

となる。したがって、

$$G = 1 + r(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} - 2) = 1 + 2r(\cos\beta - 1) = 1 - 4r\sin^2(\beta/2), \quad \beta = k\Delta x \quad (66b)$$

が得られる。条件 (64) より、Forward Euler 法 (45) が安定であるためには

$$-1 \leq 1 - 4r\sin^2(\beta/2) \leq 1, \quad 4r\sin^2(\beta/2) \leq 2, \quad r \leq 1/2 \quad (67)$$

であればよいことがわかる。すなわち、時間刻み  $\Delta t$  は

$$\Delta t \leq h^2/2\alpha \quad (68)$$

という制限を受けることになる。同様にして、2 次元、3 次元の場合

$$\Delta t \leq h^2/4\alpha \quad (2 \text{ 次元}), \quad \Delta t \leq h^2/8\alpha \quad (3 \text{ 次元}) \quad (69a, b)$$

が得られる。ただし、空間の刻みはすべて  $h$  とした。

また、Crank-Nicolson 法にこの方法を適用すると

$$G = \frac{1 - 2r\sin^2(\beta/2)}{1 + 2r\sin^2(\beta/2)} \quad (70)$$

となり、 $r$  の値のいかんにかかわらず  $|G| \leq 1$  となる (無条件安定)。このことはしかし、時間刻み  $\Delta t$  をやみくもに大きくしてよいことを示すものではない。この条件 (70) は  $\Delta t$  の大きさをどのようにとっても計算は安定にできることを意味しているのであって、流れ場を正しく記述できる  $\Delta t$  の大きさについては何の示唆も示していない。実際の計算においては、流れ場を正しく表現できる  $\Delta t, h$  を別の角度 (たとえば、流れ場の散逸スケールや境界層の厚さ) から検討して選ばなければならない。

Ex. 6 Upwind (or Upstream) Differencing Method

この方法を波動方程式 (36) に適用すると

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad a > 0 \quad (71)$$

となる。これは、対流項の近似が後退差分されており(上流 (or 風上) 差分)、流れの方向に差分をとる方法である。増幅率  $G$  は

$$G = 1 - C_N + C_N \cos \beta - i C_N \sin \beta \quad (72)$$

$$C_N = a \Delta t / \Delta x : \text{Courant Number}$$

となる。安定であるための条件は、 $|G| \leq 1$  より

$$C_N \leq 1 \quad (73)$$

となる。これは、Fig. 3 で特性曲線  $x - at = \text{const.}$  の内側になれば計算が不安定であることを示している。他方、(71) の打ち切り誤差は

$$TE = \frac{a \Delta x}{2} (1 - C_N) u_{xx} + (1 - C_N) \{ \dots \} \quad (74)$$

である。すなわち、 $u_{xx}$  の係数が正であるから、この打ち切り誤差は  $C_N = 1$  でない限り、差分は減衰効果を示す (Fig. 4 (a) 参照) ことになる (厳密解 (37b) はもちろん減衰しないで伝播する)。

そこで、このような減衰を押えるため高精度の上流 (風上) 差分

3 次精度:

$$a \frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{u_{j+2} + 8 u_{j+1} - 8 u_{j-1} + u_{j-2}}{12h} + \alpha |a| \frac{u_{j+2} - 4 u_{j+1} + 6 u_j - 4 u_{j-1} + u_{j-2}}{12h} + \frac{\alpha h^3}{12} |a| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^2) \quad (75)$$

$$\alpha = 1 : \text{UTOPIA}$$

$$\alpha = 3 : \text{Kawamura-Kuwahara}$$

が考えられている (詳しい解説は、村上<sup>16)</sup>、小林ら<sup>17)</sup> の解説参照のこと) が、格子幅が粗いと数値解が減衰効果をもつことに変わりはない。

他方、波動方程式 (36) の対流項を中心差分近似すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \frac{h^2}{6} u_{xxx} + \dots = 0 \quad (76)$$

となる (ただし、 $\partial u / \partial t$  の項を前進差分近似すると無条件不安定となる)。この解を  $u_j = U(t) e^{ik \Delta x}$  とおいて式 (76) に代入すると

$$\frac{\partial U}{\partial t} e^{ik \Delta x} = -\frac{aU}{2h} (e^{ik(j+1)\Delta x} - e^{ik(j-1)\Delta x}) \quad (77a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = i \omega^* U, \quad \omega^* = ka^*, \quad a^* = a \frac{\sin \beta}{\beta} \quad (77b)$$

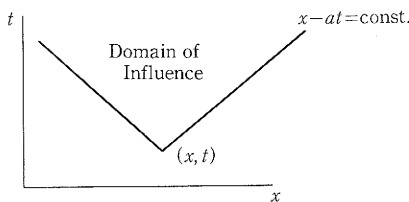


Fig. 3 特性曲線

となり、波は分散性の性質をもち、数値解は Fig. 4 (b) のようになってしまう。また、波の速度も Fig. 4 (c) のようにゆがめられてしまい、 $\sin \beta / \beta$  が 0.8 より大きいところをほぼ正しい解とすると、差分で表せる最小波長  $2 \Delta x$  の約 3 倍の格子幅をとらないといけないことになる。

このように、一般に奇数解の打ち切り誤差をもつ差分方程式は分散性の性質 (dispersion) をもち、偶数階の打ち切り誤差をもつものは散逸効果 (dissipation) をもつ。

Ex. 7 Leap Frog Method

これは散逸効果のない方法で

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2 \Delta x} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + O(\Delta t^2, \Delta x^2) = 0 \quad (78)$$

と書け、3 ステップの時刻の値を使う。増幅率  $G$  は

$$G = -i C_N \sin \beta \pm \sqrt{1 - C_N^2 \sin^2 \beta} \quad (79)$$

で、 $C_N \leq 1$  では  $|G| = 1$  であるので安定であって散逸効果をもたない。ただし、(79) の示すように Leap Frog 法は 2 つの波をもち、そのうちの一つは解析解と同じ速度で伝播するが、他の一つは反対方向に伝播し位相も変化する。これは差分近似から生じたものである。

Ex. 8 Lax-Wendroff Method

すでに述べたように

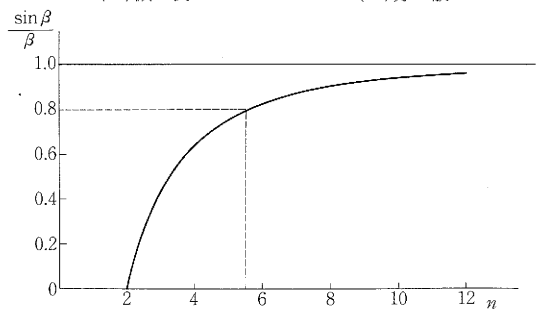
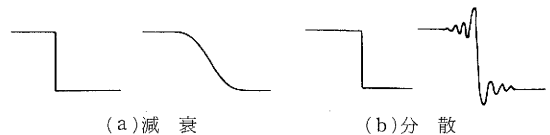
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \frac{\Delta t}{2} u_{tt} + O(\Delta t^2, \Delta x^2) = 0 \quad (80)$$

は無条件不安定である。波動方程式 (36) から  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  が得られるから、(80) の  $u_{tt}$  を  $u_{xx}$  とおいて中心差分近似すると

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \frac{a^2 \Delta t}{2h^2} (u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j)^n + O(\Delta t^2, \Delta x^2) = 0 \quad (81)$$

となる。これを Lax-Wendroff 法という。増幅率  $G$  は

$$G = 1 - C_N^2 (1 - \cos \beta) - i C_N \sin \beta \quad (82)$$



(c) 波の速度の波長による変化 ( $\lambda = n \Delta x$ )

Fig. 4 差分解の減衰と分散



となる。安定条件  $|G| \leq 1$  から  $C_N \leq 1$  が得られる。この方法は陽解法の中で現在のところ、最も安定なスキームである。

#### (b) Hirt の方法

これは、差分方程式から再び偏微分方程式を構成し、差分方程式の安定性を構成された偏微分方程式のもつ性質から決めるものである。たとえば、式(45)から打ち切り誤差項を考慮すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} O(\Delta t^2, \Delta x^2) = 0 \quad (83)$$

となるが、これは双曲形の方程式である。したがって、Ex. 6で得られた結果 ( $C_N \leq 1$ ) を使うと

$$\sqrt{2\alpha/\Delta t} \Delta t / \Delta x \leq 1, \quad \Delta t \leq \Delta x^2 / 2\alpha \quad (84)$$

となる。これは、条件(68)と同じである。

#### (c) 行列の優対角性を利用する方法

対流拡散方程式

$$U \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad U = \text{const.} > 0 \quad (85)$$

を考え、これに対して中心差分近似を施すと

$$-\left(\frac{U}{2h} + \frac{\nu}{h^2}\right) u_{j-1} + \frac{2\nu}{h^2} u_j + \left(\frac{U}{2h} - \frac{\nu}{h^2}\right) u_{j+1} = 0 \quad (86)$$

となる。この3重対角行列が安定に解けるためには、優対角行列であればよい。いまの場合には

$$2\nu/h^2 \geq U/h, \quad Uh/\nu \leq 2 \quad (87)$$

$Uh/\nu$  : Mesh (Cell) Reynolds Number

となる。

### 4.3 収束性 (Convergence)

一般的に適合性があり安定なスキームは収束する。あまり細かいことを言ってもかえってわかりにくいので、ここでは、同じ初期値境界値をもつ差分方程式と偏微分方程式が条件

$$\lim_{\text{mesh} \rightarrow 0} \text{solution of FDE} \rightarrow \text{solution of PDE} \quad (88)$$

を満足するとき、差分方程式は収束性をもつとしておく。なお、数学的な興味のある人は文献(18), (19)を参照されたい。

最後に、Laxの等価定理 (Lax's Equivalence Theorem) をあげておく。

偏微分方程式(55)の適正な初期値問題と、これに対して適合性条件を満足する差分近似が与えられたとする。このとき、安定性は収束性が成立するための必要十分条件である。

## 5. 結 言

本解説で述べた圧縮性流体の数値解析法には、そのほかにもMac Cormack法<sup>20)</sup>、Beam-Warming法<sup>21)</sup>といった代表的なものもあるが、これらは現在TVD法<sup>22)</sup>にとつてかわられつつあるように思われる。TVD法は、とくに衝撃波が鮮明にとらえられるということから現在脚光をあ

びている方法であるが、差分分解の収束性については疑問視する声もある。

なお、現在の(コストも含めた)計算機の進歩にはいまだ相当なものがあり、将来の数値流体力学はこれまで述べたようないかに与えられた方程式の解を正しく出すかという研究のほかに、方程式そのものに対してその成り立ちを論じるような研究も可能になってくるものと思われる。

終わりに臨み、本稿をとりまとめるにあたり本所NSTグループの御支持と御討論を戴きました。とくに、吉澤徹教授、堀内潔助手には貴重な御討論を戴きました。ここに記して厚く感謝致します。(1989年2月28日受理)

## 参 考 文 献

- 1) D.A. Anderson, J.C. Tannehill and R.H. Pletcher, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Hemisphere Publishing Corporation, Washington, New York, London, 1984.
- 2) R. Peyret and T.D. Taylor, "Computational Methods for Fluid Flow", Springer-Verlag, 1983.
- 3) C.A.J. Fletcher, "Computational Techniques for Fluid Dynamics", Springer-Verlag, 1988.
- 4) 日本流体力学会編, "流体力学ハンドブック", 丸善(昭62), pp. 833~854.
- 5) 大林, 桑原, ながれ, vol. 5 (1986), 130, 199.
- 6) G.K. Batchelor, "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge at the University Press, 1970.
- 7) L.D. Landau and E.M. Lifshitz, "Fluid Mechanics", Pergamon Press, 1959.
- 8) 今井, "流体力学(前編)", 裳華房(昭52).
- 9) N. Takemitsu, J. Comput. Phys., 61-3 (1985), 499.
- 10) 藤井, 日本航空宇宙学会誌, 第37巻, 第421号(1989), 82.
- 11) 川口, "流体力学と数値計算(流体力学の展望2)", 流体力学懇談会, (1978), 5.
- 12) J. Kim, P. Moin and R. Moser, J. Fluid Mech., 177 (1987), 133.
- 13) K. Horiuti, Phys. Fluids A, 32, No. 2 (1989).
- 14) C.G. Speziale, G. Erlebacher, T.A. Zang and M.Y. Hussaini, Physics of Fluids, 31 (4) (1988), 940.
- 15) R.S. Varga, "Matrix Iterative Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- 16) 村上, 加藤, 須山, 日本建築学会計画系論文報告集, 第390号(昭63-8), 1.
- 17) 小林, 森西, 生産研究, Vol. 40, No. 1 (1988), 9.
- 18) R.D. Richtmyer and K.W. Morton, "Difference Methods for Initial-Value Problems" (2d Ed.), Interscience Publishers, Wiley, New York (1967).
- 19) 山口, 野木, "数値解析の基礎", 共立出版(昭44).
- 20) R.W. Mac Cormack, AIAA paper 69-354 (1969).
- 21) R.M. Beam and R.F. Warming, J. Comput. Physics, 22 (1976), 87.
- 22) A. Harten, J. Comput. Physics, 49 (1983), 357.